

加群のグレブナー基底による隣接作用素の計算

Computing contiguous operators by using Groebner bases in D -modules

東海大学 理系教育センター 中山洋将^{*1}
NAKAYAMA HIROMASA
TOKAI UNIVERSITY

Abstract

Contiguous relations of hypergeometric functions are important for evaluations of its functions and inducing other formulas. We present a new algorithm computing contiguous operators by using Gröbner bases in D -modules.

1 Introduction

Gauss 超幾何関数 $F(\alpha, \beta, \gamma; x)$ のパラメータ α についての隣接作用素とは,

$$\begin{aligned}(x\partial + \alpha) \cdot F(\alpha, \beta, \gamma; x) &= \alpha F(\alpha + 1, \beta, \gamma; x), \\ ((x^2 - x)\partial + \beta x + \alpha - \gamma + 1) \cdot F(\alpha + 1, \beta, \gamma; x) &= (\alpha - \gamma + 1)F(\alpha, \beta, \gamma; x),\end{aligned}$$

のように, 微分作用素でそれに関数に作用させると, 関数中のパラメータを 1 増やしたり, パラメータを 1 減らしたりできる微分作用素のことである. ここで $\partial = \frac{d}{dx}$ (x についての微分作用素) としている. パラメータを 1 増やすものを上昇作用素, パラメータを 1 減らすものを下降作用素と呼ぶ. この場合, 上昇作用素は $x\partial + \alpha$, 下降作用素は $(x^2 - x)\partial + \beta x + \alpha - \gamma + 1$ であり, 上昇作用素は Gauss の超幾何級数の定義式から容易に求めることができるが, 下降作用素はいくらかの計算が必要になる. 多変数超幾何関数でも, 一方の隣接作用素は超幾何級数の定義式から容易に求めることができるが, それとは逆にパラメータを動かす隣接作用素を求めることは難しい場合が多い.

既知の隣接作用素から, 逆にパラメータを動かす隣接作用素を求める問題について, 有理関数係数微分作用素環のグレブナー基底を用いて解くアルゴリズムが, [5] により与えられている. 本稿では, 隣接関係式を微分作用素環上の加群の元とみなし, 微分作用素環上の加群のグレブナー基底を用いることで, この問題を解くアルゴリズムを与える. 例えば, 上記の Gauss 超幾何関数の 2 つの隣接関係式は

$$\begin{pmatrix} x\partial + \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} (x^2 - x)\partial + \beta x + \alpha - \gamma + 1 \\ \alpha - \gamma + 1 \end{pmatrix}$$

という左 D 加群 D^2 の元とみなす. 計算により得られるグレブナー基底を見れば, 隣接するパラメータを持つ関数の間の関係式 (例えば $P \cdot F(\alpha) = Q \cdot F(\alpha + 1)$ の形の関係式) がすぐにわかる.

^{*1} 〒 259-1292 神奈川県平塚市北金目 4-1-1 E-mail: nh5104@tokai.ac.jp

2 隣接作用素を計算するアルゴリズム

多項式係数微分作用素環を $D = \mathbb{C}\langle x_1, \dots, x_n, \partial_1, \dots, \partial_n \rangle$ とする. ここで $\partial_i = \frac{d}{dx_i}$ (x_i についての微分作用素) を表す. 左 D 加群

$$D^2 = \left\{ \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} \mid P, Q \in D \right\}$$

を考え, ここにおけるグレブナー基底計算を行うことで, 超幾何関数の隣接作用素を計算するアルゴリズムを与える.

$F(\lambda)$ を超幾何関数 (多変数でもよい) とし, λ をその関数に含まれるパラメータで隣接作用素により昇降させたいものとする. 例えば, Gauss の超幾何関数 $F(\alpha, \beta, \gamma; x)$ のパラメータ α についての隣接作用素を対象にする場合は $F(\alpha)$ のように表す. またパラメータの λ は generic にとり, D では定数のように扱う.

$F(\lambda)$ の λ についての上昇作用素 $H(\lambda)$ が得られていると仮定する. すなわち,

$$H(\lambda) \cdot F(\lambda) = C(\lambda)F(\lambda+1)$$

が成り立つような $H(\lambda) \in D$ と 0 でない定数 $C(\lambda) \in \mathbb{C}$ が得られていると仮定する. この時, λ についての上昇作用素 $B(\lambda+1)$ を求める問題, すなわち,

$$B(\lambda+1) \cdot F(\lambda+1) = C'(\lambda+1)F(\lambda)$$

が成り立つような $B(\lambda+1) \in D$ と 0 でない定数 $C'(\lambda+1) \in \mathbb{C}$ を求める問題を考える.

