

京都大学	博士（理 学）	氏 名	童 焜 尘 Tong Yichen
論文題目	Self-closeness numbers of rational mapping spaces (有理写像空間の自己親密数)		
(論文内容の要旨)			
連結なCW複体 X の自己親密数 $N\mathcal{E}(X)$ とは、任意に与えられた自己写像 $f: X \rightarrow X$ の誘導写像 $f_*: \pi_k(X) \rightarrow \pi_k(X)$ が $k \leq n$ のとき同型写像なら、必ず f がホモトピー同値写像となるような最小の整数 n として定義される。例えば、X が n 次の Postnikov 切断、つまり、$k > n$ のとき $\pi_k(X) = 0$ をみたすとき、$N\mathcal{E}(X) \leq n$ となる。また、X が単連結なら Hurewicz の定理より $N\mathcal{E}(X) \leq \dim X$ が成り立つ。これらの例より、自己親密数は空間の複雑さや剛性を表すホモトピー不変量であると言える。自己親密数の定義は非常に素朴であり、重要な不変量であることは明らかだが、それが導入されたのは 2015 年であり、研究の歴史は浅く、まだわかっていないことが多い。例えば、上記の次元による評価のように自己親密数の研究は主に単連結な有限次元空間に対して行われおり、単連結や有限次元でない場合の結果は多くない。(Tong さんは球面の有限群による商空間などを含む非単連結な空間の自己親密数に関する結果を次の論文で発表している。Self-closeness numbers of non-simply-connected spaces, Homology, Homotopy Appl. 25 (2023), 21-36) また、局所化や有理化といったテクニックに関してもわからないことが多く、特に、有理ホモトピー論の観点からの研究が期待されている。 M を向きづけられた連結 n 次元閉多様体 (もしくはより一般の n 次元有理 Poincaré 複体) とする。Tong Yichen さんは、本論文で写像空間 $\text{Map}(M, S^n)$ の連結成分 (無限次元空間) の有理化の自己親密数に関して研究し、そのホモトピー型を分類した。写像空間の連結成分のホモトピー型の研究は 1940 年代の Whitehead の研究にまでさかのぼり、現在でも盛んに行われている。特に、この分類問題と (高次) Whitehead 積は密接に関係し、群作用とファイバーワイズ構造との同値性 (古典的な分類定理はすべてこの同値性である) を具体的に解析する際に、この関係は非常に重要な役割を果たす。実際、この関係は本論文においても効果的に用いられている。 写像空間 $\text{Map}(M, S^n)$ の連結成分は、Hopf の写像度定理より、写像 $M \rightarrow S^n$ の写像度と対応する。つまり、各連結成分は写像度の高次ホモトピーに関する情報を有することがわかる。しかし、この連結成分のホモトピー型の分類は非常に難しく、現在も未解決である。そこで、問題を単純化するために各連結成分を有理化			

し、そのホモトピー型の分類を考える．写像度 d の連結成分の有理化を $X(d)$ で表す．写像 $S^n \rightarrow S^n$ は写像度がゼロでなければ有理ホモトピー同値なので、 $dd' \neq 0$ なら $X(d)$ と $X(d')$ はホモトピー同値となる．したがって、問題は $X(0)$ と $X(1)$ がホモトピー同値かどうかということに帰着される． n が奇数のとき、 S^n の有理化は $K(\mathbb{Q}, n)$ となるので、 $X(0)$ と $X(1)$ はホモトピー同値であることがすぐにわかる．したがって、以下、 n は偶数とする．Hansen は $X(0)$ と $X(1)$ がホモトピー同値でないことを Postnikov 分解の代数的モデルを調べることで証明し、問題は解決された．しかし、Hansen の手法は非常に複雑かつ特殊であり、これ以外の問題に応用できない点で不満足である．特に、特定のホモトピー不変量によってホモトピー型が区別できないという点が問題視されてきた．そこで、Tong さんは無限次元空間の自己親密数の有理ホモトピー論的研究の出発点として、 $X(0)$ と $X(1)$ のホモトピー型が自己親密数で区別できるのかという問題を選んだ．

本論文の主定理は以下の通りである．多様体 M が原始的とは、 $k < n$ のとき $H^k(M; \mathbb{Q})$ が $\tilde{H}^*(M; \mathbb{Q})^2$ に含まれないことを意味する．また、 $d(M)$ を $k > n/2$ かつ $H^k(M; \mathbb{Q}) \neq 0$ をみたす最小の整数 k とする．

定理 n が偶数のとき

$$N\mathcal{E}(X(1)) = 2n - 1, \quad N\mathcal{E}(X(0)) = \begin{cases} n & M \text{ は原始的である} \\ d(X) & M \text{ は原始的でない} \end{cases}$$

が成り立つ．特に、 $X(0)$ と $X(1)$ はホモトピー同値でない．

(続紙 2)

(論文審査の結果の要旨)

Tong さんは写像空間の代数的モデルとしてもっともポピュラーな Brown-Sczarbaモデルを $X(d)$ に対して具体的に書き下すことで上記の定理を証明した. その鍵となったのは, 多様体 M の Poincaré 双対性を用いて $X(d)$ の Brown-Sczarba モデルの関係式を記述したことと, 多様体 M の交差形式が $X(d)$ のある Whitehead 積をコントロールすることを発見したことである. 特に, これらを用いて $X(1)$ を S^{2n-1} と $2n - 1$ よりも次元の低い空間の直積に分解することに成功し, 上記の定理を得

た. この手法は他の写像空間に対しても有効であり, 今後の研究にもつながるものである.

よって、本論文は博士 (理学) の学位論文として価値あるものと認める. また, 論文内容とそれに関連した事項について令和 6 年 7 月 12 日に試問を行った結果, 合格と認めた.

要旨公表可能日: 年 月 日以降