

3次元空間内の放物線族が作る曲面について

東京学芸大学・自然科学系 竹内伸子

Nobuko Takeuchi
Tokyo Gakugei University

東京学芸大学・自然科学系 山本卓宏

Takahiro Yamamoto
Tokyo Gakugei University

概要

本論文では直線や円が連続的に動いて作られる曲面である線織面や円織面 [3] のように放物線族が連続的に動いて作られる曲面について考える。この曲面が特異点を持つとき、その特異曲線と放物線族の関係を調べる。

キーワード：放物線族, 特異点, 縮括線

1 はじめに

本論文では直線や円が連続的に動いて作られる曲面である線織面や円織面 [3] のように放物線族が連続的に動いて作られる曲面を微分幾何学および特異点論的な観点から研究する。

例えば2次元曲面の一種である1葉双曲面や2葉双曲面は、一平面 π 上に同一点 O を中心、一つの漸近線 ℓ を共有する二つの双曲線を与えたとき、一方の双曲線を焦点、他方を頂点とする ℓ と平行な軸を持つ、 π と垂直な平面上の放物線の族から構成される曲面である（参考文献 [8, 9]）。図 1, 2 を参照する（赤線は頂点、青線は焦点の曲線、黒太線は共有する漸近線をあらわす）。このような平面上で漸近線の1つを共有し共通の中心をもつ2つの双曲線の図は1葉双曲面、2葉双曲面の設計図と考えることができる。

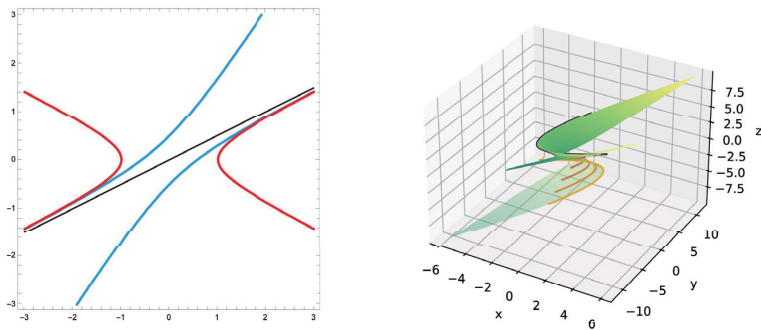


図 1 1葉双曲面

放物線族は焦点という特殊な点を持ち、またどの放物線も相似であるという性質も持つ曲線であり、このような曲線族が作る曲面は興味深い性質を持つと期待できる。また、空間内の放物線族が作る曲面として真っ先に思い浮かぶのは回転放物面 $z = a(x^2 + y^2)$ であろう。回転放物面は各放物線族が共通の焦点を持つ曲面であり、この性質によりパラボラアンテナに利用される。本論文で扱う曲面はパラボラアンテナ（の形状）の一般化と理解することもできる。

本論文を通して、2つのベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ に対して $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ で標準内積をあらわし、 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ で外積をあらわす。ベクトル $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ に対して標準ノルムを $|\mathbf{a}|$ であらわす。正方行列 A に対して $\det A$ で A の行列式をあらわす。さらに関数や写像は特に断らない限り C^∞ 級に滑らかであるとし、変数 t による微分をドット $(\cdot)$ であらわす。すなわち、関数 $f(t)$ の t に関する微分を $\dot{f}(t)$ であらわす。正則曲線 γ に対して弧長パラメータを s であらわし、弧長 s に関する微分をプライム $(\prime)$ であらわす。すなわち、曲線 $\gamma(s)$ の s に関する微分を $\gamma'(s)$ とあらわす。

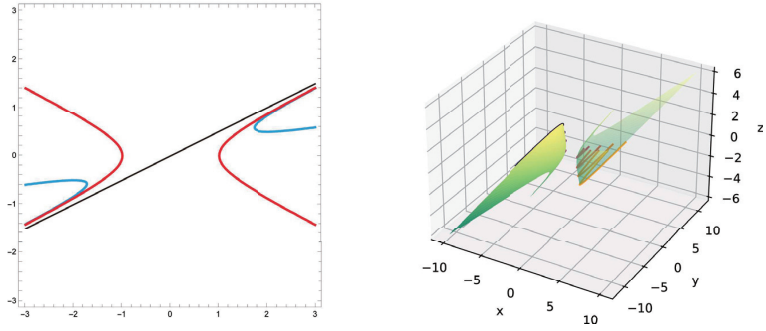


図 2 2 葉双曲面

2 放物線族が作る曲面

空間内に放物線族 $\{\mathcal{P}_t\}$ が与えられたとき、それが作る曲面 $\mathcal{P} = \cup_t \mathcal{P}_t$ を微分幾何学的な観点から研究する．このような曲面 $\mathcal{P}$ を線織面や円織面に倣い**放物線織面**と呼び、各放物線 $\mathcal{P}_t$ を**ルーリング (ruling)** と呼ぶ．

放物線織面として次が知られている．

例 2.1. 次で定義される曲面

$$f(\theta, s) = \begin{pmatrix} \theta + \sin \theta (s^2 \cos \theta - s^2 - 1) \\ \cos \theta (s^2 \cos \theta - s^2 - 1) \\ 2s(\cos \theta - 1) \end{pmatrix}$$

はカタランの極小曲面と呼ばれている．その名が示す通り、カタランの極小曲面は極小曲面であり、放物線の 1 係数族であることが知られている．このとき、焦点の軌跡はサイクロイド $\gamma(\theta) = {}^t(\theta - \sin \theta, -\cos \theta, 0)$ であり頂点の軌跡は焦点の軌跡と同一平面上の曲線 $\beta(\theta) = {}^t(\theta - 2 \sin \theta + \sin \theta \cos \theta, (\cos \theta - 2) \cos \theta, 0)$ である．図 3 を参照する．

注意 2.2. カタランの極小曲面の他にも放物線族の構造をもつ極小曲面が赤嶺 [1] により得られている．また、[2] において構成されたカタランの極大曲面と呼ばれる極大曲面も放物線族の構造を持つことが知られている．

以下で放物線が作る曲面のパラメータ表示を構成する．

空間曲線 $f(t)$ と $p(t)$ に沿った正規直交基底 $\{\mathbf{a}_1(t), \mathbf{a}_2(t), \mathbf{a}_3(t)\}$ を考える．空間曲線 $v(t)$ を $v(t) = f(t) + p(t)(-\mathbf{a}_1(t))$ ($p(t) \neq 0$) により定義する．

