

離散可展面とその特異点について

広島工業大学情報学部 直川耕祐 *

Kosuke Naokawa

Faculty of Applied Information Science,

Hiroshima Institute of Technology

近年、微分幾何学的に本質的と考えられる性質に着目し、その離散的対応物を定式化し、研究する分野である「離散微分幾何学」の研究が盛んになりつつある (cf. [1], [2], [3], [14], [15]). 本稿では、3 次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}^3$ における可展面に着目し、その離散版に現れる「特異点」について概説する. 本研究は、ウィーン工科大学の Christian Müller 氏との共同研究に基づく.

1 可展面とその離散化

$\mathbb{R}^3$ 内の直線の滑らかな運動によって生成される曲面を**線織面** (ruled surface) といい、平坦な (つまり、Gauss 曲率が恒等的に零である) 線織面を**可展面** (developable surface) という. 可展面は、伸び縮みしない素材としての現実の「紙」を丸めたり、滑らかに継ぎ合わせたりして出来る曲面の数学的モデルと考えられる. より正確には、標準計量を備えた 2 次元 Euclid 平面 $\mathbb{R}^2$ に局所的に等長的な (つまり、第一基本形式が等しい) 線織面である. 例えば、 $\mathbb{R}^3$ 内の錐面や柱面、接線曲面は、その典型例である (図 1).

ここで、柱面は平面曲線に沿って、その平面に垂直な直線の運動により生成される曲面、錐面は固定された一点を通る直線の運動により生成される曲面、接線曲面は、空間曲線に沿う接線の運動により生成される曲面である. 錐面や接線曲面は、はめ込みでなくなる点である「特異点」を持つ. $\mathbb{R}^3$ に、はめ込まれた完備かつ平坦な曲面は柱面に限る (Hartman-Nirenberg の定理 [4], cf. [8]) ことから、柱面でない可展面の線織方向への延長上には、特異点が現れる (cf. [11]).

* 本研究は科研費 (課題番号:17K14197) の助成を受けたものである.

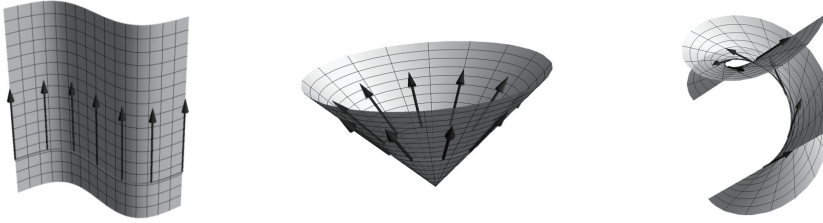


図 1 左から，柱面，錐面，接線曲面

可展面を離散化するために「 $\mathbb{R}^2$ に局所等長的な線織面である」という性質に着目する．

定義 1.1 (Sauer [12], cf. [7]). $\mathbb{R}^3$ の番号付けられた直線の列 $\{l_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ のことを，**離散線織面** (discrete ruled surface) といい，離散線織面の隣接するどの 2 直線 l_n, l_{n+1} ($n \in \mathbb{Z}$) も同一平面上にあるとき，**離散可展面** (discrete developable surface, [独] Faltmodell) という．

大雑把に言えば，離散可展面は「紙」を折ることで作られる．あるいは逆に，離散可展面の直線の折り目を平らに広げて，局所的には平面上に展開できるとも言える．例えば，図 1 の 3 つの例では，直線の滑らかな運動の代わりに，離散的な運動に置き換えることにより，それぞれに対応する離散可展面が得られる (図 2)．

