

On the Opdam-Cherednik transform associated with a type BC root system

拓殖大学 工学部 織田 寛

Hiroshi Oda

Faculty of Engineering, Takushoku University

1 超幾何関数と Opdam-Cherednik 変換

$\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}^*$ をユークリッド空間とし, $\mathcal{R}$ を $\mathfrak{a}^*$ 内の結晶的ルート系とする. $\mathcal{R}$ の Weyl 群を W とする. Heckman と Opdam が [4] で導入した $\mathcal{R}$ に付随した超幾何関数を $F(\lambda, \mathbf{k}; x)$ と記す. これは, スペクトルパラメータ $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ ($\mathfrak{a}^*$ の複素化), “重複度関数” $\mathbf{k} \in (\mathbb{C}^{\mathcal{R}})^W$ (W 不変な写像 $\mathcal{R} \rightarrow \mathbb{C}$), および空間変数 $x \in \mathfrak{a}$ の関数である. $\mathcal{K} = (\mathbb{R}^{\mathcal{R}})^W$, $\mathcal{K}_{\mathbb{C}} = (\mathbb{C}^{\mathcal{R}})^W$ とする. 以下に詳しく述べるように, $F(\lambda, \mathbf{k}; x)$ は Riemann 対称空間上の球関数の一般化になっている.

制限ルート系が $2\mathcal{R}$ と同型な非コンパクト型の連結実半単純 Lie 群 $G = KAN$ (右辺は岩澤分解) があるとき, Riemann 対称空間 G/K 上のスペクトル $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ ($\mathfrak{a} = \text{Lie } A$ とする) に対する球関数の $AK/K \simeq A \simeq \mathfrak{a}$ への制限は, λ とルート重複度 $m_{2\alpha}$ ($\alpha \in \mathcal{R}$) のみで決まる $\mathfrak{a}$ 上の微分方程式系により特徴付けられる. より詳しくは

1. $\mathfrak{a}$ 上解析的
2. W 不変
3. $0 \in \mathfrak{a}$ での値が 1

を満たす唯一の解になっている. この微分方程式系は一般の重複度関数 $\mathbf{k} \in \mathcal{K}_{\mathbb{C}}$ に対するもの $\mathcal{M}_{\lambda, \mathbf{k}}$ に自然に拡張され (ただし, もとの微分方程式系は $\mathbf{k}_{\alpha} = m_{2\alpha}/2$ に対するもの), “超幾何微分方程式系” と呼ばれる. すべての $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ に対して超幾何微分方程式系 $\mathcal{M}_{\lambda, \mathbf{k}}$ の 1~3 を満たす解が存在するような $\mathbf{k} \in \mathcal{K}_{\mathbb{C}}$ 全体を $\mathcal{K}_{\mathbb{C}, \text{reg}}$ とする. ($\mathcal{K}_{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{K}_{\mathbb{C}, \text{reg}}$ は解析的部分集合になる.) $F(\lambda, \mathbf{k}; x)$ はその場合の唯一の解で, $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$,

$\mathbf{k} \in \mathcal{K}_{\mathbb{C}, \text{reg}}$ について正則, $x \in \mathfrak{a}$ について実解析的になる. また, λ, x のそれぞれについて W 不変になる.

$L^2(G/K)$ の既約分解は球変換 $C_0^\infty(K \backslash G/K) \rightarrow \mathcal{O}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*)^W$ から得られるが (C_0^∞ はコンパクト台の C^∞ 球関数), 球変換は制限写像による同型 $C^\infty(K \backslash G/K) \simeq C_0^\infty(\mathfrak{a})^W$ により $C_0^\infty(\mathfrak{a})^W \rightarrow \mathcal{O}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*)^W$ という形に書くことができる. これを一般の $\mathbf{k}$ に自然に拡張したものが, 以下に見る “超幾何 Fourier 変換” である.

正ルート系 $\mathcal{R}^+ \subset \mathcal{R}$ を固定する. W 不変な重み関数

$$\delta_{\mathbf{k}}(x) = \prod_{\alpha \in \mathcal{R}^+} |e^{\frac{1}{2}\alpha(x)} - e^{-\frac{1}{2}\alpha(x)}|^{2k_\alpha}$$

が $\mathfrak{a}$ 上の Lebesgue 測度 dx に対して局所可積分であるような $\mathbf{k} \in \mathcal{K}$ 全体を $\mathcal{K}_1$ と記す. $\mathcal{K}_1 \subset \mathcal{K}_{\mathbb{C}, \text{reg}} \cap \mathcal{K}$ が知られている. $\mathbf{k} \in \mathcal{K}_1$ のとき, $f \in C_0^\infty(\mathfrak{a})^W$ の超幾何 Fourier 変換を

$$(1.1) \quad \mathcal{F}_{\mathbf{k}} f(\lambda) = \frac{1}{|W|} \int_{\mathfrak{a}} f(x) F(\lambda, \mathbf{k}; -x) \delta_{\mathbf{k}}(x) dx$$

と定める. 明らかに $\mathcal{F}_{\mathbf{k}} f \in \mathcal{O}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*)^W$ である. 超幾何 Fourier 変換 $\mathcal{F}_{\mathbf{k}} : C_0^\infty(\mathfrak{a})^W \rightarrow \mathcal{O}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*)^W$ は, Opdam により [10] で導入された. 実は, Opdam が [10] で主に考察したのは, W 不変性を取り除いたより一般的な “Cherednik 変換” であり, $\mathcal{F}_{\mathbf{k}}$ はその $C_0^\infty(\mathfrak{a})^W$ への制限として得られる. Cherednik は [3] で, Cherednik 変換を等価で簡単な以下のような形に再定式化した.

$$(1.2) \quad \mathcal{H}_{\mathbf{k}} f(\lambda) = \frac{1}{|W|} \int_{\mathfrak{a}} f(x) G(\lambda, \mathbf{k}; -x) \delta_{\mathbf{k}}(x) dx.$$

ここで, $G(\lambda, \mathbf{k}; x)$ は [10] で導入された “非対称超幾何関数” であり (実半単純 Lie 群 G とは関係ない), $f(x) \in C_0^\infty(\mathfrak{a})$ は W 不変でなくてよい. $G(\lambda, \mathbf{k}; x)$ は, 定義については命題 3.3 で述べるが, $F(\lambda, \mathbf{k}; x)$ と同様に $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^* \times \mathcal{K}_{\mathbb{C}, \text{reg}} \times \mathfrak{a}$ 上の関数で, $\lambda, \mathbf{k}$ について正則, x について実解析的になるので, $\mathcal{H}_{\mathbf{k}} f \in \mathcal{O}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*)$ となる. また,

$$(1.3) \quad F(\lambda, \mathbf{k}; x) = \frac{1}{|W|} \sum_{w \in W} G(\lambda, \mathbf{k}; wx)$$

であるので, $\mathcal{F}_{\mathbf{k}} : C_0^\infty(\mathfrak{a})^W \rightarrow \mathcal{O}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*)^W$ は $\mathcal{H}_{\mathbf{k}} : C_0^\infty(\mathfrak{a}) \rightarrow \mathcal{O}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*)$ の制限になっている. Cherednik は $\mathcal{H}_{\mathbf{k}}$ を “Opdam 変換” と呼んだが, 我々は “Opdam-Cherednik 変換” と呼

ぶことにする. $G(\lambda, \mathbf{k}; x)$ は $\mathcal{R}^+$ の取り方に依存するので, $\mathcal{H}_{\mathbf{k}}$ もそうである. $\mathbf{k} = \mathbf{0}$ のときは $G(\lambda, \mathbf{0}; x) = e^{\lambda(x)}$, $\delta_{\mathbf{0}}(x) = 1$ となるので, $G(\lambda, \mathbf{k}; x)$ は指数関数の一般化, $\mathcal{H}_{\mathbf{k}}$ は古典的な Fourier 変換の一般化になっている.

