

Asymptotic properties of rational points and intersection theory

安福 悠* (早稲田大学)

本稿は、城崎代数幾何学シンポジウム 2024 (京都開催) での講演に基づく報告集原稿である。「整数は代数幾何により制御される」という哲学に基づくディオファントス幾何という分野には、いくつか有名な予想があるが、そのうちの 하나가 Vojt 予想である。Vojt 予想は、「有理点同士がどのくらい反発し合うかが、射影代数多様体の canonical divisor がどの位正かで定まる」ということを提唱する。特に、代数体 k 上定義された一般型代数多様体 X の場合を考えると、canonical divisor は big なので有理点同士が激しく反発し合うことになり、有理点集合 $X(k)$ の Zariski 非稠密性を主張する。この場合の Vojt 予想は「Bombieri–Lang 予想」として知られており¹、2次元の場合ですでに未解決問題である(1次元の場合は、「種数 2 以上の代数曲線の有理点 は有限個」という Faltings の定理)。このことから分かるように、Vojt 予想を証明することは一般的には大変難しいと考えられている。

Vojt 予想自体は高さ関数を用いて記述される定量的なものなので、例えば射影空間のように canonical divisor が負であっても、負の程度の分有理点が近づけることになる。Vojt 予想を仮定することで導ける結果のうちの 하나가、最大公約数に関する次の Silverman の定理 [5, Theorem 2] である。

定理 1 (Silverman). S を素数の有限集合とする。斉次多項式 $F_1, \dots, F_t \in \mathbb{Z}[X_0, \dots, X_n]$ が定義する部分多様体 $V = \{F_1 = \dots = F_t = 0\} \subset \mathbb{P}^n$ がなめらかで、さらに、座標により定義される超平面たち $X_0 = 0, \dots, X_n = 0$ と V との交叉が transversal だとする。 V の補次元 r が 2 以上のとき、Vojt 予想を仮定すると、任意の $\epsilon > 0$ に対して Zariski 閉集合 $Z \subsetneq \mathbb{A}^n$ が存在し、 $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^n \setminus Z$ ならば

$$\begin{aligned} \text{GCD}(F_1(1, x_1, \dots, x_n), \dots, F_t(1, x_1, \dots, x_n)) \\ < (\max_i |x_i|)^\epsilon \cdot (|x_1 x_2 \dots x_n|'_S)^{1/(r-1)} \end{aligned} \quad (1)$$

を満たす。

*yasufuku@waseda.jp

¹Bombieri 氏ご本人は 2 次元の場合しか主張していない、という噂を聞いたこともあるが、一方で Lang 氏が立てた予想はたくさんあるので、一般の次元の場合でもこの名前が定着しているように見受けられる。

ここで、自然数 n に対して、 $|n|'_S$ とは n の素因数分解のうちの S の外の部分である．実際には、同じ論文の Theorem 6 で、高さ関数や局所高さ関数を用いることで、なめらかな射影代数多様体上の主張へと一般化されている．また、局所高さ関数を用いることで、多項式を評価する点も整数座標である必要はなく、本稿後述の定理と同様、代数体上の有理点での評価に拡張することができるが、本稿では記号の簡易化のため有理整数座標点で全ての結果を述べることにする．

定理 1 に関しては、 x_i を S 単数とした場合、つまり素因数分解に S の素数しか登場しないような数にしたときに、Levin [3, Theorem 1.1] により証明されている．この場合は、 S の外の貢献がないので、(1) は

$$\text{GCD}(F(1, x_1, \dots, x_n), G(1, x_1, \dots, x_n)) < (\max_i |x_i|)^\epsilon$$

となり、不等式としてはかなり強い式となる一方で、 S 単数という、(乗法的に) 有限生成の部分のみの考察となっている．Levin の定理は、 $n = 2$ の場合では、Corvaja–Zannier [1] により証明されていたが、この証明も非自明である．どちらにも Schmidt の部分空間定理が最終的には使われているが、適用に至るまでにどちらの論文も巧みな工夫をしている．余談だが、 S 単数点を「 $X_0 \cdots X_n = 0$ に対する整数点」と捉えることで、Julie Wang 氏との共同研究 [6] で Levin の結果を一般化しており、Huang–Levin [2] によりさらに一般化されている．

一方で、 S の外の部分の貢献が真にある形での定理 1 はこれまで証明されていなかった．その第一弾として、次の結果 [7] を得ることが出来た．

定理 2. S を素数の有限集合とする．2 以上の自然数 n に対し実数 $\epsilon_1(n) \in (0, 1)$ が定まり、ある Zariski 閉集合 $Z \subsetneq \mathbb{A}^n$ が存在して、 $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^n \setminus Z$ ならば

$$\text{GCD}(x_1 - 1, \dots, x_n - 1) < (\max_i |x_i|)^{\epsilon_1(n)} \cdot (|x_1 x_2 \cdots x_n|'_S)^{1/(n-1)}$$