D^2 における集合

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} \mid P \cdot F(\lambda) = Q \cdot F(\lambda+1) \right\} \subset D^2$$

を考える. これは左 D 加群であることが簡単に示せる. $F(\lambda)$ の零化イデアル (左 D イデアル) を

$$I(\lambda) = \{P \in D \mid P \cdot F(\lambda) = 0\}$$

とし, $I(\lambda)$ の生成元を $P_1(\lambda), \dots, P_r(\lambda)$ とする.

D^2 における左 D 加群

$$M' = \left\langle \begin{pmatrix} H(\lambda) \\ C(\lambda) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} P_1(\lambda) \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} P_r(\lambda) \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ P_1(\lambda+1) \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ P_r(\lambda+1) \end{pmatrix} \right\rangle$$

を考える. ここで, $\langle Q_1, \dots, Q_r \rangle$ は $Q_1, \dots, Q_r \in D^2$ が生成する左 D 加群を表すとする. 関係式

$$H(\lambda) \cdot F(\lambda) = C(\lambda) \cdot F(\lambda+1),$$

$$P_1(\lambda) \cdot F(\lambda) = 0 \cdot F(\lambda+1), \dots, P_r(\lambda) \cdot F(\lambda) = 0 \cdot F(\lambda+1),$$

$$0 \cdot F(\lambda) = P_1(\lambda+1) \cdot F(\lambda+1), \dots, 0 \cdot F(\lambda) = P_r(\lambda+1) \cdot F(\lambda+1)$$

が成り立っているので, M' の各生成元は M に含まれるから, $M' \subset M$ がわかる. さらに次が成り立つ.

命題 1

$M = M'$ である.

下降作用素 $B(\lambda+1)$ が存在するとすれば, $\begin{pmatrix} C'(\lambda+1) \\ B(\lambda+1) \end{pmatrix} \in M'$ ($C'(\lambda+1)$ は 0 でない定数) が成り立つから, M' の元で第 1 成分が 0 でない定数のものをとれば, 下降作用素が得られる.

定理 2

左 D 加群 M' の POT 順序 (Position Over Term 順序) $<$ についてのグレブナー基底を G とする. M' の元で第 1 成分が 0 でない定数のものが存在するならば, G の元で第 1 成分が 0 でない定数のものが存在する.

ここで用いている D^2 における POT 順序 $<$ は, D^2 の任意の 2 つの単項式 $x^\alpha \partial^\beta \mathbf{e}_i$ と $x^{\alpha'} \partial^{\beta'} \mathbf{e}_j$ の間に順序を

$$x^\alpha \partial^\beta \mathbf{e}_i > x^{\alpha'} \partial^{\beta'} \mathbf{e}_j \iff i < j \text{ または } (i = j \text{ かつ } x^\alpha \partial^\beta >' x^{\alpha'} \partial^{\beta'})$$

と定めるものである. ただし, $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とし, $i, j \in \{1, 2\}$, $\alpha, \beta, \alpha', \beta' \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ であり, $x^\alpha \partial^\beta$ は $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ の時, $x^\alpha \partial^\beta = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \partial_1^{\beta_1} \dots \partial_n^{\beta_n}$ を表す. $<'$ は D における適当な単項式順序, 例えば辞書式順序などとする. $v \in D^2$ について, POT 順序 $<$ についての先頭単項式を $\text{LM}_{<}(v)$ と表す. 加群のグレブナー基底についての記号, 用語は [1] に従う.

ここまでのことから, 上昇作用素から下降作用素を計算するアルゴリズムが得られる.

アルゴリズム 1 (下降作用素を計算するアルゴリズム)

入力: $H(\lambda)$: 上昇作用素, $C(\lambda)$: 0 でない定数で $H(\lambda) \cdot F(\lambda) = C(\lambda)F(\lambda+1)$ を満たすもの, $P_1(\lambda), \dots, P_r(\lambda)$: $F(\lambda)$ の零化イデアルの生成元.

出力: $B(\lambda+1)$: 下降作用素, $C'(\lambda+1)$: 0 でない定数で $B(\lambda+1) \cdot F(\lambda+1) = C'(\lambda+1)F(\lambda)$ を満たすもの.

1. D^2 における左 D 加群

$$M' = \left\langle \begin{pmatrix} H(\lambda) \\ C(\lambda) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} P_1(\lambda) \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} P_r(\lambda) \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ P_1(\lambda+1) \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ P_r(\lambda+1) \end{pmatrix} \right\rangle.$$

の POT 順序 $<$ (定理 2 で定めたもの) についてのグレブナー基底 G を求める.

