

メキシカンハット型ポテンシャル加振系の回転運動

富永 広貴[†] 宮崎 修次^{††}

[†] 佐賀大学医学部 〒849-8501 佐賀県佐賀市鍋島5-1-1

^{††} 京都大学情報学研究科 〒606-8501 京都府京都市左京区吉田本町

E-mail: [†]hirotaka@cc.saga-u.ac.jp, ^{††}syuji@acs.i.kyoto-u.ac.jp

あらまし 様々な実験、数理モデルを問わず見られる一方向加振により生じる回転運動を非線形力学系の観点から捉え直し、そこに普遍性や一般性が見られないかと期待して研究している。できるだけ単純な力学系としてメキシカンハット型ポテンシャル加振系を導入し、数値シミュレーションを行ったところ、一方向回転運動の回転方向制御、カオス拡散、フラクタルベイスン境界などの非線形現象が見られる事がわかった。

キーワード 一方向加振系, 一方向回転運動, カオス拡散, フラクタルベイスン境界

Rotational motion of Mexican hat type potential excitation system

Hirota TOMINAGA[†] and Syuji MIYAZAKI^{††}

[†] Faculty of Medicine, Saga University Nabeshima 5-1-1, Saga, 849-8501 Japan

^{††} Graduate School of Informatics, Kyoto University Yoshida-Honmachi, Sakyo-ku, Kyoto, 606-8501 Japan

E-mail: [†]hirotaka@cc.saga-u.ac.jp, ^{††}syuji@acs.i.kyoto-u.ac.jp

Abstract We are researching the rotational motion caused by unidirectional excitation seen regardless of various experiments and mathematical models from the viewpoint of nonlinear dynamical system and expecting universality and generality to be seen there. Numerical simulation was carried out using the Mexican hat type potential excitation system as the simplest dynamical system and it was found that the nonlinear phenomena of the rotational direction control of the unidirectional rotational motion, the chaos diffusion, and the fractal basin boundary can be seen.

Key words Unidirectional excitation, ballistic rotational motion, Chaotic diffusion, Fractal basin boundary

1. はじめに

メキシカンハット型ポテンシャルに水平方向に周期外力を加えその振幅を徐々に大きくしていくと、ポテンシャル中の粒子は、ポテンシャルの底に沿って回転運動を始める。現実の系との対応を考えて、摩擦として速度に比例する抵抗の項を入れてやれば、この系は散逸力学系となる。ポテンシャルは円周方向に対称な為、その回転運動が右回りになるか左回りになるかは位置座標²、速度²、合計4つの初期条件の与え方によって決まることになる。このような運動は、フラフープの回転[1]など最初に方向を決めて回転させるような場合に対応していると考えられる。このような単純な系であっても、オンオフ関欠性カオス、カオス拡散などのカオス現象や一方向回転運動で右回転・左回転する初期値領域が綺麗な境界で分かれず、フラクタルな境界(fractal basin boundary)を持つようなパラメータ領域が存在する事など、非線形力学系の観点から見ると色々面白い現象が見られる[2]。回転対称性がある場合は、一方向回転の回転方向を決めるのは初期値以外

考えられないが、fractal basin boundaryを持つパラメータ領域の場合、どちらに回転するのは殆ど予測がつかなくなる。

ところで、ボルト・ナット加振系[3]や伝承玩具のガリガリトンボ[4]などは、加振体の当て方で回転方向を制御している。これらの現象はかなりロバストであり、ボルト・ナット加振系などは重力の影響も無視でき、加振体を当てる角度によってのみ回転方向をコントロールすることができる[5],[6]。そこで、メキシカンハット型ポテンシャルに外部パラメータで回転方向を制御する仕組みを組み込むためにポテンシャルの底の円周に沿って cosine 項をごく僅かに加えて(ポテンシャルの谷の深さの1/100程度)回転対称性を破ってやると、周期外力の加振方向を外部パラメータにして回転方向を制御できる事がわかってきた[7]~[10]。ここにおいて、我々は様々な一方向加振による回転運動を表す基本的なモデル力学系として、このメキシカンハット型ポテンシャル加振系を考えることにする。同様のポテンシャルを使って一方向回転を起こす系としては、ポテンシャル自体にラチェット様の完全に非対称な項を組み込んだ分子モーターのモデルなどもあるが[11]、我々の導入し