2 考えるべき問題と既知の結果

$\mathcal{K}_+ = \{\mathbf{k} \in \mathcal{K} \mid \mathbf{k}_{\alpha} > 0 \ (\alpha \in \mathcal{R})\}$ とすると, $\mathcal{K}_+ \subset \mathcal{K}_1$ である. Opdam は [10] で $\mathbf{k} \in \mathcal{K}_+$ のときに以下を与えた.

(P1) **Paley-Wiener の定理**: $\mathcal{H}_{\mathbf{k}}$ が $C_0^\infty(\mathfrak{a})$ から古典的な Paley-Wiener 空間

$$\mathcal{PW}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*) = \left\{ \phi \in \mathcal{O}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*) \mid \exists B > 0 \forall n \in \mathbb{N} \sup_{\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*} (1 + \|\lambda\|)^n e^{-B\|\operatorname{Re} \lambda\|} |\phi(\lambda)| < +\infty \right\}.$$

への全単射であることの証明. ($\mathcal{PW}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*)$ は $\mathbf{k}$ に依らず一定なことに注意.)

(P2) **Plancherel の定理**: $C_0^\infty(\mathfrak{a}) \subset L^2(\mathfrak{a}, |W|^{-1} \delta_{\mathbf{k}}(x) dx)$ の前ヒルベルト空間の構造 (内積) と $\mathcal{H}_{\mathbf{k}}$ によって対応する $\mathcal{PW}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*)$ の前ヒルベルト空間の構造. (よって $\mathcal{H}_{\mathbf{k}}$ は自然な L^2 空間の間の対応に拡張される.)

(P3) **逆変換公式**: 逆変換 $\mathcal{H}_{\mathbf{k}}^{-1} : \mathcal{PW}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*) \rightarrow C_0^\infty(\mathfrak{a})$ の明示公式. (いくつかのバージョンがあるが, 特に $\phi(\lambda)G(\lambda, \mathbf{k}; x)$ を $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ 上のある測度で積分するもの.)

(P2) の内積 $\langle \phi, \psi \rangle$ は $\phi, \psi \in \mathcal{PW}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*)$ の $\sqrt{-1}\mathfrak{a}^*$ 上の値のみで定義され, (P3) の逆変換公式は, $\phi(\lambda)G(\lambda, \mathbf{k}; x)$ を $\sqrt{-1}\mathfrak{a}^*$ 上のある測度で積分するものになっていることを補足しておく.

これらの結果は, $\mathbf{k}$ が $\mathcal{K}_+$ の閉包 $\operatorname{Cl}(\mathcal{K}_+) = \{\mathbf{k} \in \mathcal{K} \mid \mathbf{k}_{\alpha} \leq 0 \ (\alpha \in \mathcal{R})\}$ に属する場合に容易に拡張される. 考えるべき問題は, $\mathbf{k} \in \mathcal{K}_1 \setminus \operatorname{Cl}(\mathcal{K}_+)$ のときに同様の結果を拡張することであるが, 部分的に以下が知られている. いずれも $\mathcal{H}_{\mathbf{k}}$ に対するものではなく, $\mathcal{F}_{\mathbf{k}}$ に対するものであり, $C_0^\infty(\mathfrak{a})$ や $\mathcal{PW}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*)$ は $C_0^\infty(\mathfrak{a})^W$ や $\mathcal{PW}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*)^W$ とする必要がある.

(拡張 1) $\mathcal{R}$ は既約かつ被約 (つまり BC 型でない) とする. また, $\mathbf{k} \in (-\mathcal{K}_+) \cap \mathcal{K}_1$ とする ($\mathbf{k}$ が正の値も負の値も取る場合は含まれないことに注意). このとき, $\mathcal{F}_{\mathbf{k}}$ に対する (P1)~(P3) が [11] で与えられたが, $\mathbf{k}$ によっては (P2) や (P3) に $\sqrt{-1}\mathfrak{a}^*$ 以外の低次元スペクトルが本質的に関わってくる.

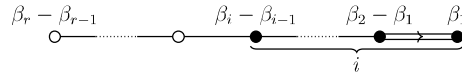
(拡張 2) 次に, $\mathcal{R}$ は既約で BC_r 型とする. $\mathbf{k} \in \mathcal{K}$ は長いルート上での値 $\mathbf{k}_l$, 中間

の長さのルート上での値 $\mathbf{k}_m$, 短いルート上での値 $\mathbf{k}_s$ で決まるが, これらについて

$$(2.1) \quad \mathbf{k}_s + \mathbf{k}_\ell > -\frac{1}{2} \quad \text{かつ} \quad \mathbf{k}_m \geq 0.$$

を仮定する. ((2.1) は「 $\mathbf{k}_m \geq 0$ かつ $\mathbf{k} \in \mathcal{K}_+$ 」と同値である.) このとき, $\mathcal{F}_k$ に対する (P1)~(P3) が [7] で与えられた.

(P2), (P3) をより具体的に述べるためにいくつか記号を用意する. $\mathfrak{a}^*$ の直交基底 $\{\beta_1, \dots, \beta_r\}$ を $\mathcal{R}^+$ に対応する単純ルート系が $\mathcal{B} = \{\beta_r - \beta_{r-1}, \dots, \beta_2 - \beta_1, \beta_1\}$ となるように取る. 各 $i = 0, \dots, r$ に対して, $\Theta_i \subset \mathcal{B}$ を Dynkin 図式



の黒ノードからなる部分集合とし,

$$\mathfrak{a}(\Theta_i)^* = \mathbb{R}\Theta_i = \mathbb{R}\beta_1 + \dots + \mathbb{R}\beta_i,$$

$$\mathfrak{a}_{\Theta_i}^* = \{\lambda \in \mathfrak{a}^* \mid \lambda(\alpha^\vee) = 0 \ (\alpha \in \Theta_i)\} = \mathbb{R}\beta_{i+1} + \dots + \mathbb{R}\beta_r$$

と置く. $\mathfrak{a}^*$ 上の座標関数 $\lambda_j = \beta_j^\vee$ を用いてそれぞれの空間の要素を座標 $(\lambda_1, \dots, \lambda_i)$, $(\lambda_{i+1}, \dots, \lambda_r)$ で表したりする. $\mathfrak{a}(\Theta_i)^*$ の有限部分集合 $D_k(\Theta_i)$ を, $i > 0$ のときは

$$(2.2) \quad D_k(\Theta_i) = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_i) \mid \lambda_1 + |\mathbf{k}_l - \frac{1}{2}| - \mathbf{k}_s - \mathbf{k}_l - \frac{1}{2} \in 2\mathbb{N}, \lambda_i < 0, \\ \lambda_{j+1} - \lambda_j - 2\mathbf{k}_m \in 2\mathbb{N} \ (1 \leq j \leq i-1)\}$$

で ($\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$), $i = 0$ のときは $D_k(\Theta_0) = D_k(\emptyset) = \{0\} = \mathfrak{a}(\emptyset)^*$ で定める.

[7] で明示的に定義された $D_k(\Theta_i) + \sqrt{-1}\mathfrak{a}_{\Theta_i}^*$ 上の正值測度 ν_{k, Θ_i} を用いると, $\mathcal{F}_k$ に対する (P2), (P3) はそれぞれ

$$(2.3) \quad \langle \phi, \psi \rangle = \sum_{i=0}^r \int_{D_k(\Theta_i) + \sqrt{-1}\mathfrak{a}_{\Theta_i}^*} \phi(\lambda) \overline{\psi(\lambda)} d\nu_{k, \Theta_i}(\lambda),$$

$$(2.4) \quad \mathcal{F}_k^{-1}\phi(x) = \sum_{i=0}^r \int_{D_k(\Theta_i) + \sqrt{-1}\mathfrak{a}_{\Theta_i}^*} \phi(\lambda) F(\lambda, \mathbf{k}; x) d\nu_{k, \Theta_i}(\lambda)$$

となる.

