# 曲面群と同型かつザリスキ稠密な対称空間の不連続群

理化学研究所 数理創造プログラム 甘中 一輝 *
Kazuki Kannaka
RIKEN Interdisciplinary Theoretical and Mathematical Sciences
(iTHEMS)

**概要**

本稿では, 曲面群の実簡約代数群への表現の変形と冪零軌道の組み合わせ論との繋がりについて説明する. さらに応用として, 非スタンダードなクリフォードクライン形の構成問題を扱う. 本稿で紹介する結果は奥田隆幸氏 (広島大学) と東條広一氏 (理研) との共同研究 [9] に基づく.

## §1. 序

$G/H$ をリー群 $G$ の等質空間, $\Gamma$ を $G$ の離散部分群とする. 離散群 $\Gamma$ の $G/H$ への自然な左作用が固有不連続かつ固定点自由になる時, $\Gamma$ を $G/H$ の**不連続群**と呼び, 商空間 $\Gamma\backslash(G/H) \simeq \Gamma\backslash G/H$ の事を $G/H$ の**クリフォードクライン形**と呼ぶ. 不連続群の作用による商写像 $G/H \to \Gamma\backslash G/H$ は被覆写像であり, 商写像が $C^\omega$ 級になるような $C^\omega$ 級多様体の構造が $\Gamma\backslash G/H$ にただ一つ定まる. すなわち, クリフォードクライン形 $\Gamma\backslash G/H$ は $G/H$ と局所構造を共有する多様体 ($(G, G/H)$ 多様体) になる.

局所的条件が多様体の大域的性質にどの程度制限を与えるか？という基本的なテーマに基づき, 我々の研究は次の問題を動機とする.

**問題 1.1.** 等質空間 $G/H$ にはどの様なクリフォードクライン形 $\Gamma\backslash G/H$ が存在するか？換言すれば, 等質空間 $G/H$ にはどの様な不連続群があり得るか？

双曲空間 $\mathbf{H}^n = SO_0(1,n)/SO(n)$ の様に $H$ がコンパクトの場合, $G$ の離散部分群 $\Gamma$ の $G/H$ への作用は必ず固有不連続である. 一方で, 我々は主に $H$ が**非コンパクト**な場合に興味を持っている. この場合, $G$ の離散部分群 $\Gamma$ の $G/H$ への作用が必ずしも固有不連続ではなく, $\Gamma$ 軌道が集積してしまい, $\Gamma\backslash G/H$ が非ハウスドルフになり得る. 最も極端な例として, ド・ジッター空間 $\mathbf{dS}^n = SO(1,n)/SO(1,n-1)$ を取り上げてみると, $SO(1,n)$

2010 Mathematics Subject Classification(s): Primary 57S30, Secondary 22E40, 22F30, 30F35, 30F60.

理化学研究所の基礎科学特別研究員研究費の助成に基づく

*E-mail: kazuki.kannaka@riken.jp

の**無限**離散部分群の $\mathbf{dS}^n$ への作用は決して固有不連続ではない (Calabi–Markus [5]). この様に等方部分群 $H$ が非コンパクトの場合には,「$G/H$ への作用の固有不連続性」の条件が $G$ の離散部分群に屡々強い制約を課す.

一般の等質空間 $G/H$ に対する問題 1.1 の体系的研究は小林俊行氏による 1980 年代後半の研究に端を発し, それ以来様々なアプローチが取られてきた. 本稿では, 問題 1.1 に関連して,「曲面群の表現の変形」と「半単純リー環の冪零軌道」との結び付きを紹介し, **非スタンダード**なクリフォードクライン形の構成問題への応用を与える.

本稿の構成を述べよう. まず 2 節で小林による固有性判定法を簡単に復習し, 本稿で取り上げる問題を説明する. 次に 3 節で非スタンダードなクリフォードクライン形の構成に関する主定理を説明し, 証明のアイデアを簡単に解説する. さらに 4 節で曲面群の表現の変形についての結果を紹介する. 4 節は独立して読む事が出来る. 最後に 5 節でクリフォードクライン形とは別の方向性で我々の研究の展望を述べる.

**記号の約束**

- リー群 $G, H, L, \ldots$ のリー環はドイツ小文字 $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{l}, \ldots$ で表す事にする.
- 本稿を通して $\mathbf{G}$ を**連結**な実簡約代数群とし, 常に $G = \mathbf{G}(\mathbb{R})$, $G_{\mathbb{C}} = \mathbf{G}(\mathbb{C})$ とする.
- これ以降, 等質空間 $G/H$ は**簡約型**である事を仮定する. すなわち, $H$ は通常の位相に関して連結成分が有限であり, 簡約リー群 $G$ のあるカルタン対合で安定である.
- $\mathfrak{a}_G \subset \mathfrak{g}$ で $G$ の極大分裂可換部分代数を表し, $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}_G)$ の制限ルート系の $\mathfrak{a}_G$ に作用するワイル群を $W(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}_G)$ で表す. また, 閉集合からなるワイルの部屋 $\mathfrak{a}_G^+ \subset \mathfrak{a}_G$ を一つ固定する.
- $G$ の簡約部分群の極大分裂可換部分代数は必ず $\mathfrak{a}_G$ に含まれるように取る (その様なものは $W(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}_G)$ の作用の差を除けば一意に定まる).

