

コンパクト対称三対の標準形と二重佐武図形

東京理科大学・創域理工学部数理科学科 馬場 蔵人

Kurando Baba

Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology,
Tokyo University of Science

概要

コンパクト対称三対の分類理論において、松木敏彦氏はコンパクト対称三対に対して非自明な同値関係を導入した。幾何学的には、二つのコンパクト対称三対が同値であれば、これらから得られる Hermann 作用は本質的に同じとなる。しかし、それらの Hermann 作用の扱いやすさには差が生じることがある。よって、同型類の中から‘良い’構造をもった代表元を選ぶことで Hermann 作用の詳しい性質を調べることに役に立つと期待される。本稿ではそのような代表元を‘標準形’とよび、その存在と性質について説明する。また、松木敏彦氏によるコンパクト対称三対の分類定理の別証明として二重佐武図形の方法について説明する。本研究は井川治氏（京都工芸繊維大学）との共同研究（arXiv:2205.08410）に基づく。

1 導入

G を半単純コンパクト連結 Lie 群, θ_1, θ_2 を G 上の二つの対合とする。三組 (G, θ_1, θ_2) をコンパクト対称三対とよぶ。 θ_i ($i = 1, 2$) の固定部分群 $G^{\theta_i} = \{g \in G \mid \theta_i(g) = g\}$ の単位連結成分を K_i で表す。 G の両側不変計量に関して等質空間 G/K_1 はコンパクト Riemann 対称空間となり、 K_2 は G/K_1 上の等長作用を与える。この等長作用は **Hermann** 作用とよばれる。 $\theta_1 = \theta_2$ のとき、 $K_1 = K_2$ であり、Hermann 作用はイソトロピー作用にほかならない。イソトロピー作用の性質は詳しく調べられているので、イソトロピー作用とは異なる Hermann 作用の研究が重要となる。また、本研究では一般の対合 θ_1, θ_2 であっても特に断りが無ければ θ_1 と θ_2 の可換性を仮定しない。

一般に、Hermann 作用は超極作用とよばれる幾何学的に良い性質をもっている。超極作用は、切断とよばれる閉全測地的部分多様体が存在し、任意の軌道は切断と直交して交わる。例えば、コンパクト連結リー群の随伴作用では極大トラスが切断となっている。コンパクト対称空間上の超極作用は Kollross ([9]) によって分類された。彼の分類結果によれば、コンパクト対称空間上の超極作用のほとんどは Hermann 作用であることが知られている。コンパクト対称三対の研究の意義の一つに Hermann 作用の幾何学の研究にある。イソトロピー作用は制限ルート系によってその軌道の構造が調べられてきたように、可換な Hermann 作用では井川治氏が導入した重複度付き対称三対の概念 ([8]) によって軌道の構造が調べられる。二重佐武図形の研究はコンパクト対称三対が定める具体的な重複度付き対称三対を決定に応用できる。

G の自己同型群と内部自己同型群をそれぞれ $\text{Aut}(G)$ と $\text{Int}(G)$ で表す. 松木敏彦氏はコンパクト対称三対に対して次の同値関係 $\sim$ を導入した.

定義 1.1 ([12]). 二つのコンパクト対称三対 (G, θ_1, θ_2) と $(G, \theta'_1, \theta'_2)$ が同型であるとは, $\varphi \in \text{Aut}(G)$ と $\tau \in \text{Int}(G)$ で

$$\theta'_1 = \varphi \theta_1 \varphi^{-1}, \quad \theta'_2 = \tau \varphi \theta_2 \varphi^{-1} \tau^{-1} \quad (1.1)$$

を満たすものが存在するときをいう. このとき, $(G, \theta_1, \theta_2) \sim (G, \theta'_1, \theta'_2)$ と表す.

幾何学的には, 二つのコンパクト対称三対 $(G, \theta_1, \theta_2) \sim (G, \theta'_1, \theta'_2)$ に対して, それらが定める Hermann 作用は同型となる. G/K_1 内の K_2 軌道の中で主軌道の余次元はコンパクト対称三対の階数とよばれ, $\text{rank}(G, \theta_1, \theta_2)$ で表す. よって, $(G, \theta_1, \theta_2) \sim (G, \theta'_1, \theta'_2)$ ならば $\text{rank}(G, \theta_1, \theta_2) = \text{rank}(G, \theta'_1, \theta'_2)$ が成り立つ. しかし, コンパクト対称三対に付随する量 (例えば, $\theta_1 \theta_2$ の位数) が, 同値な二つのコンパクト対称三対に対して異なることが頻繁に起こる. そのため, それらが定める Hermann 作用の扱いやすさには差が現れることがあり, コンパクト対称三対の同型類の中から扱いやすい代表元を選ぶ必要が出てくる. 本研究ではそのような代表元として標準形を定義する (定義 3.1 を参照). 一方で, コンパクト対称三対 (G, θ_1, θ_2) に対して, 佐武図形概念を拡張した二重佐武図形が導入される (定義 2.3 を参照). G が単純の場合, コンパクト対称三対の局所同型類の分類を二重佐武図形を用いて与える. また, (G, θ_1, θ_2) の標準形に対する階数や位数を二重佐武図形から読み取れる.

以上を踏まえて, 本稿では二重佐武図形を用いたコンパクト対称三対の局所同型類の分類結果 (2 節) およびコンパクト対称三対の標準形の存在とその性質に関する結果 (3 節) について紹介する. 証明などを含めた詳細な議論については [2] を参照のこと.