本稿では [9] で得られた新しい結果として, $\mathcal{H}_k$ に対する (P1) が **(拡張 1)** や **(拡張 2)** の設定で成り立つこと (定理 4.1), $\mathcal{H}_k$ に対する (P2), (P3) が **(拡張 2)** の設定 (ただし $\mathbf{k}_m \neq 0$ とする) で成り立つこと (定理 6.2, 6.3) を述べる.

3 次数 Hecke 環とその加群たち

3.1 次数 Hecke 環 H_k

$\mathcal{R}$ などは任意として, $k \in \mathcal{K}_{\mathbb{C}}$ とする. $\mathcal{R}^+$ および k に付随する次数 Hecke 環 H_k とは, $\mathbb{C}$ 上の結合的代数で以下を満たす唯一のものである:

(H1) H_k は部分代数として, 対称代数 $S(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$ および群代数 $\mathbb{C}W$ を含む.

(H2) 掛け算写像 $S(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}) \otimes \mathbb{C}W \rightarrow H_k$ は線形同型.

(H3) $\xi \in \mathfrak{a}$ と単純ルート $\alpha \in \mathcal{B}$ に対して

$$r_{\alpha} \cdot \xi = r_{\alpha}(\xi) \cdot r_{\alpha} - (k_{\alpha} + 2k_{2\alpha})\alpha(\xi)$$

が成り立つ. ただし, $r_{\alpha} \in W$ は $\alpha = 0$ に関する鏡映で, $2\alpha \notin \mathcal{R}$ のときは $k_{2\alpha} = 0$ とする.

実は Opdam-Cherednik 変換 $\mathcal{H}_k$ は以下で述べる 2 つの H_k 加群 $C_0^{\infty}(\mathfrak{a})$, $\mathcal{O}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*)$ の間の準同型になっている (定理 3.11) ので, いろいろな H_k 加群が理論に関わってくる.

定義 3.1. H_k の反線形反同型 $h \mapsto h^*$ を

$$w^* = w^{-1} \ (w \in W), \quad \xi^* = -w_0 \cdot w_0(\bar{\xi}) \cdot w_0 \ (\xi \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$$

で定める. w_0 は W の最長元, $\bar{\cdot}$ は $\mathfrak{a}$ に関する複素共役である. 複素内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を持つ H_k 加群がユニタリであるとは, 内積について $\langle h \cdot, \cdot \rangle = \langle \cdot, h^* \cdot \rangle$ ($h \in H_k$) が成り立つことをいう.

3.2 H_k 加群 $C^{\infty}(\mathfrak{a})$

$\xi \in \mathfrak{a}$ に対して定まる微分差分作用素

$$T(k, \xi) = \partial(\xi) + \sum_{\alpha \in \mathcal{R}^+} \frac{k_{\alpha} \alpha(\xi)}{1 - e^{-\alpha}} (1 - r_{\alpha}) - \rho(k)(\xi).$$

は “Cherednik 作用素” と呼ばれ, $C^{\infty}(\mathfrak{a})$ に作用する ([2] で導入された). ここで, $\rho(k) = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \mathcal{R}^+} k_{\alpha} \alpha$ である. $T(k, \xi)$ ($\xi \in \mathfrak{a}$) はすべて可換で, $S(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$ の $C^{\infty}(\mathfrak{a})$ への作用が導かれる. さらに, これと W の $C^{\infty}(\mathfrak{a})$ への通常的作用は (H3) の交換関係を満

たし, $\mathbf{H}_k$ の $C^\infty(\mathfrak{a})$ への作用 $T(\mathbf{k}, \cdot)$ に統合される. また, $C_0^\infty(\mathfrak{a})$, $C^\omega(\mathfrak{a})$ は $\mathbf{H}_k$ 加群 $C^\infty(\mathfrak{a})$ の部分加群になっている.

補題 3.2 ([10, Lemma 7.8]). $\mathbf{k} \in \mathcal{K}_1$, $h \in \mathbf{H}_k$, $f(x) \in C_0^\infty(\mathfrak{a})$, $g(x) \in C^\infty(\mathfrak{a})$ に対して,

$$\int_{\mathfrak{a}} (T(\mathbf{k}, h)f)(x) \overline{g(x)} \delta_k(x) dx = \int_{\mathfrak{a}} f(x) \overline{(T(\mathbf{k}, h^*)g)(x)} \delta_k(x) dx$$

である. 特に $\mathbf{k} \in \mathcal{K}_1$ のとき $C_0^\infty(\mathfrak{a}) \subset L^2(\mathfrak{a}, |W|^{-1} \delta_k(x) dx)$ はユニタリである.

次に, $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$ とする. $\mathbf{H}_k$ の中心は $S(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})^W$ (通常の W 作用で不変な部分代数) なので,

$$C_k^\omega(\mathfrak{a}, \lambda) := \{f(x) \in C^\omega(\mathfrak{a}) \mid T(\mathbf{k}, p)f(x) = p(\lambda)f(x) \quad (p \in S(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})^W)\}$$

は $C^\omega(\mathfrak{a})$ の部分加群である. この $\mathbf{H}_k$ 加群は, Riemann 対称空間上の不変微分作用素環の同時固有関数のなす空間が, 実半単純 Lie 群の表現論において果たす役割と酷似した重要な役割を持つ. 以下に $C_k^\omega(\mathfrak{a}, \lambda)$ の性質を述べるが, 同時に非対称超幾何関数 $G(\lambda, \mathbf{k}; x)$ の定義も与える.

命題 3.3. $\mathbf{k} \in \mathcal{K}_{\mathbb{C}, \text{reg}}$ とする.

- (1) $C_k^\omega(\mathfrak{a}, \lambda)$ は W 加群として $\mathbb{C}W$ と同型.
- (2) $C_k^\omega(\mathfrak{a}, \lambda)^W \rightarrow \mathbb{C}; f(x) \mapsto f(0)$ は線形同型. この写像による 1 の逆像は $F(\lambda, \mathbf{k}; x)$.
- (3) $\mathbf{H}_k F(\lambda, \mathbf{k}; x) = T(\mathbf{k}, S(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}))F(\lambda, \mathbf{k}; x)$ は $C_k^\omega(\mathfrak{a}, \lambda)$ の唯一の既約部分加群.
- (4) $C_k^\omega(\mathfrak{a}, \lambda)$ は 1 次元部分空間 $C_k^\omega(\mathfrak{a}, \lambda)^{-W} := \{f \in C_k^\omega(\mathfrak{a}, \lambda) \mid wf = (\text{sgn } w)f \quad (w \in W)\}$ で $\mathbf{H}_k$ 上生成される. よって $C_k^\omega(\mathfrak{a}, \lambda) = T(\mathbf{k}, S(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}))C_k^\omega(\mathfrak{a}, \lambda)^{-W}$.
- (5) 差積のような $S(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$ の要素

$$\pi_k^- := \prod_{\alpha \in \mathcal{R}^+ \setminus \frac{1}{2}\mathcal{R}} \left(\alpha^\vee - \left(\mathbf{k}_\alpha + \frac{1}{2} \mathbf{k}_{\frac{1}{2}\alpha} \right) \right)$$

に対して $T(\mathbf{k}, \pi_k^-)C_k^\omega(\mathfrak{a}, \lambda)^{-W} = C_k^\omega(\mathfrak{a}, \lambda)^W = \mathbb{C}F(\lambda, \mathbf{k}; x)$.