命題 2.3. $f(t)$ を焦点の軌跡、 $v(t)$ を頂点の軌跡とする放物線 $\mathcal{P}_t$ が作る放物線織面 $\mathcal{P} = \cup_t \mathcal{P}_t$ のパラメータ表示は次である：

$$\mathcal{P}: P(t, u) = f(t) + p(t)((u^2 - 1)\mathbf{a}_1(t) + 2u\mathbf{a}_2(t)) \tag{2.1}$$

証明. t を固定するとき、求めるルーリング $\mathcal{P}_t$ を次のように構成する： $v(t)$ を通り $\{\mathbf{a}_1(t), \mathbf{a}_2(t)\}$ で張られる平面を π_t とおく． π_t の座標系 $\{O_t = v(t); \mathbf{a}_1(t), \mathbf{a}_2(t)\}$ に関する座標を x', y' とするとき、求める $\mathcal{P}_t$ は

$$\mathcal{P}_t: y'^2 = 4p(t)x'$$

とかける．これをパラメータ表示して

$$x' = p(t)u^2, \quad y' = 2p(t)u.$$

を得る．こうして、 $\mathcal{P}_t$ の x, y 座標に関するパラメータ表示

$$\mathcal{P}_t: {}^t(x, y, z) = v(t) + p(t)(u^2\mathbf{a}_1(t) + 2u\mathbf{a}_2(t)).$$

が得られる．この式に $v(t) = f(t) + p(t)(-\mathbf{a}_1(t))$ を代入して t を動かせば求める式である． □

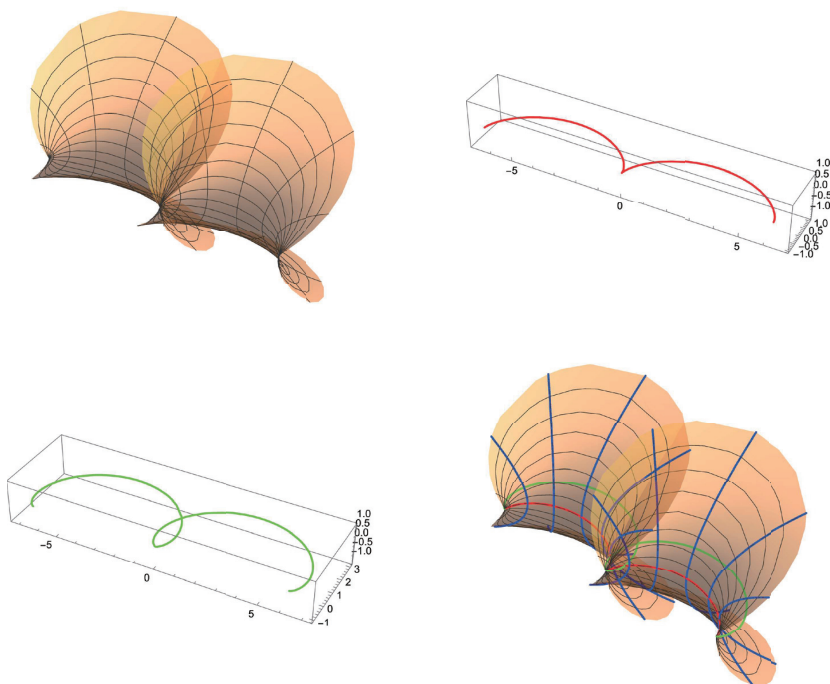


図3 カタランの極小曲面（左上：カタランの極小曲面，右上：焦点の軌跡，左下：頂点の軌跡，右下：カタランの極小曲面に焦点の軌跡と頂点の軌跡および放物線を書き込んだ図）

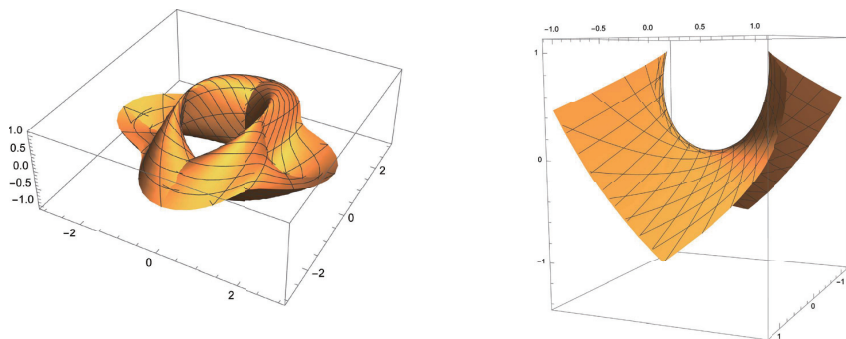


図4 例 2.4（左：(1) の放物線織面，右：(2) の放物線織面）

例 2.4. (1) $f(t) = O$, $\mathbf{a}_1 = \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{3+\cos 4t}} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ \cos 2t \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_2(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_3(t) = \mathbf{a}_1(t) \times \mathbf{a}_2(t)$, $p(t) = \sqrt{\cos 4t + 3}/\sqrt{2}$ と

おく. このとき, 放物線織面 $P(t, u)$ を図示すると図 4 左のようになる.

(2) $f(t) = \begin{pmatrix} t(9t^2 - 1) \\ -t^2 + 1 \\ 3t(t^2 + 1) \end{pmatrix} / (27t^2 + 3)$, $\mathbf{a}_1(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3t \end{pmatrix} / \sqrt{9t^2 + 1}$, $\mathbf{a}_2(t) = \begin{pmatrix} 9t^2 + 1 \\ 9t^3 \\ 3t^2 \end{pmatrix} / \sqrt{(9t^2 + 1)(9t^4 + 9t^2 + 1)}$,

$\mathbf{a}_3(t) = \mathbf{a}_1(t) \times \mathbf{a}_2(t)$, $p(t) = \frac{9t^4 + 9t^2 + 1}{3(9t^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}$ とおく. このとき, 放物線織面 $P(t, u)$ を図示すると図 4 右のようになる.