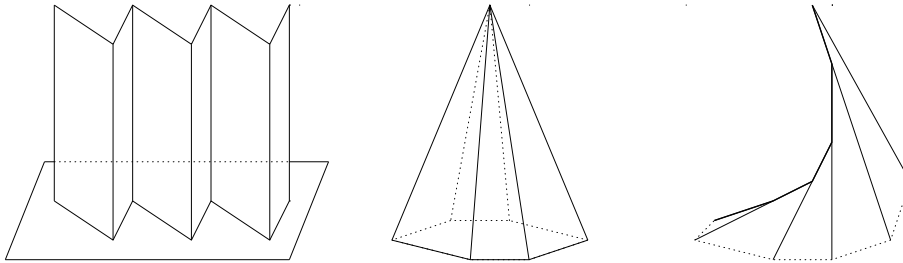


図 2 左から，柱面，錐面，接線曲面の離散版

図 2 の一番左の柱面の離散版は，「屏風」の両端を左右に引っ張るように展開すれば，平面に広げられる．中央の錐面は，直線の折り目のひとつをハサミで切ることによって，平面に展開できる．一番右の離散的な接線曲面は， $\mathbb{R}^3$ の空間的折れ線を生成曲線として，折れ線の各線分を真っ直ぐ延長して得られる直線の列である．

2 空間離散曲線

離散曲線に関する基本的な定義を準備する．さらに進んだ話題については [5], [9] も参照されたい． $\mathbb{Z}$ で整数全体の集合を表す．写像 $\gamma = \gamma_m : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^3$ であって，各 $m \in \mathbb{Z}$ に対して，

$$(2.1) \quad \gamma_m \neq \gamma_{m+1}$$

であるものを空間離散曲線 (space discrete curve)，あるいは単に離散曲線という．各整数 $m \in \mathbb{Z}$ のことを γ の頂点 (vertex) と呼び，誤解の恐れがないときは，その像 $\gamma_m \in \mathbb{R}^3$ のことも γ の頂点と呼ぶ．つまり，ここでは離散曲線とは， $\mathbb{R}^3$ 内の点列であって，どの隣接する頂点も一致しないものを言う． γ の隣接する 2 頂点を線分で結んでできる連続曲線

$$(2.2) \quad P(\gamma)(t) := (1 - t + m)\gamma_m + (t - m)\gamma_{m+1} \quad (m \in \mathbb{Z}, m \leq t < m + 1)$$

を γ の折れ線 (polygonal line) という．ある正整数 l が存在して，

$$\gamma_{m+l} = \gamma_m \quad (m \in \mathbb{Z})$$

を満たすとき， γ を離散閉曲線 (discrete closed curve) といい， l を γ の周期という． $P(\gamma)$ が自己交叉を持たない閉曲線であるとき， γ を離散的な結び目 (discrete knot)， $P(\gamma)$ を折れ線結び目 (polygonal knot) という．

γ を離散曲線とする．差分を表す記号 $\Delta\gamma_m := \gamma_{m+1} - \gamma_m$ を導入しよう．すると，条件 (2.1) は $\Delta\gamma_m \neq 0$ と同値である．このとき，差分ベクトル $\Delta\gamma_m$ のことを γ の辺接ベクトル (edge-tangent vector) あるいは単に接ベクトルという．これは，いわゆる「前進差分」である．このことを明示するために， $\Delta^+\gamma_m := \Delta\gamma_m = \gamma_{m+1} - \gamma_m$ と書くことがある．一方，後進差分は， $\Delta^-\gamma_m := \gamma_m - \gamma_{m-1}$ と書く．一般に，隣接するとは限らない 2 つの頂点 $i, j \in \mathbb{Z}$ があるとき，その差分を $\Delta_{ij}\gamma := \gamma_j - \gamma_i$ と書く．隣接する 2 つの整数の組の全体を

$$\mathcal{E} := \{(m, m + 1) ; m \in \mathbb{Z}\}$$

とする． $\mathcal{E}$ の元を辺 (edge) という．頂点の定義と同様に，誤解の恐れがないときは， γ_m と γ_{m+1} を結ぶ線分のことも， γ の辺と呼ぶ．条件 (2.1) は，各 $(i, j) \in \mathcal{E}$ に対し， $\Delta_{ij}\gamma \neq 0$ である．