- (6) 任意の $w \in W$ に対して $C_k^\omega(\mathfrak{a})_{w\lambda} := \{f \in C^\omega(\mathfrak{a}) \mid T(\mathbf{k}, \xi)f = w\lambda(\xi)f \quad (\xi \in \mathfrak{a})\}$ は $C_k^\omega(\mathfrak{a}, \lambda)$ の 1 次元部分空間. $C_k^\omega(\mathfrak{a})_\lambda \rightarrow \mathbb{C}; f(x) \mapsto f(0)$ は線形同型. この写像による 1 の逆像が $G(\lambda, \mathbf{k}; x)$.

$\mathcal{R}_0 = \mathcal{R} \setminus 2\mathcal{R}$, $\mathcal{R}_0^+ = \mathcal{R}_0 \cap \mathcal{R}^+$, $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}, \text{reg}}^* = \{\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^* \mid \lambda(\alpha^\vee) \neq 0 \quad (\alpha \in \mathcal{R})\}$ とする.

系 3.4. $\mathbf{k} \in \mathcal{K}_{\mathbb{C}, \text{reg}}$, $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}, \text{reg}}^*$ とする.

- (1) $C_k^\omega(\mathfrak{a}, \lambda) = \sum_{w \in W} \mathbb{C}G(w\lambda, \mathbf{k}; x)$.

- (2) $C_{\mathbf{k}}^{\omega}(\mathfrak{a}, \lambda)^{-W}$ の 0 でない要素を $f(x) = \sum_{w \in W} a_w G(w\lambda, \mathbf{k}; x)$ とすると, 各 $w \in W$ に対して $a_w \neq 0$.
- (3) $F(\lambda, \mathbf{k}; x) = \sum_{w \in W} b_w G(w\lambda, \mathbf{k}; x)$ とすると, $b_w \neq 0 \Leftrightarrow w\lambda(\alpha^{\vee}) \neq \mathbf{k}_{\alpha} + 2\mathbf{k}_{2\alpha} \ (\forall \alpha \in \mathcal{R}_0^+)$.
- (4) $\mathbf{H}_{\mathbf{k}} F(\lambda, \mathbf{k}; x) = \sum \{\mathbb{C}G(w\lambda, \mathbf{k}; x) \mid w \in W, b_w \neq 0\}$.
- 次も後で使う.

補題 3.5. $\alpha \in \mathcal{B}$ に対して $\tau_{\alpha} = r_{\alpha}\alpha^{\vee} + \mathbf{k}_{\alpha} + 2\mathbf{k}_{2\alpha}$ と置くと, $\xi \cdot \tau_{\alpha} = \tau_{\alpha} \cdot r_{\alpha}(\xi) \ (\xi \in \mathfrak{a})$ が成り立つ. よって $G(\lambda, \mathbf{k})$ の特徴付けから以下が成り立つ.

$$(3.1) \quad \begin{aligned} T(\mathbf{k}, \tau_{\alpha})G(\lambda, \mathbf{k}) &= \lambda(\alpha^{\vee})T(\mathbf{k}, r_{\alpha})G(\lambda, \mathbf{k}) + (\mathbf{k}_{\alpha} + 2\mathbf{k}_{2\alpha})G(\lambda, \mathbf{k}) \\ &= (\lambda(\alpha^{\vee}) + \mathbf{k}_{\alpha} + 2\mathbf{k}_{2\alpha})G(r_{\alpha}\lambda, \mathbf{k}). \end{aligned}$$

3.3 球主系列 $I_{\mathbf{k}}(\lambda)$

$\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ とする. 1 次元の $S(\mathfrak{a})$ 加群 $\mathbb{C}v_{\lambda}$ を $\xi v_{\lambda} = \lambda(\xi)v_{\lambda} \ (\xi \in \mathfrak{a})$ で定め, その誘導 $\mathbf{H}_{\mathbf{k}}$ 加群として球主系列加群 $I_{\mathbf{k}}(\lambda) = \text{Ind}_{S(\mathfrak{a})}^{\mathbf{H}_{\mathbf{k}}} \mathbb{C}v_{\lambda} = \mathbf{H}_{\mathbf{k}} \otimes_{S(\mathfrak{a})} \mathbb{C}v_{\lambda} = \mathbb{C}W \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}v_{\lambda}$ を定める.

補題 3.6 ([10, Theorem 4.2]). 写像 $\langle \cdot, \cdot \rangle_W : I(\lambda) \times I(-\bar{\lambda}) \rightarrow \mathbb{C}$ を $\langle \sum_w a_w wv_{\lambda}, \sum_t b_t tv_{-\bar{\lambda}} \rangle_W = |W|^{-1} \sum_w a_w \bar{b}_w$ で定めると, $\langle h\cdot, \cdot \rangle_W = \langle \cdot, h^*\cdot \rangle_W \ (h \in \mathbf{H}_{\mathbf{k}})$ が成り立つ. 特に $\lambda \in \sqrt{-1}\mathfrak{a}^*$ であれば, $I(\lambda)$ はこの半双線形形式によりユニタリである.

命題 3.7 ([2, 8]). $\mathbf{k} \in \mathcal{K}_{\mathbb{C}, \text{reg}}$ とする. 実半単純 Lie 群の表現論における Poisson 変換の類似した $\mathbf{H}_{\mathbf{k}}$ 準同型 $\mathcal{P}_{\mathbf{k}}(\lambda) : I_{\mathbf{k}}(\lambda) \rightarrow C_{\mathbf{k}}^{\omega}(\mathfrak{a}, \lambda)$ が

$$I_{\mathbf{k}}(\lambda) = \mathbb{C}W \ni \sum_w a_w wv_{\lambda} \mapsto \frac{1}{|W|} \sum_w a_w G(\lambda, \mathbf{k}; w^{-1}x) \in C_{\mathbf{k}}^{\omega}(\mathfrak{a}, \lambda).$$

で定まる. $\mathcal{P}_{\mathbf{k}}(\lambda)$ が同型であるためには

$$(3.2) \quad \lambda(\alpha^{\vee}) \neq -\mathbf{k}_{\alpha} - 2\mathbf{k}_{2\alpha} \quad (\forall \alpha \in \mathcal{R}_0^+)$$

が必要十分. 命題 3.3 (6) より $\text{Hom}_{\mathbf{H}_{\mathbf{k}}}(I_{\mathbf{k}}(\lambda), C_{\mathbf{k}}^{\omega}(\mathfrak{a}, \lambda))$ は 1 次元である. $\mathcal{P}_{\mathbf{k}}(\lambda)$ はこの要素で $\mathcal{P}_{\mathbf{k}}(\lambda)(\sum_w wv_{\lambda}) = F(\mathbf{k}, \lambda; x)$ であるものと特徴付けられる.