を満たす．ここで、 $\epsilon_1(2) \leq 0.45$, $\epsilon_1(3) \leq 0.35$ ととることができ、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon_1(n) = 0$ である．

$V = [1 : \cdots : 1]$ としたときの定理 1 と似た形の定理となっているものの、定理 1 と違って、各 n ごとに任意の ϵ という形では証明できていない．同じ論文では次の定理も示している．

定理 3. S を素数の有限集合とする．2 以上の自然数 n に対し実数 $\epsilon_2(n) \in (0, 1)$ が定まり、ある Zariski 閉集合 $Z \subsetneq \mathbb{A}^n$ が存在して、 $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^n \setminus Z$ ならば

$$\text{GCD}(x_1 - 1, \dots, x_n - 1) < (\max_i |x_i|)^{\epsilon_2(n)} \cdot |x_1 x_2 \cdots x_n|'_S$$

を満たす．ここで、 $\epsilon_2(2) \leq 0.45$, $\epsilon_2(3) \leq 0.14$ ととることができ、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon_2(n) = 0$ である．

n 項の最大公約数の方が 2 項の最大公約数よりも小さくなるのは当たり前だが、項の数を増やせば $\max |x_i|$ の指数を任意の正の数にできる、というのがポイントで、弱い形とはいえ、Vojta 予想の状況証拠とはなっている定理かと思う。

それでは、 V を一点ではなく、一次元にした場合にも、同じような結果を導くことができるのだろうか？この問いの答えの小さな第一歩を得ることができた [8].

定理 4. S を素数の有限集合とする．このとき、 $(d_1, d_2) \in \mathbb{N}^2$ に対して、実数 $\epsilon_3 = \epsilon_3(d_1, d_2)$ が存在し、 $F_1, F_2 \in \mathbb{Z}[X_0, \dots, X_3]$ がそれぞれ斉 d_i 次多項式で $F_1 = F_2 = 0$ が定義する部分代数多様体 $\mathcal{Y}$ が

- (i) $\mathcal{Y}$ は既約で、local complete intersection である
 - (ii) $\mathcal{Y}$ を含むような $X_i = 0$ は最大でも 1 個
 - (iii) $[1 : 0 : 0 : 0], [0 : 1 : 0 : 0], [0 : 0 : 1 : 0], [0 : 0 : 0 : 1] \notin \mathcal{Y}$
- を満たすとき、Zariski 閉集合 $Z \subsetneq \mathbb{A}^3$ が存在し、 $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}^3 \setminus Z$ のとき

$$\begin{aligned} & \text{GCD}(F_1(1, x_1, x_2, x_3), F_2(1, x_1, x_2, x_3)) \\ & < (\max(|x_1|, |x_2|, |x_3|))^{\epsilon_3} \cdot |x_1 x_2 x_3|'_S \quad (2) \end{aligned}$$

を満たす．ここで、 $\epsilon_3(1, 1) = 0.46, \epsilon_3(1, 2) = 0.78, \epsilon_3(2, 2) = 1.29, \epsilon_3(2, 3) = 1.68, \epsilon_3(3, 3) = 2.21, \epsilon_3(3, 4) = 2.63$ である．

この定理も、Vojta 予想を仮定して得られる (1) と同じような形となっているので、Vojta 予想の間接的な証拠とはなっているが、定理 2, 3 同様、 $\max |x_i|$ の指数を任意の正の数にするところまでは証明できていない．さらに残念なことに、ある定数 C が存在して、

$$\begin{aligned} & \text{GCD}(F_1(1, x_1, x_2, x_3), F_2(1, x_1, x_2, x_3)) \leq \min_i |F_i(1, x_1, x_2, x_3)| \\ & \leq C \cdot (\max(|x_1|, |x_2|, |x_3|))^{\min(d_1, d_2)} \end{aligned}$$

となるのは三角不等式より明らかなので、 $\epsilon_3(d_1, d_2) > \min(d_1, d_2)$ のとき定理 4 は自明な不等式となってしまふ．実際、例えば、 $\epsilon_3(1, 3) = 1.14 > 1$ である．一般に、 d_1 と d_2 が離れているとき、 $\epsilon_3(d_1, d_2) > \min(d_1, d_2)$ が起きやすく、逆に $d_1 = d_2$ のときは、定理 4 が必ず非自明な不等式となることが確認できている．