2. G の元で第 1 成分が 0 でない定数のものが存在しない場合, 下降作用素は存在しない. G の元で第 1 成分が 0 でない定数のものが $\begin{pmatrix} C'(\lambda+1) \\ B(\lambda+1) \end{pmatrix}$ である.

これとは逆に下降作用素がわかっていて, 上昇作用素を求める場合も同様のアルゴリズムを作ることができる (例 2 で具体例を挙げる).

3 計算例

アルゴリズム 1 の計算例を挙げる. 実際にアルゴリズムを実行する場合, 関数 $F(\lambda)$ の零化イデアルを求めることは難しいので, 代わりに $F(\lambda)$ を零化する微分作用素を十分多くとり, それらを入力としてアルゴリズムを実行する. 下降作用素が見つかる場合は特に問題はない. ただし下降作用素が見つからない場合は, 下降作用素が存在しないという保証にはならないことに注意する.

例 1 (Gauss 超幾何関数 $F(\alpha, \beta, \gamma; x)$)

$F(\alpha, \beta, \gamma; x)$ を Gauss 超幾何関数とし, α についての上昇作用素から下降作用素を求める. D は 1 変数多項式係数微分作用素環 $D = \mathbb{C}\langle x, \partial \rangle$ とする. $F(\alpha) = F(\alpha, \beta, \gamma; x)$ とおく. パラメータ α, β, γ は generic であるとする. $F(\alpha)$ を零化する微分作用素として $P(\alpha) = x(1-x)\partial^2 + (\gamma - (\alpha + \beta + 1)x)\partial - \alpha\beta$ がとれる.

上昇作用素は簡単な計算から

$$(x\partial + \alpha) \cdot F(\alpha) = \alpha F(\alpha + 1)$$

となることが知られている。

左 D 加群

$$M' = \left\langle \begin{pmatrix} x\partial + \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} P(\alpha) \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ P(\alpha + 1) \end{pmatrix} \right\rangle$$

をとり, M' の POT 順序 $<$ についてのグレブナー基底 G を計算すると,

$$\begin{pmatrix} 0 \\ (-x^2 + x)\partial^2 + ((-\alpha - \beta - 2)x + \gamma)\partial - \alpha\beta - \beta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha - \gamma + 1 \\ (x^2 - x)\partial + \beta x + \alpha - \gamma + 1 \end{pmatrix}$$

となる. G の元で第 1 成分が 0 でない定数のものは $\begin{pmatrix} \alpha - \gamma + 1 \\ (x^2 - x)\partial + \beta x + \alpha - \gamma + 1 \end{pmatrix}$ であるから,

$$(\alpha - \gamma + 1)F(\alpha) = ((x^2 - x)\partial + \beta x + \alpha - \gamma + 1) \cdot F(\alpha + 1)$$

が成り立ち, 下降作用素 $B(\alpha + 1) = (x^2 - x)\partial + \beta x + \alpha - \gamma + 1$ が得られる.

例 2 (Appell 超幾何関数 $F_2(\alpha, \beta, \beta', \gamma, \gamma'; x, y)$)

$F_2(\alpha, \beta, \beta', \gamma, \gamma'; x, y)$ を Appell F_2 の超幾何関数とし, γ についての下降作用素から上昇作用素を求める. D は 2 変数多項式係数微分作用素環 $D = \mathbb{C}\langle x, y, \partial_x, \partial_y \rangle$ とする. $F(\gamma) = F_2(\alpha, \beta, \beta', \gamma, \gamma'; x, y)$ とおく. パラメータ $\alpha, \beta, \beta', \gamma, \gamma'$ は generic であるとする. $F(\gamma)$ を零化する微分作用素として

$$\begin{aligned} P_1(\gamma) &= (-x^2 + x)\partial_x^2 - xy\partial_x\partial_y + ((-\alpha - \beta - 1)x + \gamma)\partial_x - \beta y\partial_y - \alpha\beta, \\ P_2(\gamma) &= (-y^2 + y)\partial_y^2 - xy\partial_x\partial_y + ((-\alpha - \beta' - 1)y + \gamma')\partial_y - \beta'x\partial_x - \alpha\beta' \end{aligned}$$

がとれる.