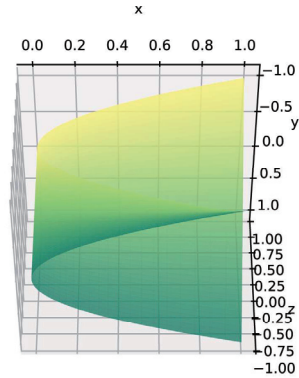


図5 ホイットニーの傘

2.1 放物線織面の特異点

例 2.4 の図にはホイットニーの傘やカスプ辺などの特異点らしきものが観察できる．次に放物線織面 $P(t, u)$ の特異点^{*1}を調べる．

放物線織面 $P(t, u)$ を構成する際の空間曲線 $f(t), f(t)$ に沿った正規直交基底 $\{\mathbf{a}_1(t), \mathbf{a}_2(t), \mathbf{a}_3(t)\}$ に対して

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}f(t) &= \lambda(t)\mathbf{a}_1(t) + \mu(t)\mathbf{a}_2(t) + \delta(t)\mathbf{a}_3(t), \\ \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1(t) \\ \mathbf{a}_2(t) \\ \mathbf{a}_3(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & c_1(t) & c_2(t) \\ -c_1(t) & 0 & c_3(t) \\ -c_2(t) & -c_3(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1(t) \\ \mathbf{a}_2(t) \\ \mathbf{a}_3(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

とおく．さらに,

$$\begin{aligned} A(t, u) &= \delta(t) + p(t)(c_2(t)(u^2 - 1) + c_3(t)2u) \\ B(t, u) &= \lambda(t) - \mu(t)u - (u^2 + 1)(\dot{p}(t) + p(t)c_1(t)u) \end{aligned}$$

とおくとき次が成立する．

命題 2.5. 放物線織面 $P(t, u)$ の特異点全体からなる集合 $S(P)$ は次である：

$$S(P) = \{(t, u) \mid A(t, u) = B(t, u) = 0\}$$

さらに, $(P_t \times P_u)(t, u) = 2p(t)(A(t, u)(-\mathbf{a}_1(t) + u\mathbf{a}_2(t)) + B(t, u)\mathbf{a}_3(t))$ である．

よって, $(t, u) = (t_0, u_0)$ において $A(t, u), B(t, u)$ が同時にゼロにならないければ (t_0, u_0) の近傍で $P(t, u)$ はフロントアル^{*2}である．

曲面 $f(u, v)$ が (u_0, v_0) において原点の十分近くで定義された $f_W = (u^2, uv, v)$ と右左同値^{*3}であるとき $f(u, v)$ はホイットニーの傘 (Whitney’s umbrella) または 交叉帽子 (cross cap) であるという．図 5 を参照する．ホイットニーの傘の判定法について次がとても便利である：

定理 2.6 (佐治の判定法 [7]). 余階数 1 の写像芽 $f: (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^3, 0)$ を考える． f は余階数 1 なので $(\mathbb{R}^2, 0)$ 上のベクトル場 η で $df_0(\eta(0)) = 0$ となるものがとれ, さらに $\mathbb{R}^2$ 上のベクトル場 ξ を $\{\xi, \eta\}$ が $0 \in \mathbb{R}^2$ において $T_0\mathbb{R}^2$ の基底

^{*1} 曲面 $f(u, v)$ に対して $f_u(u_0, v_0)$ と $f_v(u_0, v_0)$ が 1 次従属となるとき点 (u_0, v_0) を $f(u, v)$ の特異点と呼ぶ． (u_0, v_0) が $f(u, v)$ の特異点であることと外積 $(f_u \times f_v)(u_0, v_0)$ がゼロベクトルであることは同値である．
^{*2} 曲面 $f(u, v)$ がフロントアルであるとは $f(u, v)$ が法ベクトル $\tilde{\nu}(u, v)$ を持つときをいう．さらに, 単位法ベクトル $\nu(u, v) = \frac{\tilde{\nu}(u, v)}{\|\tilde{\nu}(u, v)\|}$ に対して (f, ν) がはめ込みであるとき, $f(u, v)$ を波面と呼ぶ．
^{*3} 滑らかな写像芽 $f_i: (M_i, p_i) \rightarrow (N_i, q_i)$ ($i = 0, 1$) を考える． f_0 と f_1 が右左同値であるとは微分同相写像芽 $\Phi: (M_0, p_0) \rightarrow (M_1, p_1)$ と $\varphi: (N_0, q_0) \rightarrow (N_1, q_1)$ で $\varphi \circ f_0 = f_1 \circ \Phi$ を満たすものが存在するときをいう．

となるものがとれるので $\varphi = \det(\xi f \eta f \eta \eta f)$ とおく. このとき, f が $0 \in \mathbb{R}^2$ でホイットニーの傘をもつための必要十分条件は

$$\xi\varphi(0) \neq 0$$

が成立することである.

このとき, 放物線織面 $P(t, u)$ に関して次が得られる:

命題 2.7. 放物線織面 $P(t, u)$ の特異点 (t_0, u_0) は余階数 1 であるとする. このとき, (t_0, u_0) がホイットニーの傘であるための必要十分条件は

$$\det \begin{pmatrix} A_t(t_0, u_0) & A_u(t_0, u_0) \\ B_u(t_0, u_0) & B_u(t_0, u_0) \end{pmatrix} \neq 0$$

となることである.

証明. 佐治の判定法を適用する. $P(t, u)$ に関してベクトル場 η, ξ を

$$\eta = 2p(t) \frac{\partial}{\partial t} - (\mu(t) + 2up(t) + p(t)c_1(t)(u^2 - 1)) \frac{\partial}{\partial u}, \quad \xi = \frac{\partial}{\partial u}$$

にとることができる. あとは直接 $\xi\varphi$ を計算すれば良い. $\square$

例 2.8. 例 2.4(1) に命題 2.7 を適用することにより, この放物線織面は 4 つ $((t, u) = (0, 0), (\pi/2, 0), (\pi, 0), (3\pi/2))$ のホイットニーの傘を持つことがわかる.

2.2 放物線織面の縮括線

線織面や円織面の場合には, 特異点集合 (の像) に関連した曲線である縮括線*4 と呼ばれる曲線が定義された. ここでは, 放物線織面に対しても縮括線を導入し, 特異点集合 (の像) との関係を調べる.