定理 2–4 は、定理 1 で Vojta 予想が使われるところを、Ru-Vojta の理論 [4] で置き換えることで証明される．Ru-Vojta の論文では、ある意味で一番効果的な Schmidt の部分空間定理の使用法を見つける不変量

$$\beta(\mathcal{L}, D) = \liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{\sum_{m=0}^{\infty} h^0(X, \mathcal{O}(N\mathcal{L} - mD))}{N \cdot h^0(X, \mathcal{O}(N\mathcal{L}))}$$

が考察されていて、非常に豊富な $N\mathcal{L}$ を用いて、 $\mathbb{P}^{h^0(X, \mathcal{O}(N\mathcal{L})) - 1}$ に射影代数多様体 X を埋め込むことで、有効因子 D と有理点 P がどの位近づけるかが $\beta(\mathcal{L}, D)$ で制御されることが証明されている。定理 2 や 3 では、Ru-Vojta 理論を $\mathbb{P}^n$ を $[1 : \dots : 1]$ でブローアップしたところに活用する。 β 不変量の概算が肝となるが、nef 因子に対する漸近的 Riemann-Roch の定理を活用することで、交叉数の計算に落とし込む。あとは、 $N\mathcal{L} - mD$ が豊富な因子となるような m の範囲において、大域切断の次元を概算しておけば、 β の下界が得られることになる。

定理 4 の証明も同様の流れだが、Ru-Vojta の理論を活用するのに必要な仮定である「因子が proper intersection であること」を確認する部分が、難しくなる。当然 $\mathbb{P}^4$ からの曲面沿い、あるいは曲線沿いのブローアップも考えてみたい問題だが、このあたりがハードルになっているし、Ru-Vojta 理論から得られる最大公約数に関する結論が自明となってしまう可能性もある。

blowup 射 π で座標軸超平面を引き戻したときに、proper intersection にならないと Ru-Vojta の理論が使えないことから、(i)–(iii) の条件を課している。実際、 $F_1 = X_1$, $F_2 = X_2$ などとすると、明らかに定理は成り立たなくなる。一方で、(i)–(iii) の条件を満たさないと絶対に定理の不等式が成り立たないか、というとはそれはよく分からない。例えば、 $F_1 = X_1X_2 - X_0^3$, $F_2 = X_3 - X_0$ とすると、 $\pi^*(X_0 = 0), \pi^*(X_1 = 0), \pi^*(X_3 = 0)$ は全て $[0 : 0 : 1 : 0] \times \mathbb{P}^1$ を含むので proper intersection ではなくなってしまい、Ru-Vojta の理論は使えない。ただだからといって、この場合の (2) が絶対に成り立たないと言えるわけでもなさそうで、このような場合を扱うには真新しい理論が必要そうである。

最後に、「 S の外の貢献」を「個数関数」に、「 $\max |x_i|$ 」を「特性関数」に変えることで、定理 2–4 の Nevanlinna 理論版 (有理型関数の値分布理論) も証明できることを付記する。これは、Ru-Vojta の理論が、Nevanlinna 理論でも同様に成り立つからである。

謝辞： 歴史の長いシンポジウムでの講演の機会を与えて下さったオーガナイザーの中村 勇哉氏 (名古屋大)・松澤 陽介氏 (大阪公立大)・山木 壱彦氏 (東北大) に心より感謝申し上げます。諸々の事情で京大開催となり、いつも以上に世話人のお仕事が大変だったことと思います。現地世話人を務めて下さった京都大学の川口 周氏・吉川 謙一氏にもお礼申し上げます。

参考文献

- [1] Pietro Corvaja and Umberto Zannier, *A lower bound for the height of a rational function at S -unit points*, Monatsh. Math. **144** (2005), no. 3,

203–224.

- [2] Keping Huang and Aaron Levin, *Greatest common divisors on the complement of numerically parallel divisors*, arXiv:2207.14432, 2022.
- [3] Aaron Levin, *Greatest common divisors and Vojta’s conjecture for blowups of algebraic tori*, Invent. Math. **215** (2019), no. 2, 493–533.
- [4] Min Ru and Paul Vojta, *A birational Nevanlinna constant and its consequences*, Amer. J. Math. **142** (2020), no. 3, 957–991.
- [5] Joseph H. Silverman, *Generalized greatest common divisors, divisibility sequences, and Vojta’s conjecture for blowups*, Monatsh. Math. **145** (2005), no. 4, 333–350.
- [6] Julie Tzu-Yueh Wang and Yu Yasufuku, *Greatest common divisors of integral points of numerically equivalent divisors*, Algebra Number Theory **15** (2021), no. 1, 287–305.
- [7] Yu Yasufuku, *GCD inequalities inspired by Vojta’s conjecture*, Monatsh. Math. (2024), Online First.
- [8] ———, *GCD inequalities derived from blowing up subvarieties other than a single point*, in preparation, 2025.