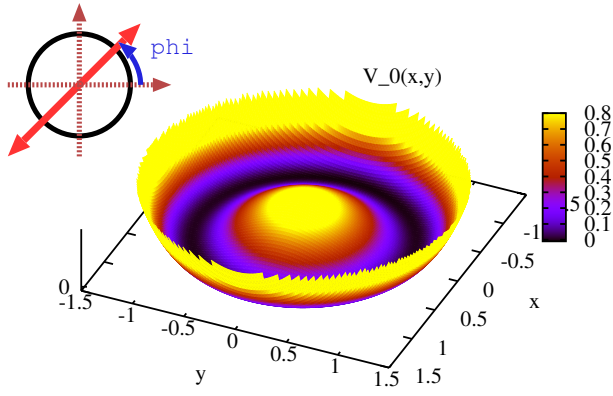


図1 メキシカンハット型ポテンシャル

たモデルにはポテンシャルの形状に予め右回転左回転を決めるような項は含まれていない。外部パラメータと初期条件によって回転運動を制御するだけである。このように外部パラメータで回転運動をコントロールできることは工学的利用価値も高いであろう。

2. メキシカンハット型ポテンシャル加振系

メキシカンハット型ポテンシャル加振系は、次式の振動外力を含んだポテンシャル (図 1) 中の粒子の運動方程式である。

$$V(X, Y, t) = V_0(X, Y) + h \cos \Omega t (\mathbf{e} \cdot \mathbf{r}) \quad (1)$$

$$V_0(X, Y) = \{1 - (X^2 + Y^2)\}^2 - \frac{a}{2}(X^2 - Y^2) \quad (2)$$

ここで、 a は動径方向のポテンシャルの深さに対する円周方向のポテンシャルの凸凹の大きさを表し、動径方向の谷の深さの $1/100$ 程度に取る。 $\Omega, h, \mathbf{e}$ はそれぞれ振動外力の角振動数、振幅と加振方向の単位ベクトルである。加振方向は図 1 のように $\phi(\text{phi})$ で表す。 V_0 を極座標で表わせば

$$V_0(r, \theta) = (1 - r^2)^2 - \frac{a}{2}r^2 \cos 2\theta \quad (3)$$

と書ける。 $a = 0$ で動径方向 $r = 1$ にポテンシャルの底があり、よって回転方向 (θ) に $O(a)$ 程度の cosine 関数による凹凸が存在する形になっていることがわかる。運動方程式は粘性摩擦を仮定して次式で与えられる。

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\nabla V(X, Y, t) - \mu \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad (4)$$

ここで、 m は粒子の質量、 μ は粘性摩擦係数である。図 2(a)~(c) は、 $m = 1, a = 0.01, \mu = 0.01, \Omega = 0.1\pi, \phi = 0.25\pi$ の θ の時系列と (X, Y) 座標上の軌道である。外力の振幅 h が大きくなるにつれ、周期運動、一方向回転運動、カオス拡散運動が見られる。軌道図内の中央の斜線は加振角度 ϕ に対応している。また、青い点は振動外力の周期毎に取った点 (Poincaré 断面) を表している。