定義 3.8 ([12] 参照). $w \in W$ の簡約表現 $w = r_{\alpha_1} \cdots r_{\alpha_l}$ に対して定まる補題 3.5 の τ_{α} の積 $\tau_{w^{-1}} := \tau_{\alpha_l} \cdots \tau_{\alpha_1} \in \mathbf{H}_{\mathbf{k}}$ は, 簡約表現の選び方に依らない. よって実半単純 Lie 群の表現論における (未規格化) Knapp-Stein 型繋絡作用素に類似した $\mathbf{H}_{\mathbf{k}}$ 準同型

$\tilde{\mathcal{A}}_k(w, \lambda) : I(\lambda) \rightarrow I(w\lambda)$ が $\sum_t a_t t v_\lambda \rightarrow \sum_t a_t t \tau_{w^{-1}} v_{w\lambda}$ で定まる．さらに

$$(3.3) \quad \lambda(\alpha^\vee) \neq \mathbf{k}_\alpha + 2\mathbf{k}_{2\alpha} \quad (\forall \alpha \in \mathcal{R}_0^+ \cap -w^{-1}\mathcal{R}_0^+)$$

のとき，規格化版の $\mathbf{H}_k$ 準同型を

$$\mathcal{A}_k(w, \lambda) = \prod_{\alpha \in \mathcal{R}_0^+ \cap -w^{-1}\mathcal{R}_0^+} (\mathbf{k}_\alpha + 2\mathbf{k}_{2\alpha} - \lambda(\alpha^\vee))^{-1} \cdot \tilde{\mathcal{A}}_k(w, \lambda).$$

で定める． $\mathcal{A}_k(w, \lambda)(\sum_t t v_\lambda) = \sum_t t v_{w\lambda}$ に注意．

補題 3.9. $w, w_1, w_2 \in W$ に対して， $w = w_1 w_2$ かつ $l(w) = l(w_1) + l(w_2)$ であるとする．このとき， (w, λ) が (3.3) を満たすことは， $(w_1, w_2 \lambda)$ ， (w_2, λ) がともに (3.3) を満たすことと同値である．このとき， $\mathcal{A}_k(w, \lambda) = \mathcal{A}_k(w_1, w_2 \lambda) \mathcal{A}_k(w_2, \lambda)$ が成り立つ．

補題 3.10. $\mathbf{k} \in \mathcal{K}_{\mathbb{C}, \text{reg}}$ とする． $\mathcal{A}_k(w, \lambda)$ が定義されるとき， $\mathcal{P}_k(\lambda) = \mathcal{P}_k(w\lambda) \circ \mathcal{A}_k(w, \lambda)$ が成り立つ．

同一視 $\text{Map}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*, \mathbb{C}W) = \prod_{\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*} \mathcal{I}_k(\lambda)$; $\Phi \leftrightarrow (\Phi(\lambda) v_\lambda)_{\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*}$ により， $\text{Map}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*, \mathbb{C}W)$ を $\mathbf{H}_k$ 加群と見なすと， $\mathcal{PW}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*) \otimes \mathbb{C} \subset \mathcal{O}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*) \otimes \mathbb{C}W \subset \text{Map}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*, \mathbb{C}W)$ は部分加群の列になる． $\mathcal{O}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*) \otimes \mathbb{C}W$ の元 $\Phi(\lambda)$ で条件

$$\Phi(\lambda)(\mathbf{k}_\alpha + 2\mathbf{k}_{2\alpha} - \lambda(\alpha^\vee) r_\alpha) = \Phi(r_\alpha \lambda)(\mathbf{k}_\alpha + 2\mathbf{k}_{2\alpha} - \lambda(\alpha^\vee)) \quad (\forall \alpha \in \mathcal{B})$$

を満たすものの全体を $\tilde{\mathcal{I}}_k$ とする．上の条件は

$$\mathcal{A}_k(r_\alpha, \lambda) \Phi(\lambda) = \Phi(r_\alpha \lambda) \quad (\lambda : \text{ジェネリックス}, \forall \alpha \in \mathcal{B})$$

と同値なので， $\tilde{\mathcal{I}}_k$ および $\mathcal{I}_k := \tilde{\mathcal{I}}_k \cap \mathcal{PW}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*) \otimes \mathbb{C}$ も $\mathbf{H}_k$ 加群 $\text{Map}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*, \mathbb{C}W)$ の部分加群である．命題 3.12 で， $\mathcal{I}_k$ が Opdam-Cherednik 変換 $\mathcal{H}_k$ の終域の別の実現であることが示される．Opdam が [10] で定義したオリジナルの終域と実質的に同じである． $\mathcal{I}_k$ の定義は若干複雑だが，その元 $\Phi(\lambda)$ への $\mathbf{H}_k$ の作用は，値である各主系列の要素への作用という簡単なものである．つまり，終域を $\mathcal{I}_k$ とすることにより，「 $\mathcal{H}_k$ と $\mathcal{H}_k^{-1}$ は $C_0^\infty(\mathfrak{a})$ を主系列（の部分加群）の直積分で表示するもの」という意味が生じる．また，逆変換も $\mathcal{I}_k$ を始域とした方が構成しやすく，Plancherel の定理における前ヒルベルト空間の構造も $\mathcal{I}_k$ を通じて構成される．

3.4 H_k 加群 $\mathcal{O}(\mathfrak{a}_\mathbb{C}^*)$

1 次元の自明な W 加群 $\mathbb{C}v_+$ からの誘導 H_k 加群 $\text{Ind}_{\mathbb{C}W}^{H_k} \mathbb{C}v_+ = H_k \otimes_{\mathbb{C}W} \mathbb{C}v_+ = S(\mathfrak{a}_\mathbb{C}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}v_+$ は $S(\mathfrak{a}_\mathbb{C})$ と同一視できる. この同一視による H_k の $S(\mathfrak{a}_\mathbb{C})$ への作用を ϖ_k と記すと, $\phi(\lambda) \in S(\mathfrak{a}_\mathbb{C})$ に対して

$$(\varpi_k(p)\phi)(\lambda) = p(\lambda)\phi(\lambda) \quad (p(\lambda) \in S(\mathfrak{a}_\mathbb{C}))$$

$$(\varpi_k(r_\alpha)\phi)(\lambda) = \phi(\lambda) - \frac{\lambda(\alpha^\vee) + \mathbf{k}_\alpha + 2\mathbf{k}_{2\alpha}}{\lambda(\alpha^\vee)}(\phi(\lambda) - \phi(r_\alpha\lambda)) \quad (\alpha \in \mathcal{B})$$

となる. $\mathcal{O}(\mathfrak{a}_\mathbb{C}^*) \supset S(\mathfrak{a}_\mathbb{C})$ であるが, 上の等式を用いて H_k 作用 ϖ_k を $\mathcal{O}(\mathfrak{a}_\mathbb{C}^*)$ まで延長できる. $\mathcal{O}(\mathfrak{a}_\mathbb{C}^*)^W = \mathcal{O}(\mathfrak{a}_\mathbb{C}^*)^{\varpi_k(W)}$ に注意. また, 古典的な Fourier 変換を用いると, $\mathcal{PW}(\mathfrak{a}_\mathbb{C}^*)$ が H_k 加群 $\mathcal{O}(\mathfrak{a}_\mathbb{C}^*)$ の部分加群であることを示すことができる.

(1.2), 補題 3.2, 補題 3.5 などから次を得る.

定理 3.11 ([10]). $\mathcal{H}_k : C_0^\infty(\mathfrak{a}) \rightarrow \mathcal{O}(\mathfrak{a}_\mathbb{C}^*)$ は H_k 準同型.

命題 3.12. 写像

$$\tilde{\mathcal{I}}_k \ni \Phi(\lambda) = \sum_w \phi_w(\lambda) \otimes w \mapsto \phi(\lambda) = \phi_{w_0}(w_0\lambda) \in \mathcal{O}(\mathfrak{a}_\mathbb{C}^*)$$

は H_k 加群の同型で, 逆写像 $\tilde{\mathcal{Q}}_k : \mathcal{O}(\mathfrak{a}_\mathbb{C}^*) \rightarrow \tilde{\mathcal{I}}_k$ は

$$\tilde{\mathcal{Q}}_k\phi(\lambda) = \sum_{w \in W} (\varpi_k(w_0w^{-1})\phi)(w_0\lambda) \otimes w$$

で与えられる. $\tilde{\mathcal{Q}}_k$ の $\mathcal{PW}(\mathfrak{a}_\mathbb{C}^*)$ への制限により, H_k 加群の同型 $\mathcal{Q}_k : \mathcal{PW}(\mathfrak{a}_\mathbb{C}^*) \xrightarrow{\sim} \mathcal{I}_k$ が導かれる.

4 Paley-Wiener の定理

この節の目標は次を示すことである.

