円内接多角形問題について – 複素平面上の対称式の利用

Applying symmetry expressions on the complex plane to the problems of cyclic polygons

筑波大学 図書館情報メディア系　　森継 修一 [*1]
Shuichi Moritsugu
Institute of Library, Information and Media Science
University of Tsukuba

Abstract

This paper describes computations of the relations between the circumradius R and area S of cyclic polygons given by the lengths of the sides. The classic results of Heron and Brahmagupta clearly show that the product of R and S is expressed by the lengths of the sides for triangles and cyclic quadrilaterals. In the author's previous paper (2022), the similar *integrated formulae* of the circumradius and the area for cyclic heptagons were computed by the method of numerical interpolation, consuming about 17 days of CPU time. In contrast, we consider the symmetric expressions on the complex plane according to Robbins' formulation, and try to apply elimination by resultants. As a result, we have succeeded in the computation for the cyclic heptagons, with only 3 hours of CPU time, where the result should be a polynomial equation in $z = 4SR$ with degree 38 and 31,590 terms.

1 序

本研究では，ユークリッド幾何の古典的な問題である円内接多角形問題 (図 1) を扱う．すなわち，円に内接する n 角形の各辺の長さを $a_1, a_2, \ldots, a_n$ としたとき，n 角形の面積 S，外接円の半径 R，さらに R と S の関係を辺長 a_i の式で表わせ，という問題である．

古典的には，三角形 ($n = 3$) の場合の Heron の公式 (1 世紀)，円内接四角形 ($n = 4$) の場合の Brahmagupta の公式 (7 世紀) が知られている．Heron の公式といえば，通常は，面積を表す公式を指すことが多い．

$$
\begin{array}{ll}
\text{面積公式} & S = \dfrac{1}{4}\sqrt{(a_1+a_2+a_3)(-a_1+a_2+a_3)(a_1-a_2+a_3)(a_1+a_2-a_3)} \\
\quad\text{多項式表現} & (4S)^2 - \left(-a_1^4 - a_2^4 - a_3^4 + 2a_1^2a_2^2 + 2a_2^3a_3^2 + 2a_3^2a_1^2\right) \\
\quad\text{基本対称式表現} & X - \left(-s_1^2 + 4s_2\right) \qquad (X = (4S)^2)
\end{array}
\tag{1}
$$

ここでは，$n \geq 5$ への拡張を考え，それぞれの主変数に関する多項式の形で表現した後， 辺長 a_1, a_2, a_3 による表現を基本対称式 $s_1 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$，$s_2 = a_1^2a_2^2 + a_2^2a_3^2 + a_3^2a_1^2$，$s_3 = a_1^2a_2^2a_3^2$ によって簡約を行い，より簡潔な表現を求めるものとする．

外接円の半径に対しても，似たような関係式が成り立つ．

$$
\begin{array}{ll}
\text{半径公式} & R = \dfrac{a_1a_2a_3}{\sqrt{(a_1+a_2+a_3)(-a_1+a_2+a_3)(a_1-a_2+a_3)(a_1+a_2-a_3)}} \\
\quad\text{多項式表現} & \left(-a_1^4 - a_2^4 - a_3^4 + 2a_1^2a_2^2 + 2a_2^3a_3^2 + 2a_3^2a_1^2\right) R^2 - a_1^2a_2^2a_3^2 \\
\quad\text{基本対称式表現} & \left(-s_1^2 + 4s_2\right) Y - s_3 \qquad (Y = R^2)
\end{array}
\tag{2}
$$

[*1] 〒 305-8550 つくば市春日 1-2　E-mail: `moritsug@slis.tsukuba.ac.jp`

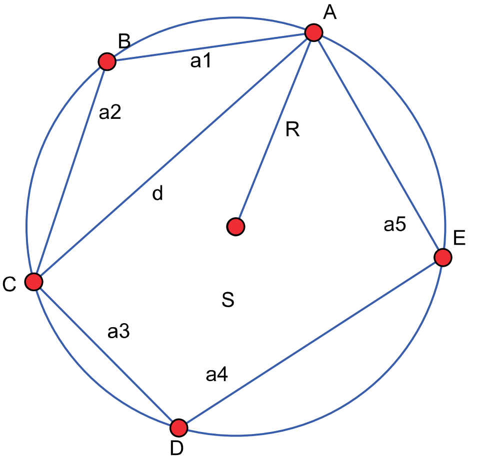

図 1: 円内接五角形問題　(面積 S，外接円半径 R)