放物線織面 $P(t, u)$ 上の曲線

$$\sigma(t) = f(t) + p(t)((u(t)^2 - 1)\mathbf{a}_1(t) + 2u(t)\mathbf{a}_2(t))$$

を考える. $\sigma(t)$ が各ルーリング P_t との交点で, P_t の乗った平面における法ベクトルに直交するとき, すなわち,

$$\dot{\sigma}(t) \cdot (-\mathbf{a}_1(t) + u(t)\mathbf{a}_2(t)) = 0, \quad (\forall t)$$

を満たすとき $\sigma(t)$ を $P(t, u)$ の縮括線 (ていかつせん, striction curves) であると呼ぶ.

命題 2.9. $\sigma(t)$ が放物線織面 $P(t, u)$ の縮括線であるための必要十分条件は次が成立することである:

$$B(t, u(t)) = 0 \quad (\forall t)$$

注意 2.10. (1) 縮括線の定義式に登場するベクトル $-\mathbf{a}_1(t) + u(t)\mathbf{a}_2(t)$ とは放物線 P_t が乗った平面における P_t の法ベクトルである.

(2) $P(t, u)$ が縮括線 $\sigma(t)$ を持てば, $\sigma(t)$ は $P(t, u)$ 上の特異点集合の像の一部を通る.

例 2.11. (1) 例 2.4 (1) は縮括線を持ちそれは $u(t) = -\frac{\sqrt{2} \sin 4t}{\sqrt{\cos 4t + 3}}$ のときであり,

$$\sigma(t) = \frac{1}{\cos 4t + 3} \begin{pmatrix} -5 \cos 4t \cos t + \cos t + 6 \cos 3t + 2 \cos 3t \cos 4t \\ 4 \sin t - 7 \sin 3t - 5 \sin 5t - 2 \sin 7t \\ \cos 2t(\cos 4t + \cos 8t + 2) \end{pmatrix}$$

である. 図 6 左を参照する (黒線が縮括線である).

(2) 例 2.4 (2) は縮括線を持ちそれは $u(t) = -\frac{t(9t^2 + 2)}{\sqrt{9t^4 + 9t^2 + 1}}$ のときであり, $\sigma(t) = {}^t(t, t^2, t^3)$ である. 図 6 右を参照する (黒線が縮括線である).

*4 線織面 $F(t, u) = \gamma(t) + u\delta(t)$ 上の曲線 $\sigma(t) = \gamma(t) + u(t)\delta(t)$ が縮括線であるとは任意の t において $\dot{\sigma}(t) \cdot \delta(t) = 0$ を満たすときをいう.
円織面 $F(t, u) = \gamma(t) + r(\mathbf{a}_1(t) \cos u + \mathbf{a}_2(t) \sin u)$ 上の曲線 $\sigma(t) = \gamma(t) + r(\mathbf{a}_1(t) \cos u(t) + \mathbf{a}_2(t) \sin u(t))$ が縮括線であるとは任意の t において $\dot{\sigma}(t) \cdot (\mathbf{a}_1(t) \cos u(t) + \mathbf{a}_2(t) \sin u(t)) = 0$ を満たすときをいう.

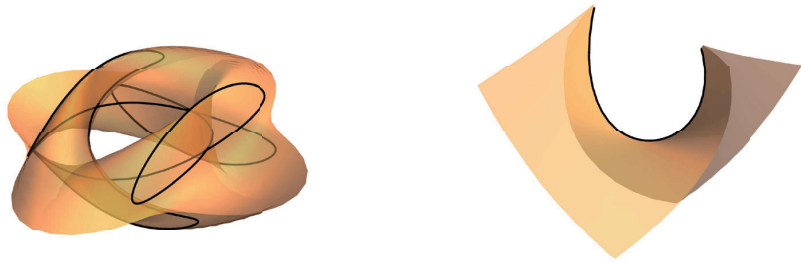


図6 例 2.11 の図 (左：(1), 右：(2))

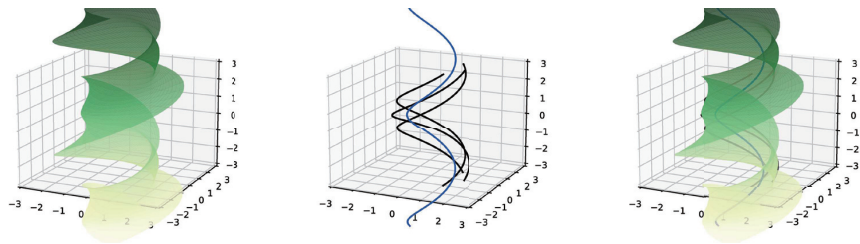


図7 例 2.12 の図 (左： $P(t, u)$, 中央： $f(t)$ (青線), 縮括線 (黒線), 右：左図と中央図を合わせた図)

例 2.12. $f(t) = \begin{pmatrix} -\cos t \\ -\sin t \\ t \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_1(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_2(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_3(t) = \mathbf{a}_1(t) \times \mathbf{a}_2(t)$, $p(t) = 1/2$ とおく. このとき, $\dot{f}(t) = -\mathbf{a}_2(t) + \mathbf{a}_3(t)$, $c_1(t) = 1$, $c_2(t) = c_3(t) = 0$ である. よって, $A(t, u) = 1$, $B(t, u) = -u$ より, 放物線織面

$$P(t, u) = \begin{pmatrix} -\cos t \\ -\sin t \\ t \end{pmatrix} + \frac{(u^2 - 1)}{2} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix}$$

は特異点を持たず, 3本の縮括線 $P(t, 0)$, $P(t, \pm 1)$ を持つ. 図7を参照する.

さらに次が成立する：

命題 2.13. 曲線 $\sigma(t) = f(t) + p(t)((u(t)^2 - 1)\mathbf{a}_1(t) + 2u(t)\mathbf{a}_2(t))$ を $P(t, u)$ の縮括線であるとし, $\xi(t) = \frac{u(t)\mathbf{a}_1(t) + \mathbf{a}_2(t)}{\sqrt{u(t)^2 + 1}}$ とおく*5. このとき, $\sigma(t)$ が特異曲線の像の一部であれば任意の t において $\dot{\sigma}(t) \cdot \xi(t) = 0$ が成立する. そうでなければ, 各ルーリング $\mathcal{P}_t$ は点 $P(t, u(t))$ において法ベクトル $P_t \times P_u$ を含む平面上にある.