3 面正則な離散可展面

$\gamma = \gamma_m : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^3$ を離散曲線とし, $\xi = \xi_m : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ を γ に沿う離散ベクトル場とする. 各 $m \in \mathbb{Z}$ に対し, γ_m の頂点を通り, ξ_m を方向ベクトルとする直線の列である離散線織面を

$$F_{\gamma, \xi}(m, u) := \gamma_m + u\xi_m \quad (m \in \mathbb{Z}, u \in \mathbb{R})$$

と表す. γ を $F_{\gamma, \xi}$ の生成曲線 (generating curve), ξ を $F_{\gamma, \xi}$ の線織方向 (ruling direction) という. 例えば, もし $\gamma = \gamma_m$ が周期 l をもつ離散的な結び目で, 各 $m \in \mathbb{Z}$ に対して $\xi_{m+l} = -\xi_m$ であるならば, $F_{\gamma, \xi}$ は離散的な Möbius の帯である (図 3 左).

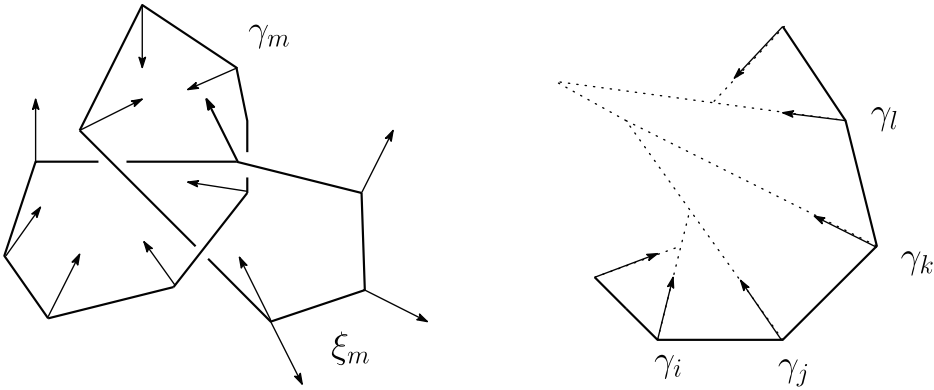


図 3 離散線織面の生成曲線 γ と線織方向 ξ (左図), および離散可展面 (右図). ただし, i, j, k, l は隣接する整数である.

$(i, j) \in \mathcal{E}$ を γ の任意の辺とする. 離散線織面の隣接する 2 直線 $\gamma_i + u\xi_i, \gamma_j + u\xi_j$ ($u \in \mathbb{R}$) が同一平面上にあることは, γ の辺接ベクトル $\Delta_{ij}\gamma = \gamma_j - \gamma_i$ と ξ_i, ξ_j が一次従属であることと同値である (図 3 右). したがって, 次が成り立つ.

補題 3.1 (cf. [12]). 離散線織面 $F_{\gamma, \xi}$ が可展的であるための必要十分条件は, 各 $(i, j) \in \mathcal{E}$ に対し,

$$(3.1) \quad \det(\Delta_{ij}\gamma, \xi_i, \xi_j) = 0$$

を満たすことである. ただし, $\det$ は行列式を表す.

$F_{\gamma, \xi}$ を離散可展面とする. 各 $u \in \mathbb{R}$ に対し, $\gamma^u : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^3$ を

$$\gamma_m^u := F_{\gamma, \xi}(m, u)$$

で定める．このとき，隣接する 2 直線を面で繋いで出来る (連続な) 曲面

$$P(F_{\gamma,\xi})(t,u) := P(\gamma^u)(t) \quad (t,u \in \mathbb{R})$$

を $F_{\gamma,\xi}$ の **ポリゴン** (polygon) という．離散可展面を図示するには，ポリゴンの像を描画すると分かりやすい．

以降，離散可展面の隣接する任意の 2 直線は一致しないものと仮定する．このとき，この 2 直線を含む平面の法線ベクトルを **面法線ベクトル** (face-normal vector) という．