さらに，面積と半径の両方を含む関係式としては，“面積 × 半径” を主変数とする多項式が存在する．

$$
\begin{array}{lll}
\text{“面積} \times \text{半径” 公式} & Z - a_1^2 a_2^2 a_3^2 & (Z = XY = (4SR)^2) \\
\quad \text{基本対称式表現} & Z - s_3 & \\
\quad n \text{ が奇数のときのみ存在する関係式} & |z| - \sqrt{s_3} & (z = 4SR,\ \sqrt{s_3} = a_1 a_2 a_3)
\end{array}
\tag{3}
$$

面積公式に関しては，20 世紀末になって，$n = 5, 6$ の場合を Robbins[6] が，また，$n = 7, 8$ の場合を Maley ほか [1] が，その計算法と結果を明らかにしている．

一方，半径公式について，井関知辰「算法発揮 (1690)」が $n = 5$ の場合の計算法を記している．そこでは，円内接五角形を 2 本の対角線 d_1, d_2 で 3 つの三角形に分割し，これらが外接円を共有することから，終結式により d_1, d_2 を消去する方法で解いている．実際に計算してみると正しい結果を与えていることが確かめられ [2]，江戸時代の和算において終結式による消去計算法が確立していたことが明らかになった．

さらに筆者は，終結式による消去計算を拡張して，$n = 7, 8$ に対する半径公式の計算を完成させた [4]．ただし，$n = 8$ の一部の項は，式が巨大で終結式から展開することが困難だったため，結果の多項式の表現を予測して数値補間により係数を求めている．

また筆者は，“面積 × 半径” 公式の導出法にも取り組み，終結式による消去と因数分解による正しい因子の取り出しを組み合わせて，$n = 5, 6$ の場合を解決した [3]．残念ながら，$n = 7$ の場合には，式が巨大になりすぎて同じ方法が適用困難と思われたため，結果の予想から数値補間により係数を求める方法により，最終的に $n = 7$ の “面積 × 半径” 公式の計算に成功している [5]．このとき，未定係数法から導かれる整数上の連立一次方程式の解法が負担となり，累計で約 17 日の CPU 時間を必要としていた．

これに対し，本稿では，「まず辺長 a_i による表現を求めた上で基本対称式 s_i による表現に変換する」というアプローチを改め，もともと Robbins[6] が採用していた「複素平面上の対称式 τ_j」を利用して，s_i による表現を直接求める方法を模索したものである．結果として，$n = 7$ の “面積 × 半径” 公式の計算が約 3 時間の CPU 時間で計算できたので，この点では大きな進展が得られている．

2　複素平面上での関係式

Robbins[6] は，複素平面上の円内接多角形を考え，その図形内で成り立つ関係式を用いて「五角形の面積」を表す多項式を導いた．ここでは，その過程を簡単に再現しておくことにする．

複素平面上で，原点を中心とする半径 R の円周上に n 個の点 $v_1, \ldots, v_n$ をこの順にとる．$v_{n+1} = v_1$，$q_j = v_{j+1}/v_j \quad (j = 1, \ldots, n)$ とおくと，各辺の長さは

$$a_j^2 = |v_{j+1} - v_j|^2 = (v_{j+1} - v_j)(\bar{v}_{j+1} - \bar{v}_j) \tag{4}$$

と表される．ここで $|v_k|^2 = v_k \bar{v}_k = R^2$ より $\bar{v}_k = R^2/v_k$，よって

$$\begin{aligned} a_j^2 &= (v_{j+1} - v_j) R^2 \left(\frac{1}{v_{j+1}} - \frac{1}{v_j} \right) \\ &= R^2 \left(2 - \frac{v_{j+1}}{v_j} - \frac{v_j}{v_{j+1}} \right) = R^2 \left(2 - q_j - q_j^{-1} \right) \end{aligned} \tag{5}$$

と変形できる．

一方で，原点 $, \alpha, \beta$ を頂点とする三角形の面積について，

$$S = \frac{1}{2} \left| \mathrm{Im}(\alpha \bar{\beta}) \right| = \frac{1}{4} \left| \alpha \bar{\beta} - \bar{\alpha} \beta \right|, \quad \mathrm{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i} \tag{6}$$