定理 4.1. $\mathbf{k} \in \mathcal{K}_1$ とする. $\mathcal{F}_k : C_0^\infty(\mathfrak{a})^W \rightarrow \mathcal{O}(\mathfrak{a}_\mathbb{C}^*)^W$ が $\mathcal{PW}(\mathfrak{a}_\mathbb{C}^*)^W$ の上への単射であるとき, $\mathcal{H}_k : C_0^\infty(\mathfrak{a}) \rightarrow \mathcal{O}(\mathfrak{a}_\mathbb{C}^*)$ も $\mathcal{PW}(\mathfrak{a}_\mathbb{C}^*)$ の上への単射である.

$F(\lambda, \mathbf{k}; x)$ の理論において, “シフト作用素” と呼ばれる x に関する微分 (差分) 作用素は, 異なる $\mathbf{k}$ に対する $F(\lambda, \mathbf{k}; x)$ の間の関係を与えるという重要な役割を果たす.

シフト作用素の公式の 1 つを $G(\lambda, \mathbf{k}; x)$ に対するものに拡張しよう. W の元を列挙して, $w_1 = 1, w_2, \dots, w_m$ とする. $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ 上の W 調和多項式の空間 $H_W(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*)$ ([6, Ch. III] 参照) の同次元からなる基底 $\{h_1, \dots, h_m\}$ を 1 つ取り, 正方行列 $P = (w_i h_j)_{1 \leq i, j \leq m}$ を作る. $\pi = \prod_{\alpha \in \mathcal{R}^+ \setminus \frac{1}{2}\mathcal{R}} \alpha^\vee$ とすると $\det P = c\pi^{m/2}$ となることが知られているが, 必要ならば h_1 を調整して $c = 1$ とする. P の余因子行列の $1/\pi^{m/2-1}$ 倍を Q とする. Q の各成分は $S(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$ の元になる. また, Q の第 1 列を $q_1, \dots, q_m$ とすると $Q = (\text{sgn}(w_j)w_j q_i)_{1 \leq i, j \leq m}$ である. $\mathbf{1}$ を $\mathcal{R} \setminus \frac{1}{2}\mathcal{R}$ 上 1 で $\mathcal{R} \cap \frac{1}{2}\mathcal{R}$ 上 0 である重複度関数とし, $\Delta = \prod_{\alpha \in \mathcal{R}^+ \setminus \frac{1}{2}\mathcal{R}} (e^{\alpha/2} - e^{-\alpha/2}) \in C^\infty(\mathfrak{a})$ とすると次が成り立つ.

命題 4.2. $\mathbf{k} \in \mathcal{K}_{\mathbb{C}, \text{reg}}$ のとき $\mathbf{k} + \mathbf{1} \in \mathcal{K}_{\mathbb{C}, \text{reg}}$ である. 0 でない定数 $c_{\mathbf{k}}$ があって,

$$G(\lambda, \mathbf{k}) = c_{\mathbf{k}} \sum_{i=1}^m h_i(\lambda) T(\mathbf{k}, q_i) \Delta F(\lambda, \mathbf{k} + \mathbf{1})$$

となる. (この $c_{\mathbf{k}}$ は明示的に書ける.)

この命題と, [11, Theorem 2.5] による $F(\lambda, \mathbf{k} + \mathbf{1}; x)$ の評価式から次を得る.

系 4.3. $\mathbf{k} \in \mathcal{K}_{\mathbb{C}, \text{reg}} \cap \mathcal{K}$, $C \subset \mathfrak{a}$ はコンパクト集合, $p \in S(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$ とする. このとき, 適当な $A > 0$ と $n \in \mathbb{N}$ により

$$|p(\partial_x)G(\lambda, \mathbf{k}; x)| \leq A(1 + \|\lambda\|)^n e^{\max_{w \in W} \Re w \lambda(x)}$$

がすべての $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ と $x \in C$ に対して成り立つ. これから特に, $\mathbf{k} \in \mathcal{K}_1$ のとき

$$\text{Im } \mathcal{H}_{\mathbf{k}} \subset \mathcal{PW}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*)$$

が成り立つ. (定理 4.1 の仮定は不要.)

定理 4.1 の証明の概略 変数分離公式 $S(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}) = H_W(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*) \otimes S(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})^W$ ([6, Ch. III] 参照) は, $S(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$ を $\mathcal{PW}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*)$ に拡張しても成り立つ:

$$\mathcal{PW}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*) = H_W(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*) \otimes \mathcal{PW}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*)^W = \text{Ind}_{S(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})^W \otimes \mathbb{C}W}^{H_{\mathbf{k}}} \mathcal{PW}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*)^W.$$

よって定理の仮定のもと, $S(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})^W \otimes \mathbb{C}W$ 準同型 $\mathcal{F}_{\mathbf{k}}^{-1} : \mathcal{PW}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*)^W \rightarrow C_0^\infty(\mathfrak{a})^W$ から $H_{\mathbf{k}}$ 準同型 $\mathcal{J}_{\mathbf{k}} : \mathcal{PW}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*) \rightarrow C_0^\infty(\mathfrak{a})$ が得られる. 明らかに $\mathcal{H}_{\mathbf{k}} \circ \mathcal{J}_{\mathbf{k}} = \text{id}$ である. $\mathcal{J}_{\mathbf{k}} \circ \mathcal{H}_{\mathbf{k}} = \text{id}$ の証明には, Opdam による $\mathbf{k} \in \mathcal{K}_+$ のときの議論 ([10] の Lemma 9.3, Corollary 9.4, Lemma 9.5) が適用できる. $\square$

5 内積の構成

ここから先は、§2 の (拡張 2) の設定下で議論する．ただし、結果が大きく変わる $r > 1$ かつ $k_m = 0$ の場合は除外する．

まず、 λ が $D_k(\Theta_r) = D_k(\mathcal{B})$ に属するとする．このとき [7, §3] により $F(\lambda, \mathbf{k}; x) \in L^2(\mathfrak{a}, |W|^{-1}\delta_k(x)dx)$ である．これは、 $F(\lambda, \mathbf{k}; x)$ を $\mathfrak{a}$ の正チェンバー $\mathfrak{a}_+$ の無限遠点における漸近展開の先頭指数に関する Casselman と Milićić の条件 ([1, Theorem 7.5]) から分かる． $C_k^\omega(\mathfrak{a}, \lambda)$ の各元 $f(x)$ も $\mathfrak{a}_+$ の無限遠点で漸近展開できるが、(1) $f(x) \in L^2(\mathfrak{a}, |W|^{-1}\delta_k(x)dx)$ であることは、(2) 各 $w \in W$ について $(wf)(x)$ の漸近展開の先頭指数が Casselman と Milićić の条件を満たすことと同値である．一方、(2) の条件は $T(\mathbf{k}, \cdot)$ の作用で不変であることが容易に分かるので、

$$\mathbf{H}_k F(\lambda, \mathbf{k}; x) \subset L^2(\mathfrak{a}, |W|^{-1}\delta_k(x)dx)$$

が成り立つ．つまり、 $\mathbf{H}_k F(\lambda, \mathbf{k}; x)$ は既約ユニタリ $\mathbf{H}_k$ 加群である．

次に $i = 0, \dots, r$ とし、 $W(\Theta_i)$ は $\{r_\alpha \mid \alpha \in \Theta_i\}$ で生成される W の部分群とする．また、この部分群の最長元を $w_0(\Theta_i)$ とする． $\lambda \in D_k(\Theta_i)$ 、 $\mu \in \sqrt{-1}\mathfrak{a}_{\Theta_i}^*$ とすると、 $-\lambda + \mu$ と $w_0(\Theta_i)$ は (3.3) の条件を満たし、 $\mathcal{A}_k(w_0(\Theta_i), -\lambda + \mu)$ が定まる．

$$w_0(\Theta_i)(-\lambda + \mu) = \lambda + \mu = -\overline{(-\lambda + \mu)}$$

なので、補題 3.6 を用いて $I_k(-\lambda + \mu)$ 上に半双線形形式

$$\langle \cdot, \cdot \rangle = \langle \cdot, \mathcal{A}_k(w_0(\Theta_i), -\lambda + \mu) \cdot \rangle_W$$