## § 2.　背景と考察する問題

### § 2.1.　固有性判定法とスタンダードなクリフォードクライン形

非コンパクトな $H$ に対して問題 1.1 を扱う際は, $G$ の離散部分群の $G/H$ への作用の固有不連続性の判定が新たな困難となる事は前述の通りである. 小林は, 簡約リー群 $G$ のカルタン分解 $G = K \exp(\mathfrak{a}_G^+) K$ ($K$ は $G$ の極大コンパクト部分群) に関する射影 $\mu \colon G \to \mathfrak{a}_G^+$ (カルタン射影) を用いて作用の固有不連続性を判定する方法を与えた:

**事実 2.1** ( 小林 [13]). 離散部分群 $\Gamma \subset G$ に対して,

$$\Gamma \curvearrowright G/H \text{ が固有不連続 } \iff \forall \varepsilon > 0,\ \#(\mu(\Gamma) \cap N_\varepsilon(\mu(H))) < \infty.$$

ここで $N_\varepsilon(\cdot)$ でユークリッド空間 $\mathfrak{a}_G$ における $\varepsilon$-近傍を表すこととした.

右側の条件において, $\mu(H)$ は簡約リー群 $H$ の $KAK$ 分解から

$$\mu(H) = \mathfrak{a}_G^+ \cap (W(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}_G)\mathfrak{a}_H)$$

と簡単に計算出来る．一方で, $\mu(\Gamma)$ の計算は一般には難しい．カルタン射影 $\mu$ は固有写像なので $\mu(\Gamma)$ がユークリッド空間 $\mathfrak{a}_G$ における離散集合である事は分かるが, その分布の無限遠における振る舞い方の評価が事実 2.1 の右側の条件を確認するに当たって肝要である．事実 2.1 の（数ある内の一つの）応用として, $G/H$ が 3 次元反ド・ジッター空間 $\mathbf{AdS}^3 = O(2,2)/O(1,2)$ の場合に, 不連続群の '軌道の数え上げ' の観点からワイルドな性質を有する, 無限生成の自由群からなる不連続群の族が最近構成されている ([8]).

問題 1.1 への別のアイデアとして, 離散部分群の作用の固有不連続性の '連続類似' を考える事も屡々有用である．つまり, $G$ の連結な閉部分群の $G/H$ の作用の固有性を考えるのである．小林は事実 2.1 を $\Gamma$ が離散部分群ではない場合にも一般化しているが, ここではその特別な場合として, 簡約部分群の固有作用に関する判定法を挙げておく:

**事実 2.2** ( 小林 [12])**.** 簡約部分群 $L \subset G$ に対して,

$$L \curvearrowright G/H \text{ が固有} \iff \mathfrak{a}_L \cap (W(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}_G)\mathfrak{a}_H) = \{0\}.$$

事実 2.1 と事実 2.2 を比較しても分かるように, 離散部分群の作用の固有不連続性を直接扱うよりも, 連続類似を考える方が相対的に易しい．そこで, クリフォードクライン形の以下の特殊な構成方法を考える:

**観察 2.3.** *与えられた簡約型等質空間 $G/H$ に対して,*

**Step 1 (不連続群の '連続類似')** *$G$ の簡約部分群 $L$ で $G/H$ に固有に作用するものを探し,*

**Step 2** *$L$ の捩れ元無しの離散部分群 $\Gamma$ を探す.*

*この時, 自動的に $\Gamma$ は $G/H$ の不連続群である．以上の構成方法で得られるクリフォードクライン形 $\Gamma\backslash G/H$ (あるいは不連続群 $\Gamma$) は***スタンダード***と呼ばれる.*

## §2.2.　与えられた抽象群は等質空間の不連続群になりうるか？

前節の固有性判定法と '連続類似' のアイデアは問題 1.1 に大きな進展をもたらした．本稿ではこれまでの進展の一つを説明する．コンパクトクリフォードクライン形の存在問題に関しては重要であるが本稿では触れない.

まず小林 [14] に従って以下の記号を導入する.

**定義 2.4.** $\Gamma_0$ を可算群とする．この時 $\Gamma_0$ の $G$ への表現 $\rho\colon \Gamma_0 \to G$ であって, 次を満たすもの全体のなす集合を $\mathcal{R}(\Gamma_0, G, H)$ と表す:

- $\rho$ は単射.
- $\rho(\Gamma_0)$ は $G$ の離散部分群.
- $\rho(\Gamma_0)$ の $G/H$ への作用は固有不連続.