2 二重佐武図形を用いたコンパクト対称三対の分類

この節では定義 1.1 で定めた同値関係 $\sim$ に関するコンパクト対称三対の局所同型類の分類を与える. その方法として二重佐武図形概念を利用する. この方法はコンパクト対称三対の局所同型類を佐武図形を用いて分類した荒木捷朗氏の方法の拡張となる ([1]).

コンパクト対称三対 (G, θ) の佐武図形とは, G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ が定める Dynkin 図形に對合 θ の情報を付与したものである. (G, θ) の佐武図形を求めるにあたっては, (G, θ) の構造を支持する $\mathfrak{g}$ の極大可換部分 Lie 環 $\mathfrak{t}$ の構成が重要となる. $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}$ で θ に関する $\mathfrak{g}$ の標準分解を表す. ただし, $\mathfrak{k} = \mathfrak{g}^\theta, \mathfrak{m} = \mathfrak{g}^{-\theta}$ である. このとき, $\mathfrak{g}$ の極大可換部分 Lie 環 $\mathfrak{t}$ で $\mathfrak{t} \cap \mathfrak{m}$ が $\mathfrak{m}$ の極大可換部分空間となるものを選ぶ必要がある. この選び方によって, $\mathfrak{t}$ に関する $\mathfrak{g}$ のルート系 Δ は $\sigma := -d\theta|_{\mathfrak{t}}$ の作用に関して不変となる. (G, θ) の佐武図形は σ 基本系とよばれる Δ の基本系が定める Dynkin 図形から得られる. 実際は, Δ 上の σ 作用をもとに, Dynkin 図形において白丸によって表現しているルートを黒丸に置き換えたり, 異なる二つの白丸を矢印で結ぶことで佐武図形が与えられる (具体的なコンパクト対称三対の佐武図形が後述の表 1 などで描かれている).

コンパクト対称三対の二重佐武図形を定義するためには、コンパクト対称三対の構造を支持する $\mathfrak{g}$ の極大可換部分 Lie 環 $\mathfrak{t}$ の構成が重要となる．実際は、次の基本補題にあるように $\mathfrak{t}$ の構成には (G, θ_1, θ_2) の代表元の取り直しが必要となる．

基本補題 2.1 ([2, Proposition 5.4]). (G, θ_1, θ_2) をコンパクト対称三対とする．このとき、コンパクト対称三対 $(G, \tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2) \sim (G, \theta_1, \theta_2)$ と $\mathfrak{g}$ の極大可換部分 Lie 環 $\mathfrak{t}$ で次の条件を満たすものが存在する：

- (1) 各 $i = 1, 2$ について、 $\mathfrak{t} \cap \tilde{\mathfrak{m}}_i \subset \tilde{\mathfrak{m}}_i$ は極大可換部分空間である．特に、 $\mathfrak{t}$ は $\tilde{\theta}_i$ 不変である．
- (2) Δ を $\mathfrak{t}$ に関する $\mathfrak{g}$ のルート系、 $(\Delta, \sigma_1, \sigma_2) = (\Delta, -d\tilde{\theta}_1|_{\mathfrak{t}}, -d\tilde{\theta}_2|_{\mathfrak{t}})$ としたとき、 Δ の基本系で σ_1 基本系かつ σ_2 基本系となるものが存在する．

基本補題 2.1, (1) から $\mathfrak{t} \cap \tilde{\mathfrak{m}}_1$ と $\mathfrak{t} \cap \tilde{\mathfrak{m}}_2$ が可換であることがわかる． θ_1 と θ_2 が非可換のとき、 $\mathfrak{m}_1$ の極大可換部分空間 $\mathfrak{a}_1$ と $\mathfrak{m}_2$ の極大可換部分空間 $\mathfrak{a}_2$ は可換にならないことが起こる． $\mathfrak{a}_1$ と $\mathfrak{a}_2$ が非可換になってしまうと、それらを含む $\mathfrak{g}$ の極大可換部分 Lie 環が存在しないことになる．そこで、代表元 $(G, \tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2) \sim (G, \theta_1, \theta_2)$ を取り直すことで、 $\tilde{\theta}_1$ と $\tilde{\theta}_2$ が非可換であっても基本補題 2.1, (1) を満たす $\mathfrak{t}$ の存在を導びいている．このとき、 $\mathfrak{t}$ 上に $\sigma_i = -d\theta_i|_{\mathfrak{t}}$ 作用が定義される． Δ 上の σ_1 作用と σ_2 作用をそれぞれ佐武図形によって表現する際、共通の Dynkin 図形上に表現できることを保証するため、基本補題 2.1, (2) が必要となる．

定義 2.2. 基本補題 2.1 で述べた $(\Delta, \sigma_1, \sigma_2)$ を $\mathfrak{t}$ に関する $(G, \tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2)$ の二重対合ルート系とよぶ．また、基本補題 2.1, (2) で述べた性質を満たす Δ の基本系を (σ_1, σ_2) 基本系とよぶ．