より，

$$S_j = \frac{1}{2} \mathrm{Im}(\bar{v}_j v_{j+1}) = \frac{1}{2} \mathrm{Im} \left(\frac{R^2}{v_j} v_{j+1} \right) = \frac{R^2}{4i} \left(\frac{v_{j+1}}{v_j} - \frac{v_j}{v_{j+1}} \right) \tag{7}$$

と表すことができる．n 個の三角形を足し合わせて，n 角形の面積を考えると，

$$\begin{aligned} -16S^2 &= R^4 \left(\frac{v_2}{v_1} - \frac{v_1}{v_2} + \cdots \right)^2 = R^4 \left(q_1 + \cdots + q_n - q_1^{-1} - \cdots - q_n^{-1} \right)^2 \\ &= R^4 \left((q_1 + \cdots + q_n) - \frac{q_1 \cdots q_{n-1} + \cdots}{q_1 \cdots q_n} \right)^2 = R^4 (\tau_n - \tau_{n-1})^2 \end{aligned} \tag{8}$$

となり，$q_1, \ldots, q_n$ の基本対称式 $\tau_1, \ldots, \tau_n$ を用いて，面積 S を表せることがわかる．

以下，$n = 5$ の場合に限定して，計算を進めることにする．$\tau_5 = q_1 \cdots q_5 = \dfrac{v_2}{v_1} \cdots \dfrac{v_1}{v_5} = 1$ に注意し，y を不定元として，次の 2 式を考える．

$$\left\{ \begin{aligned} f(x) &= \prod_{j=1}^{5} (x - q_j) = x^5 - \tau_1 x^4 + \tau_2 x^3 - \tau_3 x^2 + \tau_4 x - 1 \\ g(x) &= x^2 + \left(\frac{y}{R^2} - 2 \right) x + 1 \end{aligned} \right. \tag{9}$$

このとき,「 $f(x) = 0, \;\; g(x) = 0$ が共通解をもつ」ための必要十分条件は,

$$\exists j \quad \left\{ q_j^2 + \left(\frac{y}{R^2} - 2 \right) q_j + 1 = 0 \quad \vee \quad y = a_j^2 \right\} \tag{10}$$

で表すことができる．なぜなら，まず $y = a_j^2$ のときは,

$$a_j^2 = R^2 \left(2 - q_j - q_j^{-1} \right) \quad \text{より} \quad \frac{a_j^2}{R^2} - 2 = -q_j - q_j^{-1} \tag{11}$$

したがって $g(x) = x^2 + (-q_j - q_j^{-1}) x + 1$ となるので，$x = q_j$ は，$f(x)$ の根であると同時に，$g(x)$ の根である．

もう一方の条件のときには，$f(x)$ の根が $q_1,\ldots,q_5$ だから，$g(y)$ の根は同じ議論により $y=a_j^2$ になる．したがって，連立方程式 $\{f(x),\ g(x)\}$ は $y=a_j^2\ \ (j=1,\ldots,5)$ を共通根にもつから

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}(f,g;x) &= (y-a_1^2)(y-a_2^2)(y-a_3^2)(y-a_4^2)(y-a_5^2)\\ &= y^5+(-1)^1s_1y^4+(-1)^2s_2y^3+(-1)^3s_3y^2\\ &\quad +(-1)^4s_4y+(-1)^5s_5\end{aligned} \tag{12}$$

をみたしているはずである．ここで，$s_1=a_1^2+\cdots+a_5^2,\ \ldots,\ s_5=a_1^2\cdots a_5^2$ という基本対称式である．したがって，$\mathrm{Res}(f,g;x)$ を実際に計算して $y^4,\ldots,y^0$ の各係数と比較すれば，$s_1,\ldots,s_5$ が $\tau_1,\ldots,\tau_5$ で表されたことになる．

3　消去計算による半径・面積・“半径 $\times$ 面積” 公式の導出

前節の計算を実行して，s_i と τ_j の関係 $(n=5)$ を具体的に表せば

$$\begin{aligned} s_1 &= -R^2(-10+\tau_1+\tau_4)\\ s_2 &= +R^4(35-\tau_1+\cdots\cdots)\\ s_3 &= -R^6(-50+20\tau_1+\cdots\cdots)\\ s_4 &= +R^8(25-15\tau_1+\cdots\cdots)\\ s_5 &= -R^{10}(\tau_1-\tau_2+\tau_3-\tau_4)^2\end{aligned} \tag{13}$$