等質空間 $G/H$ が単連結の場合には, もし一つでも表現 $\rho \in \mathcal{R}(\Gamma_0, G, H)$ が存在すれば, 抽象群 $\Gamma_0$ をクリフォードクライン形 $\rho(\Gamma_0)\backslash G/H$ の基本群として幾何学的に実現出来る．そこで ($G/H$ が単連結でなくとも) 次の問題を考えることは自然だろう:

**問題 2.5.** 与えられた可算群 $\Gamma_0$ に対して, $\mathcal{R}(\Gamma_0, G, H) \neq \emptyset$ となるか？

固有性判定法 (事実 2.1, 2.2) を鍵として, 問題 2.5 に関しては次が分かっている:

- (小林 [12]) $\Gamma_0$ が自由アーベル群 $\mathbb{Z}^n$ の場合に,

$$\mathcal{R}(\mathbb{Z}^n, G, H) \neq \emptyset \iff \mathrm{rank}_{\mathbb{R}}(G) - \mathrm{rank}_{\mathbb{R}}(H) \geq n$$

  が成立する. また, $n = 1$ の場合, この条件が成立しない事と「有限群しか $G/H$ の不連続群になり得ない」(Calabi–Markus 現象) 事は同値である.
- (Benoist [1]) $\Gamma_0$ が非可換自由群 $F_n$ $(n \geq 2)$ の場合に,

$$\mathcal{R}(F_n, G, H) \neq \emptyset \iff \mathfrak{b}_G^+ \not\subset W(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}_G)\mathfrak{a}_H \tag{2.1}$$

  が成立する (右辺は $n$ に依存しない). ここで, $W(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}_G)$ の最長元 $w_0$ に対し, 閉錐 $\mathfrak{b}_G^+ = \{X \in \mathfrak{a}_G^+ \mid w_0(X) = -X\}$ を考えた.
- (奥田 [15]) $\Sigma_g$ を種数 $g > 1$ の向き付け可能な閉曲面として, $\Gamma_0$ がその基本群 $\pi_1(\Sigma_g)$ である場合を考える. $G/H$ が対称空間の場合には, 条件 (2.1) は $\mathcal{R}(\pi_1(\Sigma_g), G, H) \neq \emptyset$ が成立する事とも同値である.

上記の内, 特に小林 [12] と奥田 [15] の研究では, '連続類似' のアイデアが本質的に用いられた. 彼らはそれぞれ $L = \mathbb{R}^n$, $L = SL(2, \mathbb{R})$ の場合に小林の固有性判定法 (事実 2.2) を適用し, 観察 2.3 の様に $L$ の捩れ元無しの一様格子 $\Gamma$ (それぞれ $\mathbb{Z}^n$, $\pi_1(\Sigma_g)$ と同型になる) を取る事でスタンダードなクリフォードクライン形 $\Gamma\backslash G/H$ を構成したのである.

### §2.3. 非スタンダードなクリフォードクライン形

本稿では, スタンダード**ではない**クリフォードクライン形が存在するかどうかを問題にする. $\mathcal{R}(\Gamma_0, G, H)$ の以下の二つの部分集合を考える:

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{nst}(\Gamma_0, G, H) := \{\rho \in \mathcal{R}(\Gamma_0, G, H) \mid\ & \rho(\Gamma_0) \text{ を含む } G \text{ の任意の} \\ & \textbf{連結成分有限}\text{の閉部分群は } G/H \text{ に固有に作用}\textbf{しない}\} \\ \mathcal{R}_{zar}(\Gamma_0, G, H) := \{\rho \in \mathcal{R}(\Gamma_0, G, H) \mid\ & \rho(\Gamma_0) \text{ は } \mathbf{G} \text{ でザリスキ稠密 }\}\end{aligned}$$

大雑把に言えば, $\mathcal{R}_{nst}(\Gamma_0, G, H)$ は $\mathcal{R}(\Gamma_0, G, H)$ の内, '連続類似' のアイデアからは決して得られないもの全体の集合で, $\mathcal{R}_{zar}(\Gamma_0, G, H)$ は $\mathcal{R}(\Gamma_0, G, H)$ の内, 存在するならば最も 'generic' なもの全体の集合である.

問題 2.5 の続きとして, 本稿では以下の問題を取り上げる:

**問題 2.6.** 与えられた可算群 $\Gamma_0$ に対して, $\mathcal{R}_{nst}(\Gamma_0, G, H)$ や $\mathcal{R}_{zar}(\Gamma_0, G, H)$ は非空か?

注意. 問題 2.6 に関して,

- $H$ がコンパクトの場合, $G$ の $G/H$ への作用は固有だから, $\mathcal{R}_{nst}(\Gamma_0, G, H)$ は空集合である. 従って, $\mathcal{R}_{nst}$ に関する問題は $H$ が非コンパクトの場合に初めて意味を持つ.