よって, 縮括線が特異点集合の像を通るときその点において縮括線の接ベクトルはルーリングの乗った平面上にあることがわかる.

3 幾何学的制約付きの放物線織面

例 2.4 が示すように, 放物線織面 $P(t, u)$ のクラスは大きすぎる. 以下では幾何学的な制約を満たす放物線織面を考える.

*5 $\xi(t)$ はルーリングの縮括線との交点における単位接ベクトルである.

3.1 各ルーリングが曲率線

命題 3.1. 放物線織面 $P(t, u)$ の各ルーリング $\mathcal{P}_t$ が曲率線^{*6} であるための必要十分条件は、任意の t において

$$(1) \ c_2(t) \neq 0, c_1(t) = \lambda(t) = \mu(t) = \dot{p}(t) = 0, \quad \text{または} \quad (2) \ c_2(t) = c_3(t) = \delta(t) = 0$$

が成立することである。

よって、命題 2.5 により次が得られる。

系 3.2. 放物線織面 $P(t, u)$ は各ルーリング $\mathcal{P}_t$ が曲率線であれば、 $P(t, u)$ はフロンタルである。

命題 3.1 の条件 (2) が成立するとき $\mathbf{a}_3(t)$ は定ベクトル $\mathbf{a}_3$ である。よって、(2) が成立するとき曲面 $P(t, u)$ は $\mathbf{a}_3$ を法ベクトルとする平面の一部である。

以下で、命題 3.1 の (1) の場合に注目し、特異点集合の像である特異曲線 $\sigma(t)$ が

$$\sigma(t) = f(t) + p((u(t))^2 - 1)\mathbf{a}_1 + 2u(t)\mathbf{a}_2$$

の形であるとき、すなわち $(t, u(t))$ が $P(t, u)$ の特異点集合の一部であるときに、 $P(t, u)$ の特異点型と、 $\sigma(t)$ とルーリング $\mathcal{P}_t$ との接触具合の関係を調べる。このとき、 $A(t, u(t)) = B(t, u(t)) = 0$ に注意する。

Montaldi [5, 6]^{*7} にならい空間内の曲線同士の接触を次のように定義する。パラメータ表示された曲線 $\Gamma: \gamma(t)$ と陰関数表示された曲線 $\mathcal{G}: \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid g_1(x, y, z) = g_2(x, y, z) = 0\}$ を考える。このとき、 Γ が $t = t_0$ において $\mathcal{G}$ と k 次の接触をする (または $(k+1)$ 点接触をもつ) とは

$$\frac{d^i}{dt^i}(g_1(\gamma(t)), g_2(\gamma(t))) = (0, 0) \quad (i = 0, \dots, k), \quad \frac{d^{k+1}}{dt^{k+1}}(g_1(\gamma(t)), g_2(\gamma(t))) \neq (0, 0)$$

を満たすときである。また、

$$\frac{d^i}{dt^i}(g_1(\gamma(t)), g_2(\gamma(t))) = (0, 0) \quad (i = 0, \dots, k)$$

が成立するとき、 Γ と $\mathcal{G}$ は少なくとも k 次の接触をする (または、少なくとも $k+1$ 点接触を持つ) という。

命題 3.3. 特異曲線の像 $\sigma(t) = f(t) + p((u(t))^2 - 1)\mathbf{a}_1(t) + 2u(t)\mathbf{a}_2(t)$ と放物線 $\mathcal{P}_{t_0}$ は交点において $1 + 1$ 点以上の接触を持つ。

証明. 放物線 $\mathcal{P}_{t_0}$ を陰関数であらわすと

$$\mathcal{P}_{t_0}: \left\{ (x, y, z) \mid \begin{cases} g_1(x, y, z) = \mathbf{a}_3(t_0) \cdot ({}^t(x, y, z) - v(t_0)) = 0, \\ g_2(x, y, z) = (\mathbf{a}_2(t_0) \cdot ({}^t(x, y, z) - v(t_0)))^2 - 4p(\mathbf{a}_1(t_0) \cdot ({}^t(x, y, z) - v(t_0))) = 0 \end{cases} \right\}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} g_1(\sigma(t)) &= \mathbf{a}_3(t_0) \cdot (\sigma(t) - v(t_0)) \\ g_2(\sigma(t)) &= (\mathbf{a}_2(t_0) \cdot (\sigma(t) - v(t_0)))^2 - 4p(\mathbf{a}_1(t_0) \cdot (\sigma(t) - v(t_0))). \end{aligned}$$

なので、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}g_1(\sigma(t)) &= \mathbf{a}_3(t_0) \cdot \dot{\sigma}(t) \\ \frac{d}{dt}g_2(\sigma(t)) &= 2(\mathbf{a}_2(t_0) \cdot (\sigma(t) - v(t_0)))(\mathbf{a}_2(t_0) \cdot \dot{\sigma}(t)) - 4p(\mathbf{a}_1(t_0) \cdot \dot{\sigma}(t)) \end{aligned}$$

^{*6} 曲面 $f(u, v)$ 上の曲線 $\gamma(t)$ の接ベクトル $\dot{\gamma}(t)$ が主曲率方向を向いているとき曲率線 (curvature line) と呼ぶ。 $f(u, v)$ 上の曲線 $\gamma(t)$ が曲率線であるための必要十分条件は $|\dot{\gamma}(t) \nu(t)| = 0 \ (\forall t)$ が成立することである。ここで $\nu(t)$ は $\gamma(t)$ に沿った $f(u, v)$ の法ベクトルをあらわす。

^{*7} $M_i, N_i \subset \mathbb{R}^n \ (i=0, 1)$ を部分多様体とし $\dim M_0 = \dim M_1, \dim N_0 = \dim N_1$ を満たすとする。 M_0 と N_0 の y_0 における接触と M_1 と N_1 の y_1 における接触が同じ型であるとは微分同相写像芽 $\Phi: (\mathbb{R}^n, y_0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, y_1)$ で $\Phi(M_0) = M_1, \Phi(N_0) = N_1$ を満たすものが存在するときをいう。