3. 一方向回転運動

図 2(b) のパラメータ ($m = 1, a = 0.01, \mu = 0.01, \Omega =$

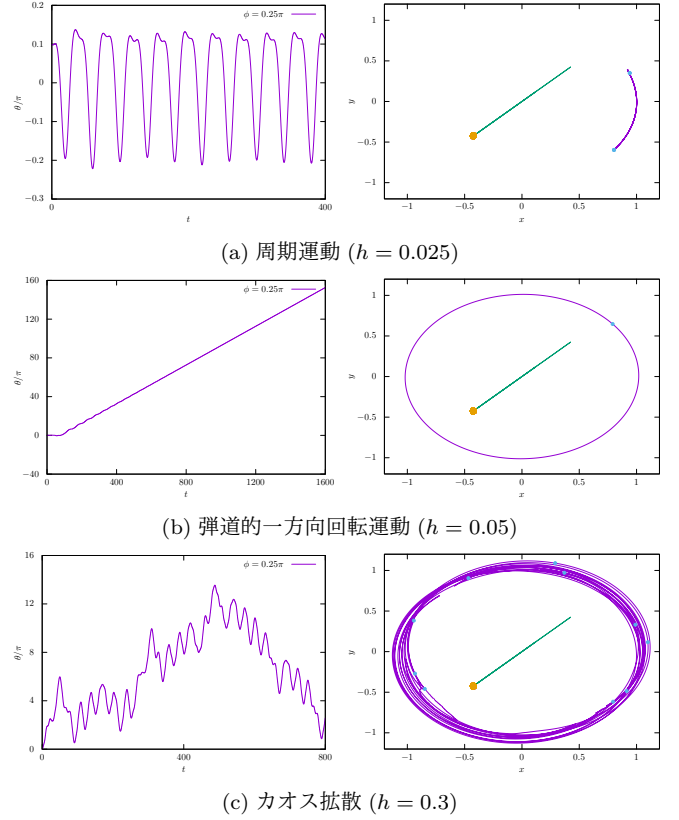


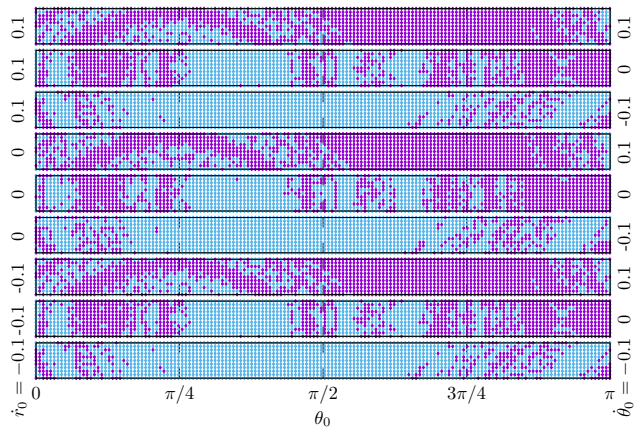
図2 時系列と軌道

$0.1\pi, h = 0.05$) で、加振角度 ϕ を、 $0 \sim \pi$ に変化させて様々な初期値に対して一方向回転運動の回転方向を調べた。図 3 に $\phi = 0.25\pi, 0.75\pi$ の時の正負回転に対応する初期値分布を示す。図中、赤が正方向、青が負方向であり、横軸は $\theta_0 = \theta(0) = 0 \sim \pi$ 、縦軸は $r_0 = r(0) = 0.95 \sim 1.05$ にとり、9 段のグラフは下から $(\dot{r}(0), \dot{\theta}(0)) = (-0.1, -0.1), (-0.1, 0), (-0.1, 0.1), (0, -0.1), (0, 0), (0, 0.1), (0.1, -0.1), (0.1, 0), (0.1, 0.1)$ である。このように、このパラメータでは加振角度に関わらず回転方向は初期値に依存している事がわかった。また、その正負回転を分ける初期値領域の境界はまだ十分に検討はしていないがフラクタル的であることもわかった。

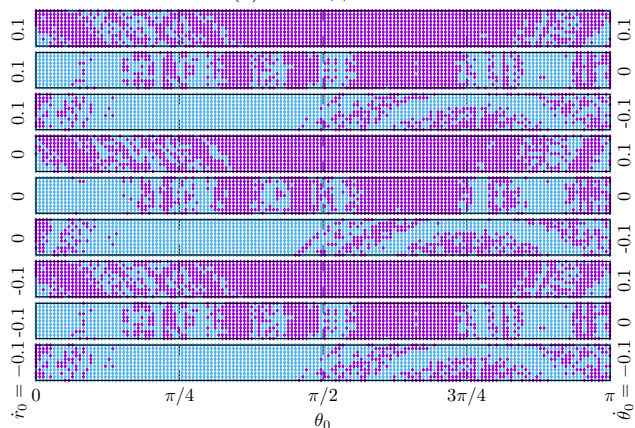
一方向回転運動は主に周期外力に駆動されたものであるが、この結果は慣性項 $\left(m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2}\right)$ の影響が大き過ぎたためであると考えられる。そこで、他のパラメータは変えずに質量 $m = 0.02$ にしたのが、図 4 である。全ての初期値に対して、 $\phi = 0.25\pi$ で負方向に回転しているのがわかる。このように質量を小さくして相対的にポテンシャルによる力の効果を大きくすると、初期値によらず加振方向で回転方向を決めることができるようになる。即ちこの系はパラメータを適切に選ぶことで、ボルト・ナット加振系に見られるようなロバストな回転運動を再現できるということを意味する。