下降作用素は簡単な計算から

$$(x\partial_x + \gamma) \cdot F(\gamma + 1) = \gamma F(\gamma)$$

となることが知られている。

左 D 加群

$$M' = \left\langle \begin{pmatrix} x\partial_x + \gamma \\ \gamma \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} P_1(\gamma + 1) \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} P_2(\gamma + 1) \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ P_1(\gamma) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ P_2(\gamma) \end{pmatrix} \right\rangle$$

をとる. これは, 左 D 加群

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} \mid P \cdot F(\gamma + 1) = Q \cdot F(\gamma) \right\} \subset D^2$$

の部分加群になっている. M' の POT 順序 $<$ についてのグレブナー基底 G を計算する. G の元で第 1 成分が 0 でない定数のものは $\begin{pmatrix} (\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)(\alpha - \gamma - \gamma' + 1) \\ H(\gamma) \end{pmatrix}$ である. ここで,

$$\begin{aligned} H(\gamma) &= \gamma \{ (y^2 - y)\partial_x\partial_y + (-y^2 + y)\partial_y^2 + ((-\alpha + \gamma + \gamma' - \beta' - 1)x + \beta'y + \alpha - \gamma - \gamma' + 1)\partial_x + \\ &\quad ((-\alpha + \beta - \beta' - 1)y + \gamma')\partial_y + (-\alpha^2 + (-\beta + 2\gamma + \gamma' - \beta' - 1)\alpha + (\gamma + \gamma' - 1)\beta - \gamma^2 + (-\gamma' + 1)\gamma) \} \end{aligned}$$

である.

$$(\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)(\alpha - \gamma - \gamma' + 1)F(\gamma + 1) = H(\gamma) \cdot F(\gamma)$$

が成り立ち, 上昇作用素 $H(\gamma)$ が得られる.

例 3 (b 関数 (Bernstein-Sato 多項式))

多項式 $f(x)$ の b 関数 (Bernstein-Sato 多項式) とは,

$$P \cdot f(x)^{s+1} = b(s)f(x)^s$$

となる微分作用素 $P \in D[s]$ が存在するような s の多項式 $b(s)$ で最小次数のものである. D のグレブナー基底を用いて b 関数を計算するアルゴリズムが知られている ([4]). アルゴリズム 1 を用いて, b 関数 $b(s)$ と付随する微分作用素 P を求める.

$f(x)^s$ をパラメータ s の式と見れば, 上記の式は s についての隣接関係式とみなせて, P が s についての下降作用素となっていることがわかる. $f(x) \cdot f(x)^s = f(x)^{s+1}$ であるから, $f(x)$ は上昇作用素であることがわかる. また, $f(x)^s$ の零化イデアルは [4] により与えられている. アルゴリズム 1 を用いて, 既知の上昇作用素 $f(x)$ から未知の下降作用素 $P(s+1)$ を求めることができる.

$f(x, y) = x^3 + y^2$ の場合で, 計算例を説明する. f^s の零化イデアル $I(s)$ は左 D イデアル

$$I(s) = \langle -3x^2\partial_y + 2y\partial_x, 2x\partial_x + 3y\partial_y - 6s \rangle$$

となる. 左 D 加群

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} \mid P \cdot f^s = Q \cdot f^{s+1} \right\} \subset D^2$$

を考える. f^s の零化イデアル $I(s)$ の生成元から,

$$M = \left\langle \begin{pmatrix} x^3 + y^2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3x^2\partial_y + 2y\partial_x \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2x\partial_x + 3y\partial_y - 6s \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -3x^2\partial_y + 2y\partial_x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2x\partial_x + 3y\partial_y - 6(s+1) \end{pmatrix} \right\rangle$$

であることがわかる. M の元で第 1 成分が定数のものを求めるために, M の POT 順序についてのグレブナー基底 G を計算する. G の元で第 1 成分が定数のものは

$$\begin{pmatrix} 216s^3 + 648s^2 + 642s + 210 \\ -27y\partial_y^3 + 108s\partial_y^2 + 81\partial_y^2 + 8\partial_x^3 \end{pmatrix}$$

とわかる. よって

$$(216s^3 + 648s^2 + 642s + 210)f^s = (-27y\partial_y^3 + 108s\partial_y^2 + 81\partial_y^2 + 8\partial_x^3)f^{s+1}$$

が成り立つ. $b(s) = 216s^3 + 648s^2 + 642s + 210 = 6(s+1)(6s+5)(6s+7)$ とわかる.

参 考 文 献

- [1] Cox, D., Little, J., O'Shea, D., *Using Algebraic Geometry*, Springer, New York, 1998.
- [2] Erdélyi, A. et al., *Higher Transcendental Functions*, MacGraw-Hill, New York, 1953.
- [3] Kimura, T., Hypergeometric functions of two variables, Seminar Note Series of Univ. Tokyo, 1972.
- [4] Oaku, T., Algorithms for the b -function and D -modules associated with a polynomial, Journal of Pure and Applied Algebra, 117&118 (1997), 495–518.
- [5] Takayama, N., Groebner basis and the problem of contiguous relations, Japan J. Appl. Math. 6, 147–160 (1989).