が定まり、 $\langle h \cdot, \cdot \rangle = \langle \cdot, h^* \cdot \rangle$ ($h \in \mathbf{H}_k$) という $\mathbf{H}_k$ 不変性を持つ．

$$(5.1) \quad \left\langle \sum_w wv_{-\lambda+\mu}, \sum_w wv_{-\lambda+\mu} \right\rangle = 1$$

に注意．

$$\mathfrak{a}_{\Theta_i, \text{reg}}^* = \{(\lambda_{i+1}, \dots, \lambda_r) \mid \lambda_p, \lambda_p \pm \lambda_q \neq 0\} \text{ とする.}$$

命題 5.1. $\lambda \in D_k(\Theta_i)$ 、 $\mu \in \sqrt{-1}\mathfrak{a}_{\Theta_i, \text{reg}}^*$ とする．

(1) $\lambda + \mu \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}, \text{reg}}^*$ ．

- (2) $\lambda + \mu$ は (3.2) の条件を満たし, $\mathcal{P}_k(\lambda + \mu) : I_k(\lambda + \mu) \rightarrow C_k^\omega(\mathfrak{a}, \lambda + \mu)$ は同型. よって $I_k(\lambda + \mu)$ は唯一の既約部分加群を持ち, $I_k(-\lambda + \mu)$ は唯一の既約商加群を持つ.
- (3) $\Theta_i^\lambda := \{\alpha \in \mathcal{R}_0 \mid (\lambda + \mu)(\alpha^\vee) = \mathbf{k}_\alpha + 2\mathbf{k}_{2\alpha}\}$ は μ に依らず, Θ_i の部分集合になる. $\lambda + \mu$ に対する補題 3.4 (3) の条件を満たす w の全体は $W^{\Theta_i^\lambda} w_0(\Theta_i)$ である. ただし, $W^{\Theta_i^\lambda} = \{w \in W \mid w\Theta_i^\lambda \subset \mathcal{R}^+\}$ とする. よって補題 3.4 (4) より

$$\mathbf{H}_k F(\lambda + \mu, \mathbf{k}; x) = \sum \{\mathbb{C}G(w(\lambda + \mu), \mathbf{k}; x) \mid w \in W^{\Theta_i^\lambda} w_0(\Theta_i)\}.$$

- (4) $-\lambda + \mu \in W^{\Theta_i^\lambda} w_0(\lambda + \mu)$ より, $\text{Im } \mathcal{P}_k(-\lambda + \mu) = \mathbf{H}_k F(\lambda + \mu, \mathbf{k}; x)$ は既約. よって, 補題 3.10 より

$$\begin{aligned} J_{k, \Theta_i}(-\lambda + \mu) &:= I_k(-\lambda + \mu) / \text{Ker } \mathcal{A}_k(w_0(\Theta_i), -\lambda + \mu) \\ &\simeq \text{Im } \mathcal{A}_k(w_0(\Theta_i), -\lambda + \mu) \simeq \mathbf{H}_k F(\lambda + \mu, \mathbf{k}; x) \end{aligned}$$

も既約.

- (5) $I_k(-\lambda + \mu)$ 上の半双線形形式 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は対称で半正定値. $J_{k, \Theta_i}(-\lambda + \mu)$ 上の内積を誘導し, $J_{k, \Theta_i}(-\lambda + \mu)$ はユニタリ $\mathbf{H}_k$ 加群になる.

証明 (5) の半正定値性以外は難しくない. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は $J_{k, \Theta_i}(-\lambda + \mu)$ 上の非退化 $\mathbf{H}_k$ 不変半双線形形式を誘導する. そのような双半線形形式は高々 1 次元しかないので, (5.1) より $J_{k, \Theta_i}(-\lambda + \mu)$ がユニタリ化可能であることをいえばよい. $i = r$ のときは, 本節の最初で証明済みである. $i < r$ のときは $\mathbf{H}_k$ の Levi 部分環 $\mathbf{H}_k(\Theta_i) = S(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}) \otimes \mathbb{C}W(\Theta_i)$ の主系列 $I'_k(-\lambda + \mu)$ の唯一の既約商加群 $J'_{k, \Theta_i}(-\lambda + \mu)$ はユニタリ化可能である ($i = r$ の場合の議論が適用できる). このとき,

$$I_k(-\lambda + \mu) = \text{Ind}_{\mathbf{H}_k(\Theta_i)}^{\mathbf{H}_k} I'_k(-\lambda + \mu) \rightarrow \text{Ind}_{\mathbf{H}_k(\Theta_i)}^{\mathbf{H}_k} J'_{k, \Theta_i}(-\lambda + \mu) \rightarrow 0$$

が完全で, 2 番目の加群がユニタリ化可能になる. $I_k(-\lambda + \mu)$ の極大部分加群は 1 つしかないので, 2 番目の加群は既約で, $J_{k, \Theta_i}(-\lambda + \mu)$ と同型になる. $\square$

6 Plancherel の定理と逆変換公式

前節の設定を引き継ぐ.

補題 6.1. $J_{k, \Theta_i}(-\lambda + \mu) = \lambda + \mu \in D_k(\Theta_i) + \sqrt{-1}\mathfrak{a}_{\Theta_i, \text{reg}}^*$ とする.

(1) $I_k(-\lambda + \mu) / \text{Ker } \mathcal{A}_k(w_0(\Theta_i), -\lambda + \mu)$ の基底として

$$\left\{ v_{-\lambda+\mu}^w := \left(\prod_{\alpha \in \mathcal{R}_0^+ \cap -w^{-1}\mathcal{R}_0} ((-\lambda + \mu)(\alpha^\vee) + \mathbf{k}_\alpha + 2\mathbf{k}_{2\alpha}) \right)^{-1} \tau_w v_{-\lambda+\mu} \mid w \in W^{\Theta_i^\lambda} \right\}$$

が取れる.

(2) 各 $w \in W^{\Theta_i^\lambda}$ について,

$$\begin{aligned} (6.1) \quad \mathcal{A}_k(w_0(\Theta_i), -\lambda + \mu) v_{-\lambda+\mu}^w \\ = \left(\prod_{\alpha \in \mathcal{R}_0^+ \cap -w_0(\Theta_i)^{-1}w^{-1}\mathcal{R}_0} ((\lambda + \mu)(\alpha^\vee) + \mathbf{k}_\alpha + 2\mathbf{k}_{2\alpha}) \right)^{-1} \tau_{ww_0(\Theta_i)} v_{\lambda+\mu} \\ =: v_{\lambda+\mu}^{ww_0(\Theta_i)}, \end{aligned}$$

$$(6.2) \quad \mathcal{P}_k(\lambda + \mu) v_{\lambda+\mu}^{ww_0(\Theta_i)} = |W|^{-1} G(ww_0(\lambda + \mu), \mathbf{k}; x).$$

(3) $\phi \in \mathcal{PW}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*)$ に対して

$$\mathcal{Q}_k(\phi)(\lambda + \mu) = \sum_{w \in W^{\Theta_i^\lambda}} \phi(ww_0(\Theta_i)(\lambda + \mu)) \prod_{\alpha \in \mathcal{R}_0^+} \left(1 - \frac{\mathbf{k}_\alpha + 2\mathbf{k}_{2\alpha}}{ww_0(\Theta_i)(\lambda + \mu)(\alpha^\vee)} \right) v_{\lambda+\mu}^{ww_0(\Theta_i)}.$$