- $H$ が非コンパクトの場合, $G$ が半単純なら $\mathcal{R}_{zar}(\Gamma_0, G, H) \subset \mathcal{R}_{nst}(\Gamma_0, G, H)$ である事が分かるが, 一般の簡約群 $G$ に対してはそうとは限らない.

問題 2.6 に関する先行研究を述べよう. $\mathcal{R}_{nst}(\mathbb{Z}^n, G, H) = \emptyset$ である事は実 Jordan 分解を用いれば比較的容易に分かり, また, 簡約群 $G$ が非可換ならば明らかに $\mathcal{R}_{zar}(\mathbb{Z}^n, G, H) = \emptyset$ である. 故に $\Gamma_0 = \mathbb{Z}^n$ の場合は問題 2.6 を考えてもあまり意味がない. 一方で抽象群 $\Gamma_0$ が非可換自由群 $F_n$ $(n \geq 2)$ の場合には, Benoist [1] が条件 (2.1) の下で, 十分大きい $n$ に対して $\mathcal{R}_{zar}(F_n, G, H) \neq \emptyset$ が成立する事を証明している.

我々は $\Gamma_0$ が**曲面群** $\pi_1(\Sigma_g)$ **である場合に**問題 2.6 への部分的解答を与える.

## § 3. 主定理と証明の方針

### § 3.1. 不連続群の微小変形と安定性

問題 2.6 へのアプローチとして, 「スタンダードな不連続群を微小変形する事でスタンダードでないものを構成する」という素朴なアイデアを採用する. 元々は小林 [14] や Fanny Kassel [10] がこのアイデアを適用する事で, スタンダードではない**コンパクト**クリフォードクライン形を構成したのであるが, ここではその詳細には触れない.

不連続群の ‘微小変形’ の定式化を小林 [14] に従って簡単に述べよう. 抽象群 $\Gamma_0$ に対して $G$ への表現全体のなす集合 $\mathrm{Hom}(\Gamma_0, G)$ に各点収束位相を与えた位相空間を考えよう. $\Gamma_0$ が有限生成ならば, この位相空間は局所コンパクト Hausdorff 空間である. さて, $\mathcal{R}(\Gamma_0, G, H)$ はその $G/H$ の不連続群としての実現全体の集合であったが, $\mathcal{R}(\Gamma_0, G, H)$ を位相空間 $\mathrm{Hom}(\Gamma_0, G)$ の部分空間と見做す. 不連続群としての実現 $\rho \in \mathcal{R}(\Gamma_0, G, H)$ をこの位相に関して摂動する事を考える.

不連続群の微小変形に際しては, その作用の固有不連続性が一般には崩れてしまう. しかし, 状況によっては任意の微小変形がその固有不連続性を保つ事がある. 数学的な定式化としては, 不連続群としての実現 $\rho \in \mathcal{R}(\Gamma_0, G, H)$ に対して, $\mathcal{R}(\Gamma_0, G, H)$ が $\rho$ の $\mathrm{Hom}(\Gamma_0, G)$ における近傍になる事がある. 小林 [14] は自身の固有性判定法 (事実 2.1) に基づき, 固有不連続性の ‘定量化’ を行う事で, この現象を初めて発見した. 以来, 固有不連続性の定量化のアイデアと共に, この固有不連続性の安定性定理は今もなお発展しているが, ここでは後のために Kassel [10] による定理を挙げておこう.

まず前提として, スタンダードなクリフォードクライン形を与える次の設定を考える:

**仮定 3.1.** $L$ を実階数 1 の線形単純リー群, $\Gamma_0$ を $L$ の捩れ元を持たない一様格子 (つまり, $L/\Gamma_0$ がコンパクトになる離散部分群) とする. さらに, $G/H$ が固有な $L$ 作用を有するとする. すなわち, リー群の準同型 $\rho\colon L \to G$ が存在して, $\rho$ を通した $L$ の $G/H$ への作用が固有である. この時, 観察 2.3 によって $\rho|_{\Gamma_0} \in \mathcal{R}(\Gamma_0, G, H)$ である事が分かる.