θ_1 と θ_2 が可換のときは、代表元を選び直さずに (G, θ_1, θ_2) 自身に対して基本補題 2.1 の (1), (2) を満たす極大可換部分 Lie 環 $\mathfrak{t}$ を与えられる．これは擬リーマン対称対の制限ルート系理論に関する Oshima-Sekiguchi の結果 ([13]) を可換なコンパクト対称三対の場合に書き換えることでわかる． (G, θ_1, θ_2) を可換なコンパクト対称三対とする． $\mathfrak{g}$ の (θ_1, θ_2) 同時固有空間分解を

$$\mathfrak{g} = (\mathfrak{k}_1 \cap \mathfrak{k}_2) \oplus (\mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{m}_2) \oplus (\mathfrak{k}_1 \cap \mathfrak{m}_2) \oplus (\mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{k}_2)$$

で表す． $\mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{m}_2$ 内の極大可換部分空間 $\mathfrak{a}$ に対して、 $\mathfrak{a}$ を含む $\mathfrak{m}_i$ ($i = 1, 2$) 内の極大可換部分空間を $\mathfrak{a}_i$ で表す．このとき、 θ_1 と θ_2 の可換性を利用して $[\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2] = \{0\}$ を満たすことが示せる． $\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2$ は $\mathfrak{g}$ の可換部分 Lie 環となるので、 $\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2$ を含む $\mathfrak{g}$ の極大可換部分 Lie 環 $\mathfrak{t}$ は基本補題 2.1 の (1) を満たすことが示される．さらに、[13, (3.8)] と同様な方法によって、 $\mathfrak{t}$ に対して基本補題 2.1 の (2) が成り立つことがわかる．なお、後述の例 2.6, (1) で見るように、この方法は θ_1 と θ_2 が非可換のときには働かないことがわかる．

定義 2.3. コンパクト対称三対 $(G, \tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2)$ と $\mathfrak{g}$ の極大可換部分 Lie 環 $\mathfrak{t}$ は基本補題 2.1 で述べた条件を満たすものとする． Π を Δ の (σ_1, σ_2) 基本系とし、 S_i ($i = 1, 2$) で Π に付随する $(G, \tilde{\theta}_i)$ の佐武図形を表す．このとき、 (S_1, S_2) を Π に付随する $(G, \tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2)$ の二重佐武図形とよぶ．

コンパクト対称三対の同値関係 $\sim$ から二重佐武図形に対して次の同値関係 $\sim$ が自然に導入される。

定義 2.4. (S_1, S_2) と (S'_1, S'_2) を二重佐武図形とする．Dynkin 図形の間の同型写像 $\psi: \Pi \rightarrow \Pi'$ で、各 $i = 1, 2$ について佐武図形 S_i と S'_i の間の同型写像が存在するとき、 $(S_1, S_2) \sim (S'_1, S'_2)$ と定める。

コンパクト対称三対 (G, θ_1, θ_2) に対して、定義 2.3 における二重佐武図形 (S_1, S_2) は同型を除いて $(G, \tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2)$, $\mathfrak{t}$ および Π の選び方に依らないことが確かめられる．さらに、 (G, θ_1, θ_2) の同型類は (S_1, S_2) の同型類を自然に定めることも示される。

二重佐武図形はコンパクト対称三対の理解について新たな視点を与えていることを次の例を通して説明する。

例 2.5. $G = SO(4m)$ とする． $SO(4m)$ 上の対合 θ, θ' を次で定める：

$$\theta(g) = J_{2m} g J_{2m}^{-1}, \quad \theta'(g) = J'_{2m} g J'^{-1}_{2m} \quad (g \in SO(4m))$$

ただし、 $J_{2m}, J'_{2m} \in GL(4m, \mathbb{R})$ は

$$J_{2m} = \begin{pmatrix} O & -E_{2m} \\ E_{2m} & O \end{pmatrix}, \quad J'_{2m} = \begin{pmatrix} E_{4m-1} & O \\ O & -1 \end{pmatrix} J_{2m} \begin{pmatrix} E_{4m-1} & O \\ O & -1 \end{pmatrix}$$

とする．これらの定義より $G^\theta = U(2m) \cong G^{\theta'} =: U(2m)'$ がわかる．

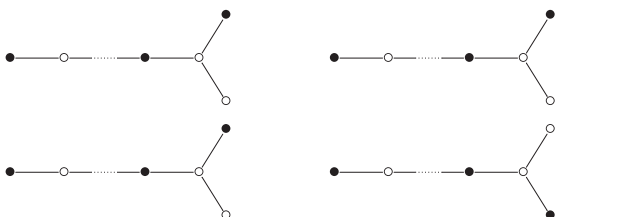
上記の設定のもとで、二つのコンパクト対称三対 $(SO(4m), \theta, \theta)$ と $(SO(4m), \theta, \theta')$ が定まる．特に、 $(SO(4m), \theta, \theta)$ が定める Hermann 作用はイソトロピー作用である．このとき、これらコンパクト対称三対が $\sim$ に関して同型でないことが示される．その理由をいくつかの視点から説明したものが表 1 になる．個々の視点は同値関係 $\sim$ で保たれ、表 1 が示すように $(SO(4m), \theta, \theta)$ と $(SO(4m), \theta, \theta')$ が異なるものを与えているので、これらのコンパクト対称三対は同型でないことがわかる．ここで、対称三対の概念は [8] で導入された．また、イソトロピー作用の軌道が austere ならば全測地的であることも [8] で証明された．