であるが，これらを多項式の形で表現し，

$$\begin{aligned} f_1 &= s_1+R^2(-10+\tau_1+\tau_4)\\ f_2 &= s_2-R^4(35-\tau_1+\cdots\cdots)\\ f_3 &= s_3+R^6(-50+20\tau_1+\cdots\cdots)\\ f_4 &= s_4-R^8(25-15\tau_1+\cdots\cdots)\\ f_5 &= s_5+R^{10}(\tau_1-\tau_2+\tau_3-\tau_4)^2\end{aligned} \tag{14}$$

とおいて，イデアル $I=(f_1,\ldots,f_5)$ を考える．

3.1　半径公式の導出

イデアル I は，半径 R を表すための条件を含んでいる．具体的には，計算効率のため，$Y=R^2$ と置き換えた上で，$\{\tau_1,\tau_2,\tau_3,\tau_4\}\succ\{s_1,s_2,s_3,s_4,s_5,Y\}$ の順序で I のグレブナー基底を計算すると

$$I\ \ni\ F(Y)=B_7(s_i)Y^7+\cdots+B_1(s_i)Y+s_5^3 \qquad (81\text{ 項}) \tag{15}$$

という多項式 $(B_j(s_i)\in\mathbf{Z}[s_1,\ldots,s_5])$ が基底の中に含まれているので，これが半径公式になる．

3.2　面積公式の導出

式 (8) より，面積については $(4S)^2=-R^4(\tau_1-\tau_4)^2$ と表されるので，

$$g:=X+R^4(\tau_1-\tau_4)^2 \qquad (X=(4S)^2) \tag{16}$$

とおき，半径公式のときと同じイデアル $I=(f_1,\dots,f_5)$ に対して g を追加し，

$$(I,g)=(f_1,f_2,f_3,f_4,f_5,g) \qquad (Y:=R^2) \tag{17}$$

を考える．これに対し，$\{\tau_1,\tau_2,\tau_3,\tau_4,Y\}\succ\{s_1,s_2,s_3,s_4,s_5,X\}$ の順序でグレブナー基底を計算すると

$$(I,g)\ \ni\ G(X)=X^7+(7s_1^2-24s_2)X^6+\cdots+C_1(s_i)X+C_0(s_i) \qquad (153\text{ 項}) \tag{18}$$

という「面積公式」$(C_j(s_i)\in\mathbf{Z}[s_1,\dots,s_5])$ を得る．

3.3 “面積 × 半径” 公式の導出

式 (8) の両辺に R^2 をかければ，$(4SR)^2=-R^6(\tau_1-\tau_4)^2$ である．$Z=(4SR)^2$ とおいて Z を主変数とする多項式を導き，“面積 × 半径” 公式と呼ぶことにする．

$$h:=Z+R^6(\tau_1-\tau_4)^2 \qquad (Z=(4SR)^2) \tag{19}$$

とおき，半径公式のときと同じイデアル $I=(f_1,\dots,f_5)$ に対して h を追加し，

$$(I,h)=(f_1,f_2,f_3,f_4,f_5,h) \qquad (Y:=R^2) \tag{20}$$

を考える．これに対し，$\{\tau_1,\tau_2,\tau_3,\tau_4,Y\}\succ\{s_1,s_2,s_3,s_4,s_5,Z\}$ の順序でグレブナー基底を計算すると

$$(I,h)\ \ni\ P(Z)=Z^7-4s_3Z^6+\cdots+D_1(s_i)Z+D_0(s_i) \qquad (63\text{ 項}) \tag{21}$$

という “面積 × 公式” 公式 $(D_j(s_i)\in\mathbf{Z}[s_1,\dots,s_5])$ を得る．

3.4 もうひとつの “面積 × 半径” 公式の導出

n が奇数のときには，$s_5=a_1^2\cdots a_5^2\ \to\ \sqrt{s_5}=a_1\cdots a_5 \quad Z=(4SR)^2\ \to\ z=4SR$ という置き換えにより，以下の因数分解が可能となる．

$$\begin{aligned} P(Z) &= -\varphi(z)\cdot\varphi(-z) \qquad (z=4SR)\\ \varphi(z) &= z^7-2s_3z^5+(s_1^2+4s_2)\sqrt{s_5}z^4+\cdots \qquad (18\text{ 項}) \end{aligned} \tag{22}$$