(4) $\mathcal{B}_i = \{\beta_r - \beta_{r-1}, \dots, \beta_{i+2} - \beta_{i+1}, \beta_{i+1}\}$ と置くと, W における $\mathfrak{a}_{\Theta_i}$ の正規加群 $N_W(\mathfrak{a}_{\Theta_i})$ は $\{r_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{B}_i\}$ で生成される Weyl 群であり

$$\mathfrak{a}_{\Theta_i, +}^* := \{(\lambda_{i+1}, \dots, \lambda_r) \mid 0 \leq \lambda_{i+1} \leq \dots \leq \lambda_r\}$$

は $N_W(\mathfrak{a}_{\Theta_i}) \curvearrowright \mathfrak{a}_{\Theta_i}^*$ の正チェンバーである. さらに,

$${}^{\circ}W^{\Theta_i^\lambda} := \{w \in W^{\Theta_i^\lambda} \mid w\mathcal{B}_i \subset \mathcal{R}^+\}$$

に対して分解 $W^{\Theta_i^\lambda} = {}^{\circ}W^{\Theta_i^\lambda} \times N_W(\mathfrak{a}_{\Theta_i})$ が成り立つ.

$\mathcal{PW}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*) = \text{Ind}_{S(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})W \otimes \mathbb{C}W}^{H_k} \mathcal{PW}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*)^W$ より, (2.3) を延長する $\mathcal{PW}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*)$ 上の H_k 不変内積は一意的である.

定理 6.2 (Plancherel の定理). $\mathcal{PW}_k(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*)$ は内積

$$\begin{aligned} \langle \phi, \psi \rangle &= \sum_{i=0}^r \int_{D_{\mathbf{k}}(\Theta_i) + \sqrt{-1}\mathfrak{a}_{\Theta_i, \text{reg}}^*}^{\in I_{\mathbf{k}}(-\lambda+\mu)} \langle \mathcal{Q}_{\mathbf{k}}(\phi)(-\lambda + \mu), \overbrace{\mathcal{Q}_{\mathbf{k}}(\psi)(-\lambda + \mu)}^{\in I_{\mathbf{k}}(-\lambda+\mu)} \rangle d\nu_{\mathbf{k}, \Theta_i}(\lambda + \mu) \\ &= \sum_{i=0}^r 2^{r-i} (r-i)! \int_{D_{\mathbf{k}}(\Theta_i) + \sqrt{-1}\mathfrak{a}_{\Theta_i, +}^*} \langle \mathcal{Q}_{\mathbf{k}}(\phi)(-\lambda + \mu), \mathcal{Q}_{\mathbf{k}}(\psi)(-\lambda + \mu) \rangle d\nu_{\mathbf{k}, \Theta_i}(\lambda + \mu) \end{aligned}$$

により $C_0^\infty(\mathfrak{a}) \subset L^2(\mathfrak{a}, \delta_{\mathbf{k}}(x)dx)$ と同型な前ヒルベルト空間になる.

逆変換の方も同様に, (2.4) を延長する $\mathbf{H}_{\mathbf{k}}$ 準同型 $\mathcal{PW}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*) \rightarrow C_0^\infty(\mathfrak{a})$ は一意的である.

定理 6.3 (逆変換公式). $\phi \in \mathcal{PW}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*)$ に対して

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\mathbf{k}}^{-1}\phi(x) &= \sum_{i=0}^r \int_{D_{\mathbf{k}}(\Theta_i) + \sqrt{-1}\mathfrak{a}_{\Theta_i, \text{reg}}^*} \underbrace{\mathcal{P}_{\mathbf{k}}(\lambda + \mu) \left(\mathcal{Q}_{\mathbf{k}}(\phi)(\lambda + \mu) \right)}_{\in \text{Im } \mathcal{A}_{\mathbf{k}}(w_0(\Theta_i), -\lambda + \mu)} d\nu_{\mathbf{k}, \Theta_i}(\lambda + \mu) \\ &= \sum_{i=0}^r \int_{D_{\mathbf{k}}(\Theta_i) + \sqrt{-1}\mathfrak{a}_{\Theta_i, +}^*} \frac{2^{r-i}(r-i)!}{|W|} \sum_{w \in W^{\Theta_i^\lambda}_{w_0(\Theta_i)}} \left\{ \phi(w(\lambda + \mu)) G(w(\lambda + \mu), \mathbf{k}, x) \right. \\ &\quad \cdot \left. \prod_{\alpha \in \mathcal{R}_0^+} \left(1 - \frac{\mathbf{k}_\alpha + 2\mathbf{k}_{2\alpha}}{w(\lambda + \mu)(\alpha^\vee)} \right) \right\} d\nu_{\mathbf{k}, \Theta_i}(\lambda + \mu) \\ &= \sum_{i=0}^r \int_{D_{\mathbf{k}}(\Theta_i) + \sqrt{-1}\mathfrak{a}_{\Theta_i}^*} \frac{2^{r-i}(r-i)!}{|W|} \sum_{w \in W^{\Theta_i^\lambda}_{w_0(\Theta_i)}} \left\{ \phi(w(\lambda + \mu)) G(w(\lambda + \mu), \mathbf{k}, x) \right. \\ &\quad \cdot \left. \prod_{\alpha \in \mathcal{R}_0^+} \left(1 - \frac{\mathbf{k}_\alpha + 2\mathbf{k}_{2\alpha}}{w(\lambda + \mu)(\alpha^\vee)} \right) \right\} d\nu_{\mathbf{k}, \Theta_i}(\lambda + \mu). \end{aligned}$$

参考文献

- [1] W. Casselman and D. Miličević, *Asymptotic behavior of matrix coefficients of admissible representations*, Duke. Math. **49** (1982), 869–930.
- [2] I. Cherednik, *A unification of Knizhnik-Zamolodchikov and Dunkl operators via affine Hecke algebras*, Invent. Math. **106** (1991), no. 2, 411–432.
- [3] I. Cherednik, *Inverse Harish-Chandra transform and difference operators*, Internat. Math. Res. Notices **1997** (1997), 733–750.
- [4] G. J. Heckman and E. M. Opdam, *Root systems and hypergeometric functions I*, Comp. Math. **64** (1987), 329–352.
- [5] G. J. Heckman and E. M. Opdam, *Jacobi polynomials and hypergeometric functions associated with root systems*, in Chapter 8 of T. H. Koornwinder and J. V. Stokman (Eds.), *Encyclopedia of Special Functions II: Multivariable Special Functions*, Cambridge University Press, (2020), 217–257.
- [6] S. Helgason, *Groups and Geometric Analysis*, Amer. Math. Soc., 2000, c1984.

- [7] T. Honda, H. Oda and N. Shimeno, *Inversion formula for the hypergeometric Fourier transform associated with a root system of type BC* , J. Math. Soc. Japan Advance Publication 1–37, December, 2022. <https://doi.org/10.2969/jmsj/88728872>.
- [8] A. Matsuo, *Integrable connections related to zonal spherical functions*, Invent. Math. **110** (1992), 95–121.
- [9] H. Oda, *Inversion formula for the Opdam-Cherednik transform associated with a root system of type BC* , in preparation.
- [10] E. M. Opdam, *Harmonic analysis for certain representations of graded Hecke algebras*, Acta Math. **175** (1995), 75–121.
- [11] E. M. Opdam, *Cuspidal hypergeometric functions*, Methods Appl. Anal. **6** (1999), 67–80.
- [12] E. M. Opdam, *Lectures on Dunkl operators*, Part I of *Lecture notes on Dunkl operators for real and complex reflection groups*, Math. Soc. Japan Mem. 8, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2000.