二重佐武図形の視点は他の視点より深くコンパクト対称三対を理解できる．実際、コンパクト対称三対 (G, θ_1, θ_2) で θ_i ($i = 1, 2$) の固定部分群が $U(2m)$ となるものは $(SO(4m), \theta, \theta)$ あるいは $(SO(4m), \theta, \theta')$ に局所的に同型であることが示される．

表 1: $U(2m) \curvearrowright SO(4m)/U(2m)$ と $U(2m)' \curvearrowright M$ の比較

視点	$U(2m) \curvearrowright SO(4m)/U(2m)$	$U(2m)' \curvearrowright SO(4m)/U(2m)$
階数 (余等質性)	m	$m - 1$
軌道の性質	austere 軌道は全測地的	全測地的でない austere 軌道が存在
対称三対 $(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$	$\Sigma \cap W = \emptyset$	$\Sigma \cap W \neq \emptyset$

二重佐武図形



この例のように、二つの任意のコンパクト対称三対 (G, θ_1, θ_2) と $(G, \theta'_1, \theta'_2)$ に対し、各 $i = 1, 2$ について (G, θ_i) と (G, θ'_i) がコンパクト対称対として同型であっても、 (G, θ_1, θ_2) と $(G, \theta'_1, \theta'_2)$ が同型でないことが起こり得る。

例 2.6. $SO(8)$ の普遍被覆群を $Spin(8)$ で表す。 $G = Spin(8)$ 上の二つの対合 θ, θ' はそれぞれ $G^\theta = Spin(3) \cdot Spin(5), G^{\theta'} = Spin(2) \cdot Spin(6)$ を満たすものとする。 $Spin(8)$ 上には triality automorphism とよばれる位数 3 の外部自己同型写像が存在し、これを κ で表す。

(1) 二つのコンパクト対称三対 (G, θ, θ') と $(G, \theta, \kappa\theta'\kappa^{-1})$ の二重佐武図形はそれぞれ表 2 で与えられている。これら二重佐武図形は定義 2.4 の意味で同値でないことがわかる。よって、後述の定理 2.7 から (G, θ, θ') と $(G, \theta, \kappa\theta'\kappa^{-1})$ は同型でないことがわかる。さらに、 $(G, \theta, \kappa\theta'\kappa^{-1})$ は非可換なコンパクト対称三対であることも二重佐武図形を利用して容易にわかる。ここで、 κ は D_4 型の Dynkin 図形の自己同型写像

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \mapsto (\alpha_4, \alpha_2, \alpha_1, \alpha_3)$$

に対応している。 $\sigma_1\sigma_2 \neq \sigma_2\sigma_1$ となることが

$$\sigma_1\sigma_2(\alpha_4) = \sigma_1(\alpha_4) = \alpha_3, \quad \sigma_2\sigma_1(\alpha_4) = \sigma_2(\alpha_3) = -\alpha_3$$

によって示さる。よって、 $(G, \theta, \kappa\theta'\kappa^{-1})$ は非可換である。実際は、 $(G, \theta, \kappa\theta'\kappa^{-1})$ の同型類の中に可換な代表元が存在しないことも導くことができる。

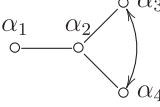
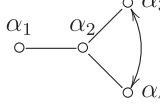
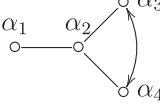
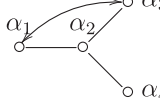
表 2: $(Spin(8), Spin(3) \cdot Spin(5), Spin(2) \cdot Spin(6))$ の二重佐武図形の比較

コンパクト対称三対	二重佐武図形		階数	位数
(G, θ, θ')			2	2
$(G, \theta, \kappa\theta'\kappa^{-1})$			1	4

一方、この例を通して非可換なコンパクト対称三対の二重佐武図形の構成が可換のものよりも困難であることが見れる。コンパクト対称三対 (G, θ_1, θ_2) が可換であるときは [13, Lemma 2.8] と同様にして、ルート $\alpha \in \Delta$ に対して、 $\langle \alpha, \mathfrak{a} \rangle = \{0\}$ ならば $\langle \alpha, \mathfrak{a}_i \rangle = \{0\}$ となる $i \in \{1, 2\}$ が存在することを示せる。この事実は (G, θ_1, θ_2) に付随する二重対合ルート系 $(\Delta, \sigma_1, \sigma_2)$ に (σ_1, σ_2) 基本系を構成するために必要となる。しかし、このような事実は θ_1 と θ_2 が可換でないときは一般に成り立たないことがわかる ($(G, \theta, \kappa\theta'\kappa^{-1})$ の二重佐武図形における α_4 がその反例である)。そのため、基本補題 2.1, (2) の証明では、(1) の条件を保ったままコンパクト対称三対 (G, θ_1, θ_2) の代表元を取り直すことで (σ_1, σ_2) 基本系の存在を示している。

(2) 二つのコンパクト対称三対 (G, θ, θ) と $(G, \theta, \kappa\theta\kappa^{-1})$ は同値でないことが二重佐武図形 (表 3) の違いからわかる. さらに, $(G, \theta, \kappa\theta\kappa^{-1})$ の二重佐武図形を利用して $\sigma_1\sigma_2(\alpha_3) = \alpha_1 \neq \alpha_3 = \sigma_2\sigma_1(\alpha_3)$ がわかるので, $(G, \theta, \kappa\theta\kappa^{-1})$ は非可換なコンパクト対称三対である.