定義 3.2 ([10]). 各 $(i,j) \in \mathcal{E}$ に対し， $[\Delta_{ij}\gamma, \xi_i, \Delta_{ij}\gamma, \xi_j] > 0$ を満たすとき，離散可展面 $F_{\gamma,\xi}$ は **面正則** (face-regular) であるという．ただし， $[\]$ は，スカラー四重積

$$(3.2) \quad [a,b,c,d] := (a \times b) \cdot (c \times d) = (a \cdot c)(b \cdot d) - (a \cdot d)(b \cdot c) \quad (a,b,c,d \in \mathbb{R}^3)$$

で， $\times$ は $\mathbb{R}^3$ の外積， $\cdot$ は $\mathbb{R}^3$ の標準内積を意味する．

面正則な離散可展面では， $\gamma_{ij} \times \xi_i$ と $\gamma_{ij} \times \xi_j$ は互いに平行なベクトルで，向きが同一 (なす角が 0) である．このとき，図 4 左のように，十分小さな正数 ϵ に対し，4 点 $\gamma_i - \epsilon\xi_i$, $\gamma_j - \epsilon\xi_j$, $\gamma_j + \epsilon\xi_j$, $\gamma_i + \epsilon\xi_i$ がこの順で凸四角形を為す．一方，面正則でなければ，図 4 中央のように，四角形の面が捻じれることになる．図 4 右は， γ が平面の正六角形をなす離散閉曲線， ξ がその平面の法線ベクトルとなっている離散可展面 $F_{\gamma,\xi}$ で，面正則でない面を一つだけもつ．すなわち， $F_{\gamma,\xi}$ は $m \in \mathbb{Z}$ に対し，

$$(3.3) \quad \gamma_m := \left(\cos \frac{m\pi}{3}, \sin \frac{m\pi}{3}, 0 \right), \quad \xi_m := \begin{cases} (0, 0, 1) & (m \equiv 0, 1, \dots, 5) \\ (0, 0, -1) & (m \equiv 6, 7, \dots, 11) \end{cases}$$

で定められる．ただし， $\equiv$ は 12 を法とする整数の合同を意味する．このとき， $F_{\gamma,\xi}$ は離散的な Möbius の帯である．面正則性により，このような捻じれた四角形の面をもつ離散曲面が除外される．

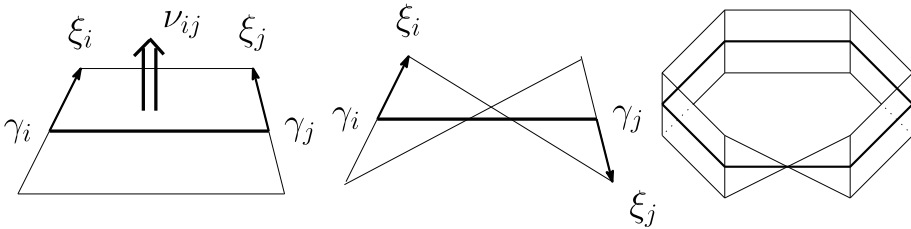


図 4 左から，面正則な場合，面正則でない場合，面正則でない面を一つだけもつ離散的な帯

$F_{\gamma,\xi}$ を面正則な離散可展面とする．このとき，隣接する頂点 γ_i, γ_j を含む平面に対応する $F_{\gamma,\xi}$ の面法線ベクトルは，

$$(3.4) \quad \nu_{ij} := \frac{\Delta\gamma_{ij} \times \xi_i}{|\Delta\gamma_{ij} \times \xi_i|} = \frac{\Delta\gamma_{ij} \times \xi_j}{|\Delta\gamma_{ij} \times \xi_j|}$$

で与えられる．

4 滑らかな写像の特異点

可展面における「カスプ辺」「燕の尾」という特異点の種類を含めた離散化を行うために，その由来となる滑らかな（つまり， C^∞ 級の）写像の特異点について述べる．

U を $\mathbb{R}^2$ の領域とし， $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ を C^∞ -写像とする．点 $p \in U$ が f の特異点 (singular point) であるとは， p において f の Jacobi 行列のランクが 2 より小さくなることをいう． C^∞ -写像 f について，特異点 $p \in U$ がカスプ辺 (resp. 燕の尾) であるとは， p のまわりのある局所座標 (u, v) と， $f(p) \in \mathbb{R}^3$ のまわりのある局所微分同相写像 Φ が存在して，

$$\Phi \circ f(u, v) = (u^2, u^3, v) \quad (\text{resp. } (3u^4 + u^2v, 4u^3 + 2uv, v))$$