**事実 3.2** ([10, Theorem 1.3])**.** *仮定 3.1 の下で, $\rho|_{\Gamma_0}$ の固有不連続性は任意の微小変形で安定する. すなわち, $\mathcal{R}(\Gamma_0, G, H)$ が $\rho|_{\Gamma_0}$ の $\mathrm{Hom}(\Gamma_0, G)$ における近傍を与える.*

## § 3.2. 主定理と証明の方針

本節では抽象群 $\Gamma_0$ が曲面群 $\pi_1(\Sigma_g)$ の場合に, 問題 2.6 への部分的解答を与えよう. 我々は前節で説明した固有不連続性の安定性（事実 3.2）を $L = SL(2, \mathbb{R})$ の場合に適用する. $SL(2, \mathbb{R})$ の捩れ元無しの一様格子 $\Gamma_0$ は曲面群 $\pi_1(\Sigma_g)$ と同型である事に注意する.

まず, $\mathcal{R}_{nst}(\pi_1(\Sigma_g), G, H)$ について, 標語的に言えば, 「曲面群からなるスタンダードな不連続群は**必ず**非スタンダードなものへと変形出来る」事を証明した:

**定理 3.3.** *$H$ が非コンパクトで, かつ $L = SL(2, \mathbb{R})$ の場合に仮定 3.1 が成立するとする. 種数 $g$ が十分大きい時, $\rho|_{\pi_1(\Sigma_g)}$ は $\mathrm{Hom}(\pi_1(\Sigma_g), G)$ における $\mathcal{R}_{nst}(\pi_1(\Sigma_g), G, H)$ の閉包に属する. 特に $\mathcal{R}_{nst}(\pi_1(\Sigma_g), G, H) \neq \emptyset$ である.*

定理の仮定について, どの様なリー群準同型 $\rho\colon SL(2, \mathbb{R}) \to G$ を通して $SL(2, \mathbb{R})$ が $G/H$ に固有に作用するかが, 小林の固有性判定法 (事実 2.2) と冪零軌道のテクニックを組み合わせる事で調査出来る ([18, 19, 15, 2]). 与えられた簡約型等質空間 $G/H$ がいつも固有な $SL(2, \mathbb{R})$ 作用を持つとは限らないが, 定理の仮定を満たす例は数多く存在する.

定理 3.3 の証明は, $\rho|_{\pi_1(\Sigma_g)} \in \mathcal{R}(\pi_1(\Sigma_g), G, H)$ の微小変形の内, 出来る限りザリスキ閉包が大きい表現 $\varphi\colon \pi_1(\Sigma_g) \to G$ を構成する事によって為される (次節の定理 4.3 を参照). 固有不連続性の安定性定理（事実 3.2）から, $\varphi$ は $\mathcal{R}(\pi_1(\Sigma_g), G, H)$ に属する, 特に $\varphi(\pi_1(\Sigma_g))$ の $G/H$ への作用は固有不連続である. その一方で, $\varphi(\pi_1(\Sigma_g))$ のザリスキ閉包は $G/H$ へ固有には作用しない事が小林の固有性判定法 (事実 2.2) に基づき証明出来る. 定理 3.3 の証明にはそれだけでは足りないが, Chevalley のレプリカ ([6, Chapitre 2] 参照) を用いて「線形代数群」と「線形リー群」の差を補完する事で定理 3.3 は証明される.

次に $\mathcal{R}_{zar}(\pi_1(\Sigma_g), G, H)$ について, $G/H$ が**対称空間**である事を仮定して次を得た.

**定理 3.4.** 対称空間 $G/H$ が条件 (2.1) を満たすとする ( この条件は $\mathcal{R}(\pi_1(\Sigma_g), G, H) \neq \emptyset$ と同値であった ). この時大きい種数 $g$ に対して $\mathcal{R}_{zar}(\pi_1(\Sigma_g), G, H) \neq \emptyset$ が成立する.

定理の証明に際しては, 定理 3.3 の証明と同様に次節の定理 4.3 と固有不連続性の安定性定理が重要であるが, $\mathcal{R}(\pi_1(\Sigma_g), G, H)$ の全ての元がザリスキ稠密に微小変形出来る訳ではない事に注意されたい (この点に関しては次節を参照). $\mathcal{R}(\pi_1(\Sigma_g), G, H)$ の中で (ザリスキ稠密な表現へと微小変形出来る様な) 適切な表現を探す必要があり, この為に次の定理を適用した:

**事実 3.5** ( 奥田 [15, 16]). *対称空間 $G/H$ が条件 (2.1) を満たすとすると, $G/H$ は* **偶な** *$SL(2, \mathbb{R})$ の固有作用を有する.*

「偶な $SL(2, \mathbb{R})$」の定義については次節を参照されたい. この定理を用いて, 偶な $SL(2, \mathbb{R})$ の固有作用を見つけ, その曲面群への制限として得られる $\mathcal{R}(\pi_1(\Sigma_g), G, H)$ の元を次節の定理 4.3 を用いて微小変形する事でザリスキ稠密な曲面群の実簡約代数群 $G$ への表現が得られる. さらに固有不連続性の安定性定理（事実 3.2）から, 微小変形により得られた表現が $\mathcal{R}_{zar}(\pi_1(\Sigma_g), G, H)$ の元を定める事が分かり, 定理 3.4 が証明される.