4. カオス拡散

図 2(c) を見るとわかるように、このパラメータでは軌道がカオス的に正負回転を起こして拡散している (カオス拡散 [12])。



(a) $m = 1; \phi = 0.25\pi$



(b) $m = 1; \phi = 0.75\pi$

図 3 正負回転の初期値分布 ($m = 1$):赤が正方向, 青が負方向。 $\theta_0 = 0 \sim \pi$ (横軸), $r_0 = 0.95 \sim 1.05$ (縦軸), 下から $(\dot{r}_0, \dot{\theta}_0) = (-0.1, -0.1), (-0.1, 0), (-0.1, 0.1), (0, -0.1), (0, 0), (0, 0.1), (0.1, -0.1), (0.1, 0), (0.1, 0.1)$

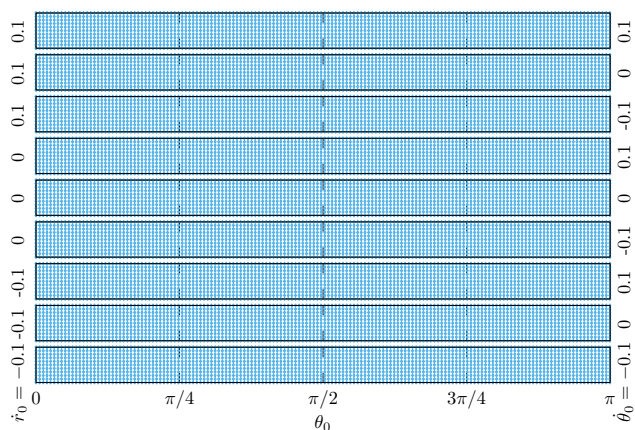
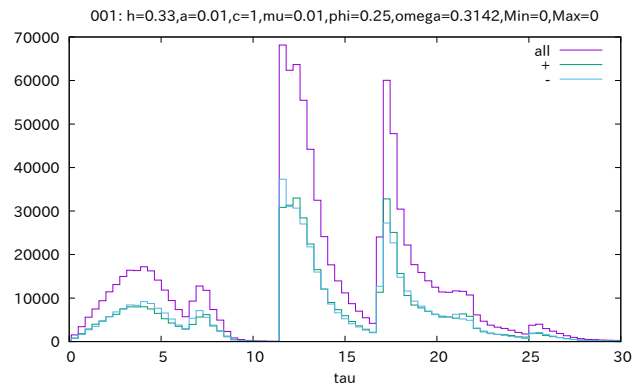
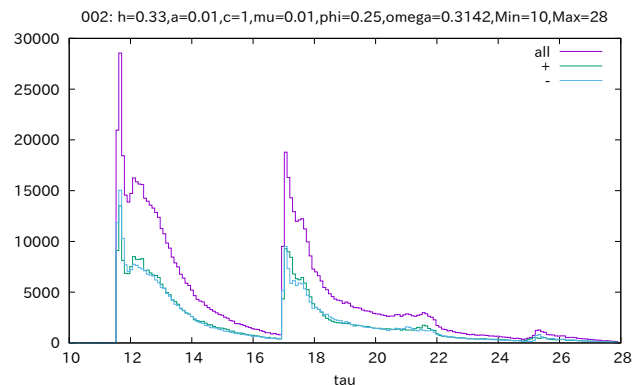


図 4 正負回転の初期値分布 ($m = 0.02, \phi = 0.25\pi$)

図 5 に正負回転の継続時間 τ の分布を示した。緑は正方向, 青は負方向, 赤は正負両方である。系の対称性から自明であるが正負で違いは無い。 $\tau \sim 3$ 付近の分布は Gaussian と思われるが, 図 5(b) の拡大図を見てもわかる通り $\tau \sim 12, 17$



(a) 全体図



(b) 拡大図

図 5 カオス拡散の同一方向回転継続時間分布 (緑:正方向, 青:負方向, 赤:両方)