が成り立つときをいう (図 5, 6)．

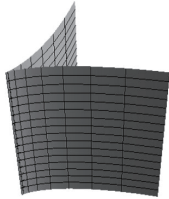


図 5 カスプ辺

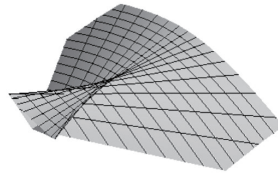


図 6 燕の尾

國分-Rossmann-佐治-梅原-山田 [6] によるカスプ辺・燕の尾の判定法を紹介する．そのために，いくつか用語を定義する．詳しくは [13] も参照されたい．

定義 4.1. C^∞ -写像 $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ が波面 (wave front) またはフロント (front) であるとは，次の (1) と (2) を満たす C^∞ -写像 $\nu : U \rightarrow \mathbb{S}^2$ が存在するときをいう．ただし， $\mathbb{S}^2$ は 2 次元単位球面である．

(1) $p \in U$ ， $\mathbf{v} \in T_p U$ に対して $\nu(p) \cdot df_p(\mathbf{v}) = 0$ である．

(2) 写像 $L := (f, \nu) : U \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2$ が C^∞ -はめ込みである.

この ν を波面 f の単位法線ベクトル場という.

C^∞ -写像 $f = f(u, v) : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ を波面とし, ν を f の単位法線ベクトル場とする. $\lambda := \det(f_u, f_v, \nu)$ を f の面積密度関数という. ただし, $f_u := \partial f / \partial u$, $f_v := \partial f / \partial v$ である. 点 $(u, v) \in U$ が f の特異点であることと, $\lambda(u, v) = 0$ であることは同値である. したがって,

$$S(f) := \{(u, v) \in U ; \lambda(u, v) = 0\}$$

は f の特異点集合を表す. f の特異点 p が非退化 (non-degenerate) であるとは, λ の微分 $d\lambda = \lambda_u du + \lambda_v dv$ が点 p で 0 とならないときにいう. 陰関数定理により, f の特異点集合 $S(f)$ は点 p の近傍で正則曲線となる. この正則曲線 $c(s)$ を f の特異曲線といい, その接ベクトルを f の特異方向 (singular direction) という. 非退化な特異点 p の近傍では, $df(\eta) = 0$ となる 0 でない接ベクトル $\eta \in T_{c(s)}U$ がとれる. この η は, 定数倍を除いて一意に定まり, f の退化方向 (null direction) という. 退化方向 $\eta(s)$ は特異曲線 $c(s)$ に沿って滑らかに取れる.

事実 4.2 ([6]). $f = f(u, v) : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ を波面とする. $c(s)$ を非退化な特異点 $p \in U$ の近傍における f の特異曲線とし, $c(0) = p$ とする. $\eta(s)$ を $c(s)$ に沿って f の退化方向を与える C^∞ -ベクトル場とする. また, 局所座標 (u, v) において, 特異方向と退化方向のベクトルを並べてできる行列の行列式を $\rho(s) := \det(c'(s), \eta(s))$ とおく. このとき,

- (1) $p = c(0)$ がカusp辺であるための必要十分条件は, $\rho(0) \neq 0$ である.
- (2) $p = c(0)$ が燕の尾であるための必要十分条件は, $\rho(0) = 0$ かつ $\rho'(0) \neq 0$ である.

カusp辺では p の近傍で特異方向と退化方向が一次独立であるのに対し, 燕の尾では退化方向が特異曲線を横切るように変化する (図 7).