## § 4.　曲面群の簡約群への表現

この節では前節の二つの定理の証明の鍵となる, 曲面群の有限次元表現の像のザリスキ閉包に関する結果を紹介する.

### § 4.1.　曲面群のスタンダードな表現の変形

向き付け可能な閉曲面 $\Sigma_g$ の基本群 $\pi_1(\Sigma_g)$ は曲面群と呼ばれる. 曲面群は $SL(2,\mathbb{R})$ の捩れ元を持たない一様格子として実現出来る為, $SL(2,\mathbb{R})$ の表現の制限として曲面群の表現が得られるが, ここではそれ以外の表現が存在するかどうかに興味がある. $SL(2,\mathbb{R})$ の有限次元表現を同値でない表現へと連続的に変形する事は出来ないが, その一様格子である曲面群の表現に関しては変形出来る事がポイントである.

曲面群の二つの表現が同値でない事を見るために, 表現の像のザリスキ閉包に注目する. ザリスキ閉包が代数群として同型でないならば, 二つの表現は同値ではないからである. $SL(2,\mathbb{R})$ の表現からの制限として得られる曲面群の表現に対して最も一般的な微小変形を探すために以下の問題を考える:

**問題 4.1.** リー群の準同型 $\rho\colon SL(2,\mathbb{R}) \to G$ が与えられた時, $\mathrm{Hom}(\pi_1(\Sigma_g), G)$ の各点収束位相の下で, 曲面群の表現 $\rho|_{\pi_1(\Sigma_g)}$ の十分近くにザリスキ稠密な表現が存在するか？

問題 4.1 への答えが No になる例を証明抜きで紹介しておこう. 次のリー群の準同型 $\rho\colon SL(2,\mathbb{R}) \to SU(p,q)$ $(p \geq q)$ を考える:

$$SL(2,\mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} SU(1,1) \xrightarrow{\text{diagonal}} SU(1,1)^q \xrightarrow{\text{standard}} SU(q,q) \xrightarrow{\text{standard}} SU(p,q).$$

この時曲面群の表現 $\rho|_{\pi_1(\Sigma_g)}$ に関して, 次の剛性定理が知られている:

**事実 4.2** ([3, 4])**.** 表現 $\rho|_{\pi_1(\Sigma_g)}$ の任意の微小変形 $\varphi \in \mathrm{Hom}(\pi_1(\Sigma_g), SU(p,q))$ は必ず $S(U(q,q) \times U(p-q))$ を経由する. 特に $p > q$ の時, 問題 *4.1* への答えは *No* である.

Kim–Pansu [11] は (種数 $g$ が十分大きいという仮定の下で) $G$ が古典型の実単純リー群の場合に, 曲面群から $G$ への一般の表現に対して, いつザリスキ稠密な表現へと連続変形出来るかどうかを調べ上げた. しかし $G$ が例外型の場合も含めると, 問題 4.1 に対する満足いく判定法は著者の知る限り未だ知られていないと思われる.

我々は Kim–Pansu [11] とは異なる方法で, $G$ が一般の実簡約代数群の場合に, 冪零軌道の言葉を用いて問題 4.1 への答えが Yes となる為の簡明な十分条件（系 4.4）を得た. その証明は $\rho|_{\pi_1(\Sigma_g)}$ の変形のアルゴリズムをある程度具体的に与えている点を強調したい.

### § 4.2.　主結果とその証明のアイデア

我々が得た定理を説明しよう. 問題 4.1 の設定で

$$\sigma \equiv \sigma(\rho) := \exp(\pi\sqrt{-1}\rho(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix})) \in G_{\mathbb{C}}.$$

とおく．$\sigma^2 = 1$ や $\sigma \in G$ である事は簡単に分かる．そこで, $\mathbf{G}^{\rho}_{\mathrm{even}}$ を中心化群 $\{x \in \mathbf{G} \mid \sigma x = x\sigma\}$ の Zariski 位相での単位元連結成分からなる実線形代数群とし, $G^{\rho}_{\mathrm{even}} = \mathbf{G}^{\rho}_{\mathrm{even}}(\mathbb{R})$ とする．$G^{\rho}_{\mathrm{even}}$ は $G$ と同じ実階数を有する対称部分群である ([9, Lemma 3.5]).