定理 [Montaldi '86] $g_i: (M_i, x_i) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ をはめ込み芽, $f_i: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^k, 0)$ を沈め込み芽で $N_i = f_i^{-1}(0) \ (i=0, 1)$ を満たすものとする。このとき、 M_0 と N_0 の y_0 における接触と M_1 と N_1 の y_1 における接触が同じ型であるための必要十分条件は $f_0 \circ g_0$ と $f_1 \circ g_1$ が K -同値であることである。

である。ここで、 $\dot{\sigma}(t) = 2pu(t)\dot{u}(t)\mathbf{a}_1(t) + 2p\dot{u}(t)\mathbf{a}_2(t) + A(t, u(t))\mathbf{a}_3(t)$ である。よって、

$$\frac{d}{dt}g_1(\sigma(t_0)) = A(t_0, u(t_0)) = 0, \quad \frac{d}{dt}g_2(\sigma(t_0)) = 0.$$

□

さらに、放物線織面 $P(t, u)$ の特異点の型と特異曲線とルーリングとの接触の関係を調べる。

曲面 $f(u, v)$ が (u_0, v_0) において原点の十分近くで定義された $f_C = (2u^3, 3u^2, v)$ と右左同値であるとき $f(u, v)$ は**カスプ辺 (cuspidal edge)** であるという。また、 $f(u, v)$ が (u_0, v_0) において原点の十分近くで定義された $f_S = (3u^4 + u^2v, -4u^3 - 2uv, v)$ と右左同値であるとき $f(u, v)$ は**ツバメの尾 (Swallowtail)** であるという。

カスプ辺とツバメの尾の判定法が國分-ラスマン-佐治-梅原-山田 [4] により得られている。判定法を導入するために記号を用意する。フロンタル $f(u, v)$ の法線ベクトルを $\tilde{v}(u, v)$ を用いて

$$\Lambda(u, v) = \det(f_u \ f_v \ \tilde{v})$$

とおく。 $\{(u, v) \mid \Lambda(u, v) = 0\}$ は $f(u, v)$ の特異点集合に一致するので Λ を**特異点識別子**と呼び、 $(\Lambda_u(u_0, v_0), \Lambda_v(u_0, v_0)) \neq (0, 0)$ であるとき $f(u, v)$ は (u_0, v_0) において**非退化**であるという。フロンタル $f(u, v)$ が (u_0, v_0) において非退化であるとき $f(u, v)$ は (u_0, v_0) の近くで正則曲線となる。この曲線を**特異曲線**と呼び、その接ベクトルを**特異方向**と呼ぶ。微分写像 $d_{(u_0, v_0)}f$ に関して $d_{(u_0, v_0)}f(\mathbf{x}) = 0$ となるベクトル $\mathbf{x}$ を**退化ベクトル**と呼ぶ。

フロンタル $f(u, v)$ の特異点 (u_0, v_0) が非退化であるとき (u_0, v_0) を通る特異曲線を $\gamma(t)$ ($\gamma(t_0) = (u_0, v_0)$) とおき、退化方向を η とおいて

$$\Delta(t) = \det(\dot{\gamma}(t) \ \eta(\gamma(t)))$$

とおく。このとき、次が得られている：

命題 3.4 ([4]). 波面 $f(u, v)$ の特異点 (u_0, v_0) が非退化であるとする。このとき、次が成立する：

- (1) (u_0, v_0) がカスプ辺であるための必要十分条件は $\Delta(t_0) \neq 0$ が成立することである、
- (2) (u_0, v_0) がツバメの尾であるための必要十分条件は $\Delta(t_0) = 0, \dot{\Delta}(t_0) \neq 0$ が成立することである。

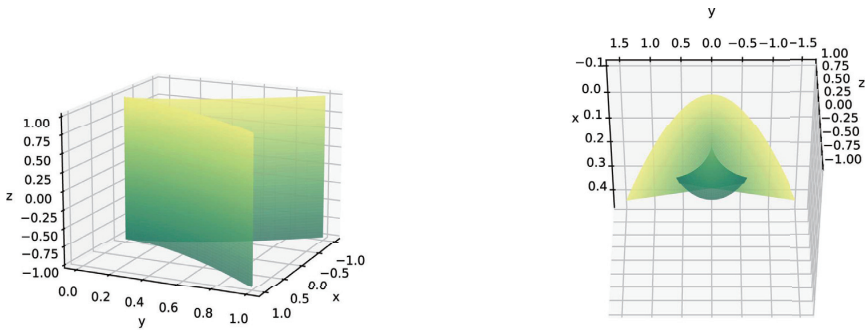


図8 左：カスプ辺，右：ツバメの尾

例 3.5. 例 2.4(2) に命題 3.4 を適用することにより、この放物線織面は (t, t^2, t^3) に沿ってカスプ辺を持つことがわかる。

一方、直接の計算により命題 3.1 の (1) を満たす放物線織面 $P(t, u)$ が波面であるための必要十分条件は

$$-c_2(t) + c_3(t)u \neq 0$$

が成立することである。このとき、次が得られる。

定理 3.6. 命題 3.1 の条件 (1) を満たす放物線式面 $P(t, u)$ は波面であるとする。特異曲線 $\sigma(t)$ は $(t, t(u))$ 曲線の像であるとし、 $u(t_0) = u_0$ とする。このとき、

- (1) (t_0, u_0) がカスプ辺であるための必要十分条件は $\sigma(t)$ とルーリング $\mathcal{P}_{t_0}$ は $t = t_0$ において $(1+1)$ 点接触をもつことである,
- (2) (t_0, u_0) がツバメの尾であるための必要十分条件は $\sigma(t)$ とルーリング $\mathcal{P}_{t_0}$ は $t = t_0$ において $(2+1)$ 点接触をもつことである.