表 3: $(Spin(8), Spin(3) \cdot Spin(5), Spin(3) \cdot Spin(5))$ の二重佐武図形の比較

コンパクト対称三対	二重佐武図形		階数	位数
(G, θ, θ)			3	1
$(G, \theta, \kappa\theta\kappa^{-1})$			2	3

コンパクト対称三対を二重佐武図形を用いて分類するために必要な定理を与える. (G, θ_1, θ_2) と $(G, \theta'_1, \theta'_2)$ をコンパクト対称三対とする. (G, θ_1, θ_2) と $(G, \theta'_1, \theta'_2)$ はそれぞれ基本補題 2.1 の条件を満たす $\mathfrak{g}$ の極大可換部分 Lie 環をもつとして一般性を失わない. このとき, (G, θ_1, θ_2) と $(G, \theta'_1, \theta'_2)$ の二重対合ルート系をそれぞれ $(\Delta, \sigma_1, \sigma_2)$ と $(\Delta', \sigma'_1, \sigma'_2)$ で表す. また, (G, θ_1, θ_2) と $(G, \theta'_1, \theta'_2)$ の二重佐武図形をそれぞれ (S_1, S_2) と (S'_1, S'_2) で表す.

定理 2.7 ([2, Theorem 5.11]). 上記の設定のもとで, 次は互いに同値である:

- (1) (G, θ_1, θ_2) と $(G, \theta'_1, \theta'_2)$ は局所的に同型, すなわち, $\mathfrak{g}$ の自己同型写像 φ と内部自己同型写像 τ で $d\theta'_1 = \varphi d\theta_1 \varphi^{-1}$ および $d\theta'_2 = \tau \varphi d\theta_2 \varphi^{-1} \tau^{-1}$ を満たすものが存在する.
- (2) $(\Delta, \sigma_1, \sigma_2) \equiv (\Delta', \sigma'_1, \sigma'_2)$, すなわち, ルート系の同型写像 $\varphi: \Delta \rightarrow \Delta'$ で $\sigma'_i = \varphi \sigma_i \varphi^{-1}$ ($i = 1, 2$) を満たすものが存在する.
- (3) $(S_1, S_2) \sim (S'_1, S'_2)$

この定理によってコンパクト対称三対の局所的な分類は二重佐武図形の分類に帰着される. 後者の分類はコンパクト対称三対の局所同型類の分類 (= 佐武図形の分類) と Dynkin 図形の自己同型群から導びける. 表 4 にコンパクト対称三対 (Lie 環表示) の分類表を与える. ただし, θ_1 と θ_2 が内部自己同型で移り合うとき (これを $\theta_1 \sim \theta_2$ で表す), $(G, \theta_1, \theta_2) \sim (G, \theta_1, \theta_1)$ となる. これはコンパクト対称三対の分類に帰着されるので, 表 4 から除外している. また, 後述のコンパクト対称三対の標準形概念を用いると (G, θ_1, θ_2) の同型類の階数と位数を決定できる. それらの値も表 4 に記載している.

半単純コンパクト連結 Lie 群 G を固定したとき, コンパクト対称三対 (G, θ) の局所同型類はその固定部分群 G^θ の Lie 環から決まることが知られている ([7]). 一方, コンパクト対称三対で同様な結果は次の二つの例外を除いて成立することが分類結果から導かれる:

- (i) 例 2.5 で与えた $(SO(4m), U(2m), U(2m))$ と $(SO(4m), U(2m), U(2m)')$.
- (ii) κ を $Spin(8)$ の triality automorphism としたとき, $(Spin(8), Spin(a) \cdot Spin(8-a), Spin(c) \cdot Spin(8-c))$ と $(Spin(8), Spin(a) \cdot Spin(8-a), \kappa(Spin(c) \cdot Spin(8-c)))$.

表 4: コンパクト対称三対の分類とそれらの階数と位数 ($\theta_1 \not\sim \theta_2$ の場合)