この $\varphi(z)$ を直接求めるには，式 (20) における f_5,h の代わりに

$$\begin{aligned} f_5' &:= \sqrt{s_5}+iR^5(\tau_1-\tau_2+\tau_3-\tau_4)\\ h' &:= z+iR^3(\tau_1-\tau_4) \end{aligned} \tag{23}$$

を用いて，イデアル $(f_1,f_2,f_3,f_4,f_5',h')$ において変数 $\{\tau_1,\tau_2,\tau_3,\tau_4,R\}$ を消去すればよい．$\mathbf{Q}(i)$ を係数とするグレブナー基底は通常の組み込み関数では計算しづらいので，ここでは終結式による消去を行うと，結果の因数分解が必要ではあるが，計算自体は一瞬で終わり，18 項の $\varphi(z)$ が求められる．

注意 1

円内接六角形 $(n=6)$ の場合は，半径公式・面積公式・“半径 × 面積” 公式に対して，同様の立式が可能であるが，グレブナー基底計算で消去を行うことは困難のようである.「終結式による消去を行って，因数分解により真の因子を取り出す」という方法であれば，それぞれ，$Y=R^2$, $X=(4S)^2$, $Z=(4SR)^2$ を主変数とする 7次多項式が求められる．ただし，$\sqrt{s_6}=s_1\cdots s_6$ をすでに含んだ式になっているので，$z=4SR$ に関する多項式表現は存在しない．

4 “面積 $\times$ 半径” 公式 $(n=7)$ の導出

円内接七角形 $(n=7)$ に対する各公式のうち，最も項数が少ないものは，$z=4SR$ に関する 38 次式である $\varphi(z)$ なので，これを $n=5$ のときと同様に求めてみる．まず s_i,τ_j の関係式を求める．

$$\begin{array}{lcl} f_1 &=& s_1+R^2(-14+\tau_1+\tau_6) \\ f_2 &=& s_2-R^4(77+\tau_1\tau_6+\cdots\cdots) \\ f_3 &=& s_3+R^6(-210+\tau_1\tau_5+\cdots\cdots) \\ f_4 &=& s_4-R^8(294+\tau_1\tau_4+\cdots\cdots) \\ f_5 &=& s_5+R^{10}(-196+\tau_1\tau_3+\cdots\cdots) \\ f_6 &=& s_6-R^{12}(49+\tau_1\tau_2+\cdots\cdots) \\ f_7' &=& \sqrt{s_7}+iR^7(\tau_1-\tau_2+\tau_3-\tau_4+\tau_5-\tau_6) \\ h' &:=& z+iR^3(\tau_1-\tau_6) \end{array} \tag{24}$$

次に，イデアル $(f_1,f_2,f_3,f_4,f_5,f_6,f_7',h')$ において，変数 $\{\tau_1,\ldots,\tau_6,R\}$ を消去する．実際の計算の CPU 時間としては，終結式に約 1,000 秒，因数分解に約 10,000 秒かかり，合計約 3 時間で次の式が求められた．

$$\begin{array}{lcll} \varphi(z) &=& z^{38}-8s_3z^{36}+\cdots & (31{,}590\ \text{項}) \\ && \in \mathbf{Z}[s_1,\ldots,s_6,\sqrt{s_7}][z] & \end{array} \tag{25}$$

筆者の前論文 [5] では，数値補間によりこの $\varphi(z)$ の計算に成功しているが，未定係数法から導かれる整数上の大規模な連立一次方程式を解く必要があり，CPU 時間の累計は約 17 日であった．これに対して，今回の定式化 (24) は，計算時間の大幅な短縮に役立っているといえる．

注意 2
Maley ほか *[1]* は，任意の n に対し，次の関係をみたす多項式 U,V (組み合わせの個数の式から合成したもの）を構成し，*Main Identity* と呼んでいる．

$$\sum_{i=0}(-x)^i s_i=\frac{1}{4}U(r^2x)^2+(r^2x-\frac{1}{4})V(r^2x)^2 \tag{26}$$