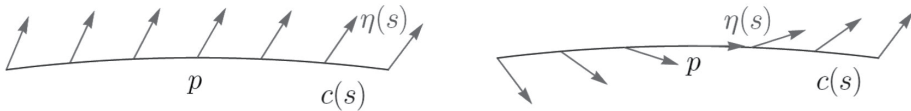


図 7 カusp辺 (左図) と燕の尾 (右図) の特異曲線と退化方向

5 離散可展面の特異点

離散可展面 $F_{\gamma,\xi}$ の隣接する 2 直線は、もし互いに平行でなければ、交点をもつ。これを $F_{\gamma,\xi}$ の **特異点** (singular point) という。また、

$$S(F_{\gamma,\xi}) := \{(m, u) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R} ; F_{\gamma,\xi}(m, u) \text{ は特異点} \}$$

を $F_{\gamma,\xi}$ の **特異点集合** (singular set) という。誤解のない限り、 $S(F_{\gamma,\xi})$ の元のことも $F_{\gamma,\xi}$ の **特異点** と呼ぶ。

補題 5.1 ([10]). 離散可展面 $F_{\gamma,\xi} : \mathbb{Z} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ の特異点集合 $S(F_{\gamma,\xi})$ は

$$S(F_{\gamma,\xi}) = S^+(F_{\gamma,\xi}) \cup S^-(F_{\gamma,\xi}),$$

$$S^\pm(F_{\gamma,\xi}) := \left\{ (m, u_m^\pm) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R} ; u_m^\pm = \pm \frac{[\Delta^\pm \gamma_m, \xi_{m\pm 1}, \xi_m, \xi_{m\pm 1}]}{|\xi_m \times \xi_{m\pm 1}|^2}, \xi_m \nparallel \xi_{m\pm 1} \right\},$$

で与えられる。ただし、 $[\]$ は、スカラー四重積 (cf. (3.2)) を意味する。

$p_m^\pm := (m, u_m^\pm) \in S^\pm(F_{\gamma,\xi})$ とおく。直ちに、次が従う。

系 5.2. $\xi_m \nparallel \xi_{m+1}$ のとき、 $F_{\gamma,\xi}(p_m^+) = F_{\gamma,\xi}(p_{m+1}^-)$ が成り立つ。

$\mathbf{r}_m := F_{\gamma,\xi}(p_m^+) = F_{\gamma,\xi}(p_{m+1}^-)$ とおく。系 5.2 より、 $\mathbf{r} = \mathbf{r}_m$ は離散可展面の特異点を頂点とする離散曲線である (cf. 図 8)。そこで、 $\mathbf{r}_m$ の辺接ベクトルと $F_{\gamma,\xi}$ の線織方向 ξ_m の向きを考慮することで、可展面上に現れる特異点である「カスプ辺」と「燕の尾」の離散版を、次のように定義する。

定義 5.3 ([10]). $m \in \mathbb{Z}$ とする。 $F_{\gamma,\xi}$ を面正則な離散可展面とし、 $\xi_{m-1} \nparallel \xi_m$ かつ $\xi_m \nparallel \xi_{m+1}$ とする。

(1) $\mathbf{r}$ の頂点 $\mathbf{r}_m$ が**カスプ辺型** (cuspidal edge type) であるとは、

$$((\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_{m-1}) \cdot \xi_m)((\mathbf{r}_{m+1} - \mathbf{r}_m) \cdot \xi_{m+1}) > 0,$$

(2) $\mathbf{r}$ の頂点 $\mathbf{r}_m$ が**燕の尾型** (swallowtail type) であるとは、

$$((\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_{m-1}) \cdot \xi_m)((\mathbf{r}_{m+1} - \mathbf{r}_m) \cdot \xi_{m+1}) < 0$$

が成り立つときをいう。

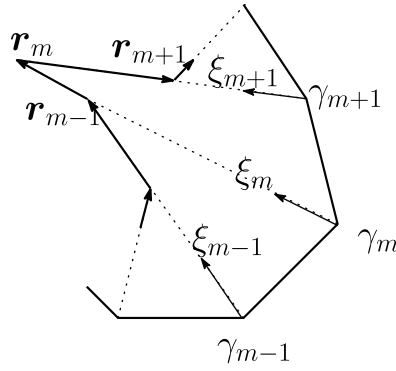


図 8 離散可展面の特異点

離散可展面 $F_{\gamma, \xi}$ 上に現れるカスプ辺型あるいは燕の尾型の特異点は, $F_{\gamma, \xi}$ の定義域 $\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$ 内の特異点集合 $S(F_{\gamma, \xi})$ の情報から判定できる. すなわち, 次の定理が成り立つ.