$(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{\theta_1}, \mathfrak{g}^{\theta_2})$	階数	位数	注意
$(\mathfrak{su}(2m), \mathfrak{so}(2m), \mathfrak{sp}(m))$	$m-1$	2	
$(\mathfrak{su}(n), \mathfrak{so}(n), \mathfrak{s}(\mathfrak{u}(a) \oplus \mathfrak{u}(b)))$	a	2	$n \geq 2a$
$(\mathfrak{su}(2m), \mathfrak{sp}(m), \mathfrak{s}(\mathfrak{u}(a) \oplus \mathfrak{u}(b)))$	$\begin{bmatrix} a \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{cases} 4 & (a: \text{odd}, m > a), \\ 2 & (\text{otherwise}) \end{cases}$	$m \geq a$
$(\mathfrak{su}(n), \mathfrak{s}(\mathfrak{u}(a) \oplus \mathfrak{u}(b)), \mathfrak{s}(\mathfrak{u}(c) \oplus \mathfrak{u}(d)))$	a	2	$a < c \leq d < b$
$(\mathfrak{so}(n), \mathfrak{so}(a) \oplus \mathfrak{so}(b), \mathfrak{so}(c) \oplus \mathfrak{so}(d))$	a	2	$a < c \leq d < b$
$(\mathfrak{so}(8), \mathfrak{so}(a) \oplus \mathfrak{so}(b), \kappa(\mathfrak{so}(c) \oplus \mathfrak{so}(d)))$	$\begin{cases} 0 & ((a, c) = (1, \{1, 2, 3\})), \\ 1 & ((a, c) = (2, \{2, 3\})), \\ 2 & ((a, c) = (3, 3)) \end{cases}$	$\begin{cases} 2 & ((a, c) = (2, 2)), \\ 3 & ((a, c) = (1, 1), (3, 3)), \\ 4 & ((a, c) = (1, 2), (2, 3)), \\ 6 & ((a, c) = (1, 3)) \end{cases}$	
$(\mathfrak{so}(2m), \mathfrak{so}(a) \oplus \mathfrak{so}(b), \mathfrak{u}(m))$	$\begin{bmatrix} a \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{cases} 4 & (a: \text{odd}, m > a), \\ 2 & (\text{otherwise}) \end{cases}$	$m \geq a$
$(\mathfrak{so}(4m), \mathfrak{u}(2m), \mathfrak{u}(2m)')$	$m-1$	2	
$(\mathfrak{sp}(n), \mathfrak{u}(n), \mathfrak{sp}(a) \oplus \mathfrak{sp}(b))$	a	2	$n \geq 2a$
$(\mathfrak{sp}(n), \mathfrak{sp}(a) \oplus \mathfrak{sp}(b), \mathfrak{sp}(c) \oplus \mathfrak{sp}(d))$	a	2	$a < c \leq d < b$
$(\mathfrak{e}_6, \mathfrak{sp}(4), \mathfrak{su}(6) \oplus \mathfrak{su}(2))$	4	2	
$(\mathfrak{e}_6, \mathfrak{sp}(4), \mathfrak{so}(10) \oplus \mathfrak{so}(2))$	2	2	
$(\mathfrak{e}_6, \mathfrak{sp}(4), \mathfrak{f}_4)$	2	2	
$(\mathfrak{e}_6, \mathfrak{su}(6) \oplus \mathfrak{su}(2), \mathfrak{so}(10) \oplus \mathfrak{so}(2))$	2	2	
$(\mathfrak{e}_6, \mathfrak{su}(6) \oplus \mathfrak{su}(2), \mathfrak{f}_4)$	1	2	
$(\mathfrak{e}_6, \mathfrak{so}(10) \oplus \mathfrak{so}(2), \mathfrak{f}_4)$	1	2	
$(\mathfrak{e}_7, \mathfrak{su}(8), \mathfrak{so}(12) \oplus \mathfrak{su}(2))$	4	2	
$(\mathfrak{e}_7, \mathfrak{su}(8), \mathfrak{e}_6 \oplus \mathfrak{so}(2))$	3	2	
$(\mathfrak{e}_7, \mathfrak{so}(12) \oplus \mathfrak{su}(2), \mathfrak{e}_6 \oplus \mathfrak{so}(2))$	2	2	
$(\mathfrak{e}_8, \mathfrak{so}(16), \mathfrak{e}_7 \oplus \mathfrak{su}(2))$	4	2	
$(\mathfrak{f}_4, \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{sp}(3), \mathfrak{so}(9))$	1	2	

3 コンパクト対称三対の標準形

コンパクト対称三対 (G, θ_1, θ_2) の同型類を $[(G, \theta_1, \theta_2)]$ で表す.

定義 3.1. コンパクト対称三対 $(G, \tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2)$ が $[(G, \theta_1, \theta_2)]$ において標準形であるとは, 次の条件を満たす $\mathfrak{g}$ の極大可換部分 Lie 環 $\mathfrak{t}$ が存在するときをいう:

(1) $(G, \tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2)$ および $\mathfrak{t}$ は基本補題 2.1 の条件 (1), (2) を満たす.

(2) $\text{ord}(\tilde{\theta}_1 \tilde{\theta}_2) = \text{ord}(d\tilde{\theta}_1 d\tilde{\theta}_2|_{\mathfrak{t}}) (= \text{ord}(\sigma_1 \sigma_2) < +\infty)$ である.

このとき, $\mathfrak{t}$ は (G, θ_1, θ_2) に関して標準的であるという.

上記の定義において, 条件 (1) は $(G, \tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2)$ の二重佐武図形が書けるためのものであり, 二重佐武図形から $\sigma_i = -d\tilde{\theta}_i|_{\mathfrak{t}}$ が復元できた. 特に, $\text{ord}(d\tilde{\theta}_1 d\tilde{\theta}_2|_{\mathfrak{t}})$ の値がわかる. よって, 条件 (2) よりこの値が $(G, \tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2)$ の位数である.

例 3.2. (1) G の対合 θ に対して, (G, θ, θ) が標準形であるように. 標準的な極大可換部分 Lie 環を取れる. (2) $\theta_1 \not\sim \theta_2$ であるような可換なコンパクト対称三対 (G, θ_1, θ_2) は標準形である. 実際に, 定義 2.2 の下で説明したような極大可換部分 Lie 環は標準的である.

定理 3.3 ([2, Theorem 6.6]). G を単純とする. 任意のコンパクト対称三対 (G, θ_1, θ_2) に対して, その同型類 $[(G, \theta_1, \theta_2)]$ には標準形が存在する.

ここで, $\sim$ よりも強い次の同値関係 $\equiv$ の定義を復習する.