さらに記号の準備として, $V_{2i+1}$ を $SL(2,\mathbb{R})$ の唯一の $(2i+1)$ 次元の絶対既約な実表現とする．また, 問題 4.1 の設定で, $G$ のリー環 $\mathfrak{g}$ を $\mathrm{Ad} \circ \rho$ によって $SL(2,\mathbb{R})$ の実表現と見做したものを $\mathfrak{g}^{\rho}$ と書く．以下がこの節の主定理である (より一般的な主張については [9, Theorem 3.8] を参照していただきたい):

**定理 4.3.** *問題 4.1 の設定で, 閉曲面 $\Sigma_g$ の種数 $g$ に関する条件*

$$g \geq \sum_{i \in \mathbb{N}} [\mathfrak{g}^{\rho} : V_{2i+1}] \tag{4.1}$$

*を仮定する．この時, $\rho|_{\pi_1(\Sigma_g)}$ に十分近い表現 $\varphi \in \mathrm{Hom}(\pi_1(\Sigma_g), G)$ であって $\varphi(\pi_1(\Sigma_g))$ のザリスキ閉包が $\mathbf{G}^{\rho}_{\mathrm{even}}$ に一致する様なものが存在する．*

$G_{\mathbb{C}}$ の連結性から, $G = G^{\rho}_{\mathrm{even}}$ である事と, $\rho$ に付随する冪零軌道

$$\mathrm{Ad}(G_{\mathbb{C}})\rho(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) \subset \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$$

が Collingwood–McGovern [7, page. 53] の意味で偶である事が同値であると分かる．そこで, この条件が成立する時リー群準同型 $\rho\colon SL(2,\mathbb{R}) \to G$ を**偶**であると言う事にする．冪零軌道の組み合わせ論を通して偶であるかどうかは容易に判定でき, 従って定理 4.3 によって問題 4.1 が Yes となる為の組み合わせ論的十分条件が得られる:

**系 4.4.** *$\rho$ が偶ならば, 種数の条件 (4.1) の下で問題 4.1 への答えは Yes となる．*

注意．系 4.4 の逆は不成立であり, 系 4.4 は問題 4.1 への最善の結果を与えない．実際, Kim–Pansu [11, Theorem 1] を用いれば, 問題 4.1 への答えが Yes となる偶ではない $\rho$ が構成出来る．しかし, 例えば事実 4.2 の設定では, $\rho$ が偶である事と $\rho|_{\pi_1(\Sigma_g)}$ がザリスキ稠密な表現へと変形出来る事 ($p = q$ の場合) は同値である．

定理 4.3 の証明では, ‘bending construction’ を少し拡張した構成方法を用いる．以下ではそのアイデアの簡単な部分を説明する．

まず曲面群 $\pi_1(\Sigma_g)$ の生成元と関係式の次の標準的な取り方を思い出す:

$$\pi_1(\Sigma_g) = \langle a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g \mid [a_1, b_1] \cdots [a_g, b_g] = 1 \rangle. \tag{4.2}$$

上記の生成元と関係式を用いて, 以下の補題を $\varphi = \rho|_{\pi_1(\Sigma_g)}$ と適切な $X_1, \ldots, X_g \in \mathfrak{g}$ に対して適用する事で $\rho|_{\pi_1(\Sigma_g)}$ の所望の微小変形を構成する事が出来るが詳細は省略する．

**補題 4.5** ([9, Lemma 3.13 (i)])**.** 群準同型 $\varphi\colon \pi_1(\Sigma_g) \to G$ と $X_1, \dots, X_g \in \mathfrak{g}$ が

$$\operatorname{Ad}(\varphi(a_k))(X_k) = X_k \quad (1 \leq k \leq g) \tag{4.3}$$

を満たすとする. この時, 各 $t \in \mathbb{R}$ に対して

$$\varphi_t(a_k) := \varphi(a_k),\ \varphi_t(b_k) := \varphi(b_k)e^{tX_k} \tag{4.4}$$

とすると, $\varphi_t$ は $\pi_1(\Sigma_g)$ から $G$ への群準同型を定める.

証明. 条件 (4.3) と式 (4.4) から, 任意の $1 \leq k \leq g$ に対して

$$[\varphi_t(a_k), \varphi_t(b_k)] = [\varphi(a_k), \varphi(b_k)] = \varphi([a_k, b_k])$$

となり,

$$[\varphi_t(a_1), \varphi_t(b_1)] \cdots [\varphi_t(a_g), \varphi_t(b_g)] = \varphi([a_1, b_1] \cdots [a_g, b_g]) = 1$$

を得る為, 曲面群の関係式 (4.2) から, $\varphi_t$ は曲面群からの群準同型を定める事が分かる. □

## §5. 最後に

最後にクリフォードクライン形とは別の方向での展望を述べる. 著者は以下に示す研究分野に明るい訳ではなく, 専門家がご覧になった際は是非ご意見をいただきたい.