$n=5$ で示せば，

$$\text{左辺}=s_0-s_1x+s_2x^2-s_3x^3+s_4x^4-s_5x^5 \tag{27}$$

であり，一方で，右辺を展開し x について整理，係数を比較すると，$\tau_0=\tau_5=1$ に注意して，

$$\begin{array}{lcl} s_5 &=& -R^{10}(\tau_1-\tau_2+\tau_3-\tau_4)^2 \\ \cdots &=& \cdots \\ s_1 &=& -R^2(-10+\tau_1+\tau_4) \end{array} \tag{28}$$

となり，*Robbins* の導いた関係式 *(13)* と同じものが得られる．ここで，式 *(26)* の右辺第 2 項が因数分解できていることが本質的であると指摘し，面積公式の計算を判別式の計算に帰着させている．

注意 3
$n=7$ の場合の “面積 $\times$ 半径” 公式は，$z=4SR,\ Z=z^2=(4SR)^2$ を主変数として，以下の多項式となる．

$$\begin{array}{lcll} \varphi(z) &=& z^{38}-8s_3z^{36}+\cdots+E_1z+E_0 & (31,590\ \text{項}) \\ P(Z) &=& Z^{38}-16s_3Z^{37}+\cdots+D_1Z+D_0 & (973,558\ \text{項}) \\ &=& -\varphi(z)\varphi(-z) & \end{array} \tag{29}$$

ここで，

$$
\begin{array}{l}
s_1 = a_1^2 + \cdots + a_7^2, \ \ldots, \ s_7 = a_1^2 \cdots a_7^2, \ (\sqrt{s_7} = a_1 \cdots a_7) \\
E_j \in \mathbf{Z}[s_1, \ldots, s_6, \sqrt{s_7}]), \ D_j \in \mathbf{Z}[s_1, \ldots, s_6, s_7])
\end{array}
\tag{30}
$$

である．この結果から，"面積 × 半径" 公式の計算では，

- n が奇数のときは，式のサイズが小さい $\varphi(z)$ から求めるのが効率的である
- n が偶数のときは，$\varphi(z)$ が存在しないので，$P(Z)$ を直接求めるしかない

ということになり，上記の議論が $n=8$ には直接適用できない点に注意が必要である．

5 まとめと今後の課題

本研究では，Robbins[6] が最初に行った定式化を再検討するような形で以下の試みを行い，結果として，一定の成果が得られた．

(i) 辺長の対称式と複素平面上で考えた対称式の関係を利用して計算を行う．

$$
\begin{array}{rclcrcl}
s_1 &=& a_1^2 + \cdots + a_n^2, & \ldots, & s_n &=& a_1^2 \cdots a_n^2 \\
\tau_1 &=& q_1 + \cdots + q_n, & \ldots, & \tau_n &=& q_1 \cdots q_n = 1
\end{array}
\tag{31}
$$

ただし，$q_j = v_{j+1}/v_j$ (v_j は複素平面上の円周上の点) である．

(ii) これまでは,「辺長 a_i で表わされた多項式を求めたうえで，基本対称式 s_i による表現に変換」してきたが，最初からより簡潔な表現を求めることを試行した．

(iii) 実際に，$n=7$ の "面積 × 半径" 公式の計算に成功した点は成果といえる．以前の論文 [5] では，数値補間で約 17 日の CPU 時間を費やしていたが，今回は終結式＋因数分解により CPU 約 3 時間で計算が終了したので大幅な改善になっている．

(iv) 残された課題は，$n=8$ の "面積 × 半径" 公式である．今回用いた計算方法の工夫は，n が奇数のときのみ利用できるものなので，$n=8$ のときには直接の拡張ができない．依然として，これは未解決問題として残っている．

5.1 円内接八角形に対する数値補間計算の現状

$n=8$ の場合の "面積 × 半径" 公式のうち，数値補間では，係数 $\tilde{D}_{16}, \ldots, \tilde{D}_1$ が，その大きさから計算不可能となっている．

$$
\begin{array}{rcl}
\psi_8^{(+)}(Z) &=& Z^{38} - 16 s_3 Z^{37} + \tilde{D}_{36} Z^{36} + \cdots + \tilde{D}_{17} Z^{17} \\
&& + \left(\tilde{D}_{16} Z^{16} + \cdots + \tilde{D}_1 Z \right) + \tilde{D}_0
\end{array}
\tag{32}
$$