定義 3.4. 二つのコンパクト対称三対 (G, θ_1, θ_2) と $(G, \theta'_1, \theta'_2)$ に対して $\varphi \in \text{Aut}(G)$ で $\theta'_i = \varphi \theta_i \varphi^{-1}$ ($i = 1, 2$) を満たすものが存在するとき, $(G, \theta_1, \theta_2) \equiv (G, \theta'_1, \theta'_2)$ と定める. Lie 環版のコンパクト対称三対に対しても同様に同値関係 $\equiv$ を定義できる. このとき, 同値な二つのコンパクト対称三対に対して, $\mathfrak{k}_1 \cap \mathfrak{k}_2$ と $\mathfrak{k}'_1 \cap \mathfrak{k}'_2$ は同型となる.

$[(G, \theta_1, \theta_2)]$ における二つの標準形は $\sim$ に関して同値であるが, 必ずしも $\equiv$ に関して同値でないときがあることに注意する. 次の例で実際にそのようなコンパクト対称三対を与える.

例 3.5. $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(4m)$ とし, 二つの可換なコンパクト対称三対 $(\mathfrak{g}, \theta_1, \theta_2)$ と $(\mathfrak{g}, \theta_1, \theta'_2)$ を次で定める:

$$\theta_1(Z) = \bar{Z}, \quad \theta_2(Z) = E_{2m, 2m} Z E_{2m, 2m} \quad (Z \in \mathfrak{g}), \quad \theta'_2 = \text{Ad}(g) \theta_2 \text{Ad}(g)^{-1}$$

ただし,

$$E_{2m, 2m} = \begin{pmatrix} E_{2m} & O \\ O & -E_{2m} \end{pmatrix}, \quad g = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} E_{2m} & \sqrt{-1} E_{2m} \\ \sqrt{-1} E_{2m} & E_{2m} \end{pmatrix} \in SU(4m)$$

このとき, $\mathfrak{k}_1 = \mathfrak{so}(4m)$, $\mathfrak{k}_2 = \mathfrak{s}(\mathfrak{u}(2m) \oplus \mathfrak{u}(2m)) \cong \mathfrak{k}'_2$ である. θ'_2 の定義から直ちに $(\mathfrak{g}, \theta_1, \theta_2) \sim (\mathfrak{g}, \theta_1, \theta'_2)$ がわかる. また, これらが標準形であることは可換性から確かめられる. 一方で, $(\mathfrak{g}, \theta_1, \theta_2) \not\equiv (\mathfrak{g}, \theta_1, \theta'_2)$ であることが, 次の部分 Lie 環の計算結果から従う:

$$\mathfrak{k}_1 \cap \mathfrak{k}_2 = \mathfrak{so}(2m) \oplus \mathfrak{so}(2m) \not\cong \mathfrak{u}(2m) = \mathfrak{k}_1 \cap \mathfrak{k}'_2$$

この例のように標準形の一意性は一般には成り立たないが、標準形を定義する条件を強めて一意性が成り立つようにできる。しかし、少なくとも θ_1 と θ_2 が可換な場合の考察を踏まえるとその必要性は無いと考えている。

コンパクト対称三対の標準形の性質として次の定理が示される。

定理 3.6 ([2, Theorem 6.11]). G を単純とする。コンパクト対称三対 (G, θ_1, θ_2) はその同型類において標準形とし、 $\mathfrak{g}$ の極大可換部分 Lie 環 $\mathfrak{t}$ は (G, θ_1, θ_2) に関して標準的であるとすると、このとき、次が成り立つ：

- (1) $\mathfrak{t} \cap (\mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{m}_2) =: \mathfrak{a}$ は $\mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{m}_2$ の極大可換部分空間となる。
- (2) (G, θ_1, θ_2) の位数はその同型類の中で最小値をとる。特に、その値は有限である。

標準的な極大可換部分 Lie 環 $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{g}$ は定義より、 $\exp(\mathfrak{t}) \subset G$ と $\pi_i(\exp(\mathfrak{t} \cap \mathfrak{m}_i)) \subset G/K_i$ はそれぞれ G の随伴表現と G/K_i のイソトロピー作用の切断となっている。ただし、 $\pi_i : G \rightarrow G/K_i$ は自然な射影とする。さらに、定理 3.6, (1) が述べていることは $\pi_1(\exp(\mathfrak{a})) \subset G/K_1$ は Hermann 作用 $K_2 \curvearrowright G/K_1$ の切断でもあることを意味する。

一方、定理 3.6, (2) を用いてコンパクト対称三対の分類結果から各同型類の可換化可能なコンパクト対称三対の同型類を分類できる。実際、標準形が可換であればその同型類は可換化可能である。さらに、この逆が定理 3.6, (2) によって成り立つ。よって、表 4 の位数の欄を確かめることで可換化可能なコンパクト対称三対の同型類の分類が得られる。特に、 G が例外型の場合、すべての同型類 $[(G, \theta_1, \theta_2)]$ は可換化可能である。

定理 3.6, (2) の証明は位数に関する次の命題を利用する。

命題 3.7 ([2, Proposition 2.4]). 二つのコンパクト対称三対 $(G, \theta_1, \theta_2) \sim (G, \theta'_1, \theta'_2)$ に対して、 $(\theta_1 \theta_2)^n = \text{id} = (\theta'_1 \theta'_2)^{n+1}$ となる自然数 n が存在したとき、 $\theta_1 \sim \theta_2$ が成り立つ。よって、 $\theta'_1 \sim \theta'_2$ でもある。