まず, 定理 3.4 を $H$ がコンパクトの場合に適用すると, 次を得る事に注意する:

**定理 5.1.** 実簡約群 $G$ が非コンパクト単純成分を持つならば, $G$ にはザリスキ稠密かつ曲面群と同型な離散部分群が存在する.

近年数論的観点から, $\mathbb{Q}$ 上の簡約代数群 $\mathbf{G}$ に対して, $\mathbf{G}(\mathbb{Z})$ の指数無限だがザリスキ稠密な部分群 (thin group) の具体的構成が興味を持たれている様である (Sarnak [17] 参照). 特に幾つかの簡約代数群 $\mathbf{G}$ に対しては, 曲面群と同型な thin group が構成されている ([20, Section 12] やそこで引用されている文献を参照していただきたい). 定理 5.1 の証明で用いたアイデアがこの方面の研究に将来役立つ事を期待して本稿を終える事とする.

## 参考文献


[1] Yves Benoist, *Actions propres sur les espaces homogènes réductifs*, Ann. of Math. (2) **144** (1996), no. 2, 315–347. MR 1418901

[2] Maciej Bocheński, Piotr Jastrzębski, Takayuki Okuda, and Aleksy Tralle, *Proper $SL(2,\mathbb{R})$-actions on homogeneous spaces*, Internat. J. Math. **27** (2016), no. 13, 1650106, 10. MR 3589656

[3] Steven B. Bradlow, Oscar García-Prada, and Peter B. Gothen, *Surface group representations and* $\mathrm{U}(p,q)$*-Higgs bundles*, J. Differential Geom. **64** (2003), no. 1, 111–170. MR 2015045

[4] Marc Burger, Alessandra Iozzi, and Anna Wienhard, *Surface group representations with maximal Toledo invariant*, Ann. of Math. (2) **172** (2010), no. 1, 517–566. MR 2680425

[5] E. Calabi and L. Markus, *Relativistic space forms*, Ann. of Math. (2) **75** (1962), 63–76. MR 133789

[6] Claude Chevalley, *Théorie des groupes de Lie. Tome II. Groupes algébriques*, Actualités Scientifiques et Industrielles [Current Scientific and Industrial Topics], No. 1152, Hermann & Cie, Paris, 1951. MR 0051242

[7] David H. Collingwood and William M. McGovern, *Nilpotent orbits in semisimple Lie algebras*, Van Nostrand Reinhold Mathematics Series, Van Nostrand Reinhold Co., New York, 1993. MR 1251060

[8] Kazuki Kannaka, *Counting orbits of certain infinitely generated non-sharp discontinuous groups for the anti-de sitter space*, Selecta Math. (N.S.) **30** (2024), no. 11.

[9] Kazuki Kannaka, Takayuki Okuda, and Koichi Tojo, *Zariski dense discontinuous surface groups for reductive symmetric spaces*, arXiv:2309.08331v1, 2023.

[10] Fanny Kassel, *Deformation of proper actions on reductive homogeneous spaces*, Math. Ann. **353** (2012), no. 2, 599–632. MR 2915550

[11] Inkang Kim and Pierre Pansu, *Flexibility of surface groups in classical simple Lie groups*, J. Eur. Math. Soc. (JEMS) **17** (2015), no. 9, 2209–2242. MR 3420506

[12] Toshiyuki Kobayashi, *Proper action on a homogeneous space of reductive type*, Math. Ann. **285** (1989), no. 2, 249–263. MR 1016093

[13] ———, *Criterion for proper actions on homogeneous spaces of reductive groups*, J. Lie Theory **6** (1996), no. 2, 147–163. MR 1424629

[14] ———, *Deformation of compact Clifford-Klein forms of indefinite-Riemannian homogeneous manifolds*, Math. Ann. **310** (1998), no. 3, 395–409. MR 1612325

[15] Takayuki Okuda, *Classification of semisimple symmetric spaces with proper* $SL(2,\mathbb{R})$*-actions*, J. Differential Geom. **94** (2013), no. 2, 301–342. MR 3080484

[16] ———, *Abundance of nilpotent orbits in real semisimple Lie algebras*, J. Math. Sci. Univ. Tokyo **24** (2017), no. 3, 399–430. MR 3700488

[17] Peter Sarnak, *Notes on thin matrix groups*, Thin groups and superstrong approximation, Math. Sci. Res. Inst. Publ., vol. 61, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2014, pp. 343–362. MR 3220897

[18] Katsuki Teduka, *Proper actions of* $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ *on* $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$*-homogeneous spaces*, J. Math. Sci. Univ. Tokyo **15** (2008), no. 1, 1–13. MR 2422587

[19] ———, *Proper actions of* $\mathrm{SL}(2,\mathbf{C})$ *on irreducible complex symmetric spaces*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **84** (2008), no. 7, 107–111. MR 2450061

[20] Anna Wienhard, *An invitation to higher Teichmüller theory*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians—Rio de Janeiro 2018. Vol. II. Invited lectures, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2018, pp. 1013–1039. MR 3966798