付近の分布は Gaussian から外れた面白い分布をしている事がわかった。

5. おわりに

メキシカンハット型ポテンシャル加振系を導入し, 数値計算により運動形態のパラメータによる変化を調べたところ, 振動外力の振幅 h が大きくなるにつれ, 周期運動, 一方向回転運動, カオス拡散運動等が見られる事がわかった。慣性項の影響が大きい場合, 同一方向回転運動の回転方向は加振方向よりむしろ初期値に依存する事がわかったが, 質量を小さくして相対的に慣性項の影響を低減すれば, 加振方向による回転方向制御が可能な事を示唆する結果を得た。カオス拡散が起こる領域では, 正負回転の継続時間分布に非ガウスの分布が見られたが, その理論的解明は今後の課題である。加振によって発生する回転運動は, 他にも, 粉体 [13], 流体, 力学系を問わず様々な系で研究されているが, 個々の現象を普遍的な枠組みで捉えられる事を期待している。

文 献

- [1] 吉武 裕, 原田 晃, 福島明寿, 坂口欣也, 石橋 司, “水平面内におけるフラフープの運動: 周期解とカオス (機械力学, 計測, 自動制御),” 日本機械学会論文集. C 編, vol.71, no.707, pp.2172–2179, jul 2005. <http://ci.nii.ac.jp/naid/110006264783/>
- [2] H. Tominaga, H. Fujisaka, and W. Just, “On-off intermittency associated with the breakdown of one-dimensional motion,” Journal of the Physical Society of Japan, vol.66, no.11,

- pp.3406–3410, 1997. <http://dx.doi.org/10.1143/JPSJ.66.3406>
- [3] <http://www9.nhk.or.jp/gatten/archives/P20100512.html>
 - [4] 戸田盛和, おもちゃの科学 (1), 日本評論社, 1995.
 - [5] 富永広貴, 宮崎修次, “加振されたボルトに取り付けられたナットの弾道的運動 (非線形問題),” 電子情報通信学会技術研究報告 = IEICE technical report : 信学技報, vol.115, no.425, pp.7–9, jan 2016. <http://ci.nii.ac.jp/naid/40020736813/>
 - [6] 富永広貴, 宮崎修次, “加振されたボルト上のナットの運動とその現象論的モデル系,” 形の科学会誌 = Bulletin of the Society for Science on FORM, vol.29, no.2, pp.175–176, 2014. [http://katachi-jp.com/paper/29\(2\).pdf](http://katachi-jp.com/paper/29(2).pdf)
 - [7] 富永広貴, 宮崎修次, “加振されたボルトに取り付けられたナットの運動に関する現象論的モデル : 二次元周期外力系における弾道的運動とカオスの拡散,” 電子情報通信学会技術研究報告. NLP, 非線形問題, vol.113, no.69, pp.43–46, may 2013. <http://ci.nii.ac.jp/naid/110009768976/>
 - [8] 富永広貴, 宮崎修次, “8ppsa-46 加振されたボルトに取り付けられたナットの運動に関する現象論的モデル iii(8ppsa 領域 11 ポスターセッション, 領域 11(物性基礎論・統計力学・流体物理・応用数学・社会経済物理)),” 日本物理学会講演概要集, vol.69, no.2, p.142, aug 2014. <http://ci.nii.ac.jp/naid/110009875612/>
 - [9] 富永広貴, 宮崎修次, “22ppsb-38 一次元的加振により発生する回転運動の制御,” 日本物理学会講演概要集, vol.70, no.1, p.3071, mar 2015. <http://ci.nii.ac.jp/naid/110009992345/>
 - [10] 富永広貴, 宮崎修次, “20ppsa-38 加振されたボルト上のナットの回転運動の発生機構,” 日本物理学会講演概要集, vol.71, no.1, p.2937, mar 2016. <http://ci.nii.ac.jp/naid/110010058856/>
 - [11] H. Tutu and Y. Hoshino, “Design of two-tooth unidirectional rotary-ratchet molecular machines driven by linearly polarized ac fields,” Phys. Rev. E, vol.84, p.061119, Dec. 2011. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.84.061119>
 - [12] S. Wiggins, Chaotic Transport in Dynamical Systems, Springer-Verlag, Berlin, 1991.
 - [13] M. Fujii, A. Awazu, and H. Nishimori, “Segregation-pattern reorientation of a granular mixture on a horizontally oscillating tray,” Phys. Rev. E, vol.85, p.041304, April 2012. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.85.041304>