このうち，現在の環境で計算可能な係数の最大項数は，

$\tilde{D}_{17}$	102,247 項 (候補となる単項式は 125,054 個)
$\tilde{D}_0$	554,173 項 (根と係数の関係によるので，例外)

となっている．計算不可能な範囲における数値補間のための行列サイズは，

$$\tilde{D}_{16} : 165,235\ \cdots \to (\text{単調増加})\ \cdots \to \tilde{D}_1 : 4,116,544$$

となっていて，計算資源を無限に投入できるのであれば求められる可能性はあるが，現実的な解法とはいえない．したがって，消去計算に逆戻りではあるが，以下の問題が検討課題となる．

問題 1

$n=8$ の場合は，式 *(20)* に相当するイデアルは $(I,h)=(f_1,\ldots,f_8,h)$ となる．これらは，辺長 a_i を含まない $\{s_i,\tau_j\}$ の関係式となっているが，ここから τ_j を消去できないか？

5.2 Robbins の面積公式 ($n=5,6$) 導出法との関係

Robbins[6] では，面積公式を導出するのに，以下のような式変形を行っている．$s_1,\ldots,s_6$ を 6 次の基本対称式，$u_2=-4S^2$ として，以下を構成する．ただし，crossing parity ε の値は，0 (五角形)・+1 (凸六角形) ・−1 (非凸六角形) をとるものとする．

$$\begin{aligned} t_1 &= s_1 \\ t_2 &= -s_2+t_1^2/4-u_2 \\ t_3 &= s_3+t_1t_2/2-\varepsilon\cdot 2\sqrt{s_6} \\ t_4 &= -s_4+t_2^2/4+\varepsilon\cdot t_1\sqrt{s_6} \\ t_5 &= s_5+\varepsilon\cdot t_2\sqrt{s_6} \end{aligned} \tag{33}$$

このとき，不定元 z に関する 3 次多項式 $u_2+t_3z+t_4z^2+t_5z^3$ の重根条件 (判別式) から

$$t_3^2t_4^2-4u_2t4^3-4t_3^3t_5+18u_2t_3t_4t_5-27u_2^2t_5^2=0 \tag{34}$$

という u_2 (面積) に関する 7 次方程式を得る，というのが Robbins の結果である．したがって，この方法を “面積 × 半径” 公式の場合にも適用できないか，というのがもう一つの検討課題である．

問題 2

上記のように導出した 3 次多項式 $u_2+t_3z+t_4z^2+t_5z^3$ を，$Z=(4SR)^2$ についての関係式に書き換えられないか？

Maley ほか [1] により，$n=7,8$ の場合は，「5 次形式の重根条件」に帰着するが，こちらも “面積 × 半径” の式に書き変えられないか，検討が必要である．

謝　　辞

本研究は科研費 (21K03335) の助成を受けている．また，国際共同利用・共同研究拠点である京都大学数理解析研究所の助成を受けている．

参　考　文　献

[1] Maley, F. M., Robbins, D. P., and Roskies, J.: On the Areas of Cyclic and Semicyclic Polygons, *Advances in Applied Mathematics*, **34**(4), 2005, 669–689.

[2] 森継修一: 円内接多角形問題と「算法発揮 (1690)」における解について, 京都大学数理解析研究所講究録, **1815**, 2012, 124–132.

[3] Moritsugu, S.: Integrated Circumradius and Area Formulae for Cyclic Pentagons and Hexagons, *ADG 2014* (Botana, F. and Quaresma, P., eds.), *LNAI*, **9201**, Springer, 2015, 94–107.

[4] Moritsugu, S.: Completing the Computation of the Explicit Formulae for the Circumradius of Cyclic Octagons, 数式処理 (*Bulletin of Japan Soc. Symbolic and Algebraic Computation*), **25**(2), 2019, 2–11.

[5] Moritsugu, S.: Computing the Integrated Circumradius and Area Formula for Cyclic Heptagons by Numerical Interpolation, 数式処理 (*Bulletin of Japan Soc. Symbolic and Algebraic Computation*), **28**(1), 2022, 3–13.

[6] Robbins, D. P.: Areas of Polygons Inscribed in a Circle, *Discrete & Computational Geometry*, **12**(1), 1994, 223–236.