定理 5.4 ([10]). 面正則な離散可展面 $F_{\gamma, \xi}$ において, $\xi_{m-1} \nparallel \xi_m$ かつ $\xi_m \nparallel \xi_{m+1}$ とする. このとき, 次の定理が成り立つ.

- (1) r_m がカスプ辺型であるための必要十分条件は $(u_m^+ - u_m^-)(u_{m+1}^+ - u_{m+1}^-) > 0$,
- (2) r_m が燕の尾型であるための必要十分条件は $(u_m^+ - u_m^-)(u_{m+1}^+ - u_{m+1}^-) < 0$.

この判定法は, [6] による滑らかな写像における「カスプ辺」と「燕の尾」の判定法 (事実 4.2) の, 離散可展面における対応物と考えられる. 実際, 離散可展面において「特異方向」と「退化方向」を次のように定義すると, 図 7 と類似の状況となっている.

定義 5.5 ([10]). $\xi_m \nparallel \xi_{m+1}$ とする. $\eta_m := p_{m+1}^- - p_m^+ = (1, u_{m+1}^- - u_m^+)$ を $F_{\gamma, \xi}$ の退化方向という. また, $v_m := p_{m+1}^+ - p_m^+ = (1, u_{m+1}^+ - u_m^+)$ を $F_{\gamma, \xi}$ の特異方向という.

参考文献

- [1] A. I. Bobenko and U. Pinkall, *Discretization of surfaces and integrable systems*, Oxford University Press (1999).
- [2] A. I. Bobenko and Y. B. Suris, *Discrete Differential Geometry*, AMS (2008).
- [3] F. Burstall, U. Hertrich-Jeromin and W. Rossman, *Discrete linear Weingarten surfaces*, Nagoya Math. J. **231** (2018), 55–88.

- [4] P. Hartman and L. Nirenberg, *On spherical image maps whose Jacobians do not change sign*, Amer. J. Math. **81** (1959), 901–920.
- [5] T. Hoffmann, 曲線や曲面に関する微分幾何学 (訳：安藤央), 可視化の技術と現代幾何学, 岩波書店, 2010, pp.133–181.
- [6] M. Kokubu, W. Rossman, K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *Singularities of flat fronts in hyperbolic 3-space*, Pacific J. Math. **221** (2005), 303–351.
- [7] Y. Liu, H. Pottmann, J. Wallner, Y.-L. Yang and W. Wang, *Geometric modeling with conical meshes and developable surfaces*, ACM Trans. Graphics **25** (2006), 681–689.
- [8] W. S. Massey, *Surfaces of Gaussian curvature zero in Euclidean 3-space*, Tohoku Math. J. **14** (1962), 73–79.
- [9] 松浦望, 曲線と曲面の差分幾何, 応用数理 **26** (2016), 17–24.
- [10] C. Müller and K. Naokawa, *Singularities of discrete developable surfaces*, preparation.
- [11] K. Naokawa, *Singularities of the asymptotic completion of developable Möbius strips*, Osaka J. Math **50** (2013), 425–437.
- [12] R. Sauer, *Differenzgeometrie*, Springer-Verlag, Berlin, 1970.
- [13] 梅原雅顕, 佐治健太郎, 山田光太郎, 特異点をもつ曲線と曲面の微分幾何学, 丸善出版, 2017.
- [14] M. Yasumoto, *Discrete maximal surfaces with singularities in Minkowski space*, Differential Geom. Appl. **43** (2015), 130–154.
- [15] M. Yasumoto and W. Rossman, *Semi-discrete linear Weingarten surfaces with Weierstrass-type representations and their singularities*, Osaka J. Math. **57** (2020), 169–185.