展望と課題. 本稿では二重佐武図形を用いた同値関係 $\sim$ に関するコンパクト対称三対の分類と標準形の存在について説明した。また、標準形の性質からコンパクト対称三対の各同型類の可換化可能性について明らかにした。これらの結果は Hermann 作用の幾何学の研究や、図 1 に示した対称空間論における種々の分類問題の解明に役に立つ。強い同値関係 $\equiv$ に関するコンパクト対称三対の分類については可換な場合は分類が完了している ([3])。ここで、 $\equiv$ の幾何学的な意味はコンパクト対称空間内の鏡映部分多様体の研究に見いだせる。

可換なコンパクト対称三対と擬リーマン対称対の間には類似性が見られる。実際、著者は井川治氏（京都工芸繊維大学）と笹木集夢氏（東海大学）との共同研究 ([4]) において、可換なコンパクト対称対と擬リーマン対称対の間には一般化された双対性とよばれる Cartan の双対性を一般化した関係が成立することを示している。また、 $\equiv$ に関する可換なコンパクト対称三対の分類の応用として一般化された双対性を用いた Berger による擬 Riemann 対称対の分類の別証明がある ([5])。歴史的には、Leung ([10], [11]) によって擬リーマン対称対の分類からコンパクト対称空間内の鏡映部分多様体の分類が得られた。我々の方法はコンパクト対称三対の枠組みで Leung の別証明が与えられ

ることを示している．一方， $\equiv$ に関する非可換なコンパクト対称三対の分類は現在研究中の課題である．

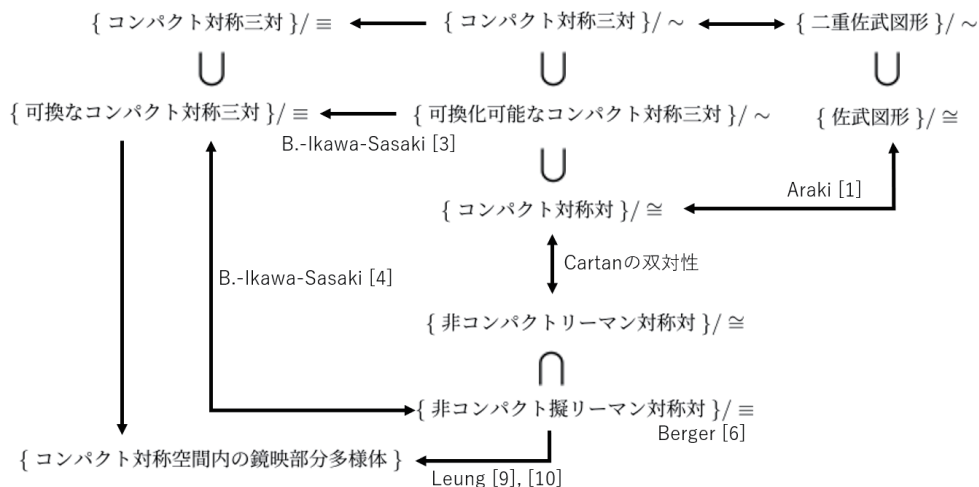


図 1: 対称空間論における種々の分類問題

参考文献

- [1] S. Araki, *On root systems and an infinitesimal classification of irreducible symmetric spaces*, J. Math. Osaka City Univ., **13** (1962), 1–34.
- [2] K. Baba, O. Ikawa, *Double Satake diagrams and canonical forms in compact symmetric triads*, arXiv:2205.08410v1.
- [3] K. Baba, O. Ikawa and A. Sasaki, *A Duality Between Compact Symmetric Triads and Semisimple Pseudo-Riemannian Symmetric Pairs with Applications to Geometry of Hermann Type Actions*, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics book series, HermitianGrassmannian Submanifolds, 2017.
- [4] K. Baba, O. Ikawa and A. Sasaki, *A duality between non-compact semisimple symmetric pairs and commutative compact semisimple symmetric triads and its general theory*, Diff. Geom. and its Applications **76** (2021), 101751.
- [5] K. Baba, O. Ikawa and A. Sasaki, *An alternative proof for Berger’s classification of semisimple pseudo-Riemannian symmetric pairs from the view point of compact symmetric triads*, in preparation.
- [6] M. Berger, *Les espaces symmetriques noncompacts*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., **74** (1957), 85–177.

- [7] S. Helgason, *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces*, Academic Press, 1978.
- [8] O. Ikawa, *The geometry of symmetric triad and orbit spaces of Hermann actions*, J. Math. Soc. Japan, **63**, (2011), 79–136.
- [9] A. Kollross, *A classification of hyperpolar and cohomogeneity one actions*, Trans. Amer. Math. Soc., **354**, (2001), 571–612.
- [10] D. S. P. Leung, *On the classification of reflective submanifolds of Riemannian symmetric spaces*, Indiana Univ. Math. J. **24** (1974) 327–339.
- [11] D. S. P. Leung, *Errata: On the classification of reflective submanifolds of Riemannian symmetric spaces*, Indiana Univ. Math. J. **24** (1975) 1199.
- [12] T. Matsuki, *Classification of two involutions on semisimple compact Lie groups and root systems*, J. Lie Theory, **12** (2002), 41–68.
- [13] T. Oshima and J. Sekiguchi, *The Restricted Root System of a Semisimple Symmetric Pair*, Advanced studies in Pure Mathematics **4** (1984), 433–487.