証明. (1) について) 直接の計算により

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dt^2}g_1(\sigma(t)) &= \mathbf{a}_3(t_0) \cdot \ddot{\sigma}(t), \\ \frac{d^2}{dt^2}g_2(\sigma(t)) &= 2(\mathbf{a}_2(t_0) \cdot \dot{\sigma}(t))^2 + 2(\mathbf{a}_2(t_0) \cdot (\sigma(t) - v(t_0)))(\mathbf{a}_2(t_0) \cdot \ddot{\sigma}(t)) - 4p(\mathbf{a}_1(t_0) \cdot \ddot{\sigma}(t)),\end{aligned}$$

$$\ddot{\sigma}(t) = 2p(\dot{u} + u\ddot{u})\mathbf{a}_1 + 2p\ddot{u}\mathbf{a}_2 + 2p\dot{u}(c_2u + c_3)\mathbf{a}_3 = 2p(\dot{u} + u\ddot{u})\mathbf{a}_1 + 2p\ddot{u}\mathbf{a}_2 + 2p\dot{u}A_u\mathbf{a}_3$$

がわかるので

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dt^2}g_1(\sigma(t_0)) &= 2p\dot{u}(c_2u + c_3) = -A_t(t_0, u(t_0)) \\ \frac{d^2}{dt^2}g_2(\sigma(t_0)) &= 0\end{aligned}$$

よって, $\sigma(t)$ と放物線 $\mathcal{P}_{t_0}$ が交点において 1 次の接触, すなわち $1+1$ 点接触するのは

$$A(t_0, u(t_0)) = 0, \quad A_t(t_0, u(t_0)) \neq 0$$

が成立するときである.

次に, カスプ辺の判定法を計算する. 特異曲線が $\gamma(t) = (t, u(t))$ なのでその接ベクトル, すなわち, 特異方向は $\frac{\partial}{\partial t} + \dot{u}\frac{\partial}{\partial u}$ でありこのベクトルは $A_u\frac{\partial}{\partial t} - A_t\frac{\partial}{\partial u}$ に平行である. また, $dP = P_t dt + P_u du = A(t, u)\mathbf{a}_3 dt + 2p(u\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2)du$ より $S(P) = \{A(t, u) = 0\}$ 上で退化ベクトルは $\eta = \frac{\partial}{\partial t}$ にとれる. よって, カスプ辺の判定法により $\gamma(t_0) = (t_0, u(t_0))$ が $P(t, u)$ のカスプ辺であるための必要十分条件は $\dot{u}(t_0) \neq 0$ すなわち $A_t(t_0, u(t_0)) \neq 0$ を得る.

(2) について) 直接の計算により

$$\begin{aligned}\frac{d^3}{dt^3}g_1(\sigma(t)) &= \mathbf{a}_3(t_0) \cdot \ddot{\sigma}(t), \\ \frac{d^3}{dt^3}g_2(\sigma(t)) &= 6(\mathbf{a}_2(t_0) \cdot \dot{\sigma}(t))(\mathbf{a}_2(t_0) \cdot \ddot{\sigma}(t)) \\ &\quad + 2(\mathbf{a}_2(t_0) \cdot (\sigma(t) - v(t_0)))(\mathbf{a}_2(t_0) \cdot \ddot{\sigma}(t)) - 4p(\mathbf{a}_1(t_0) \cdot \ddot{\sigma}(t)),\end{aligned}$$

$$\ddot{\sigma}(t) = \mathbf{a}_1(p(6\dot{u}\ddot{u} + 2u\ddot{\ddot{u}}) - c_2\dot{u}A_u) + \mathbf{a}_2(2p\ddot{\ddot{u}} - c_3\dot{u}A_u) + \mathbf{a}_3(c_22p(\dot{u}^2 + u\ddot{\ddot{u}}) + c_32p\ddot{\ddot{u}} + (\ddot{\ddot{u}}A_u + \dot{u}A_{ut} + \dot{u}^2A_{uu}))$$

がわかるので,

$$\begin{aligned}\frac{d^3}{dt^3}g_1(\sigma(t_0)) &= c_22p(\dot{u}^2 + u\ddot{\ddot{u}}) + c_32p\ddot{\ddot{u}} + (\ddot{\ddot{u}}A_u + \dot{u}A_{ut} + \dot{u}^2A_{uu}) \\ &= 2\dot{u}^2A_{uu} + 2\ddot{\ddot{u}}A_u + \dot{u}A_{ut} \\ &= -2A_{tt} - 3\dot{u}A_{ut} \\ &= -2A_{tt}(t_0, u(t_0)).\end{aligned}$$

ここで, $A(t, u(t)) = 0$ より $A_t(t, u(t)) + \dot{u}A(t, u(t)) = 0$, さらに

$$A_{tt} + 2\dot{u}A_{tu} + \ddot{u}A_u + \dot{u}^2A_{uu} = 0$$

に注意する. また,

$$\frac{d^3}{dt^3}g_2(\sigma(t_0)) = 0.$$

よって, $\sigma(t)$ と放物線 $\mathcal{P}_{t_0}$ が 2 次の接触, すなわち $2+1$ 点接触するのは

$$A(t_0, u(t_0)) = A_t(t_0, u(t_0)) = 0, \quad A_{tt}(t_0, u(t_0)) \neq 0$$

が成立するときである。

次にツバメの尾の判定法を計算する。特異ベクトルは $\dot{\gamma}(t) = \frac{\partial}{\partial t} + \dot{u} \frac{\partial}{\partial u}$, 退化ベクトルは $\eta = \frac{\partial}{\partial t}$ なので, これらが作る行列式

$$\Delta(t) = \det(\dot{\gamma}(t) \eta(\gamma(t))) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \dot{u} \end{pmatrix} = \dot{u}$$

が得られる。よって, ツバメの尾の判定法により $\gamma(t_0)$ がツバメの尾であるための必要十分条件は

$$A(t_0, u(t_0)) = 0, \quad A_t(t_0, u(t_0)) = 0, \quad A_{tt}(t_0, u(t_0)) \neq 0 \quad (\Leftrightarrow \ddot{u}(t_0) \neq 0)$$

が成立することである。 $\square$

3.2 共焦点 (Conforcus)

放物線織面 $P(t, u)$ の各ルーリングが共通の焦点をもつとき $P(t, u)$ は **共焦点**であるという。例えば, 回転放物面 $z = a(x^2 + y^2)$ や例 2.4(1) は共焦点である。

放物線織面が共焦点であるときそのパラメータ表示を $CP(t, u)$ であらわす。(2.1) に $f(t) = O$ を代入して原点を共通の焦点とする放物線織面のパラメータ表示を得る:

$$CP: CP(t, u) = p(t)((u^2 - 1)\mathbf{a}_1(t) + 2u\mathbf{a}_2(t)) \quad (3.1)$$

曲面 $CP(t, u)$ の特異点集合は以下である:

補題 3.7. $S(CP) = \{(t, u) \mid c_2(t)(u^2 - 1) + c_3(t)2u = \dot{p}(t) + p(t)c_1(t)u = 0\}$

命題 3.8. $c_1(t) \neq 0$ であるとき, 曲面 $CP(t, u)$ は縮括線

$$\sigma(t) = \left(\frac{\dot{p}(t)^2}{p(t)c_1(t)^2} - p(t) \right) \mathbf{a}_1(t) - 2 \frac{\dot{p}(t)}{c_1(t)} \mathbf{a}_2(t)$$

をもつ。さらに, 縮括線が存在すればそれは特異点集合の像の一部を通る。

空間曲線 γ は正則であるとし, 原点を通らず各接線も原点を通らないものとする。 γ を弧長パラメータであらわし $\gamma(s)$ と書く。このとき, $\gamma'(s)$ と $\gamma(s)$ のなす角を $\phi(s)$ とおく。

命題 3.9. 原点を共通の焦点とし各ルーリングが $\gamma(s)$ と交わり, その交点において $\gamma(s)$ とルーリングが $(1+1)$ -点以上の接触をする共焦点放物線織面 $CP(s, u)$ は次を満たす:

$$\begin{cases} p(s) = |\gamma(s)| \sin^2 \phi(s), \\ \mathbf{a}_1(s) = 2 \cos \phi(s) \gamma'(s) - \frac{\gamma(s)}{|\gamma(s)|}, \\ \mathbf{a}_2(s) = -\frac{\cos 2\phi(s)}{\sin \phi(s)} \gamma'(s) + \cot \phi(s) \frac{\gamma(s)}{|\gamma(s)|}. \end{cases}$$

このような $CP(s, u)$ を $\gamma(s)$ で生成される**接触共焦点放物線織面**と呼び $CP_\gamma(s, u)$ と書く。

補題 3.10. $\gamma(s)$ で生成される接触共焦点放物線織面 $CP_\gamma(s, u)$ に対して次が得られる:

$$c_1(s) = -(2\phi'(s) + \frac{\sin \phi(s)}{|\gamma(s)|}), \quad c_2(s) = \frac{2 \cos \phi(s) |\gamma''(s) \gamma'(s) \gamma(s)|}{|\gamma(s)| \sin \phi(s)}, \quad c_3(s) = -\frac{\cos 2\phi(s) |\gamma''(s) \gamma'(s) \gamma(s)|}{|\gamma(s)| \sin^2 \phi(s)}.$$

$$\begin{cases} A(s, u) = p(s)(c_2(s)(u^2 - 1) + c_3(s)2u) = 2|\gamma''(s) \gamma'(s) \gamma(s)| (u \sin \phi(s) - \cos \phi(s))(u \cos \phi(s) + \sin \phi(s)) \\ B(s, u) = -(u^2 + 1)(p'(s) + p(s)c_1(s)u) = (u^2 + 1)(2|\gamma(s)|\phi'(s) + \sin \phi(s)) \sin \phi(s)(u \sin \phi(s) - \cos \phi(s)). \end{cases}$$

命題 3.8 により, $c_1(s) \neq 0$, すなわち, $2|\gamma(s)|\phi'(s) + \sin \phi(s) \neq 0$ であれば $CP_\gamma(s, u)$ の縮括線は $u = \frac{\cos \phi(s)}{\sin \phi(s)}$ のときに対応する。このとき, 直接の計算により次がわかる。

系 3.11. $c_1(s) \neq 0$ であるとき $CP_\gamma(s, u)$ の縮括線をもち, それは $\gamma(s)$ である。

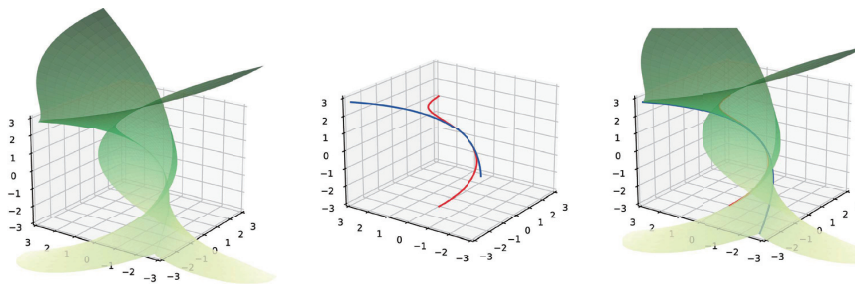


図9 例 3.12 の図 (左: $CP(t, u)$, 中央: 縮括線 (赤線), $(s1)$ を満たす特異点集合の像 (青線), 右: 左図と中央図を合わせた図)

縮括線 $\gamma(s)$ は特異点集合の像の一部を通るが, この縮括線に対応するもの以外の特異点 (s, u) は次で特徴付けられる:

$$(s1) \quad 2|\gamma(s)|\phi'(s) + \sin \phi(s) = 0 \text{ かつ } |\gamma''(s) \gamma'(s) \gamma(s)| = 0, \text{ または}$$

$$(s2) \quad 2|\gamma(s)|\phi'(s) + \sin \phi(s) = 0 \text{ かつ } u = \frac{-\sin \phi(s)}{\cos \phi(s)} \quad (\cos \phi(s) \neq 0).$$

直接の計算により, $(s2)$ を満たす特異点の像は曲線 $\alpha(s) = -\tan^2 \phi(s) \gamma(s)$ であることがわかる.

例 3.12. $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{pmatrix}$ とおくと, $\cos \phi(t) = \frac{t}{\sqrt{2\sqrt{t^2+1}}}$ となり, γ で生成される接触共焦点放物線織面は

$$CP_\gamma(t, u) = \frac{t^2 + 2}{2\sqrt{t^2 + 1}} \left(\frac{u^2 - 1}{\sqrt{t^2 + 1}} \begin{pmatrix} -t \sin t - \cos t \\ t \cos t - \sin t \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{2u}{\sqrt{t^2 + 1}\sqrt{t^2 + 2}} \begin{pmatrix} t \cos t - \sin t \\ t \sin t + \cos t \\ t^2 + 1 \end{pmatrix} \right)$$

となる. この $CP_\gamma(t, u)$ において $\gamma(t)$ は $t \neq 0$ において縮括線である. 他の特異点について, から得られるものは $(0, u)$ であり, $(s2)$ から得られるものは存在しない.

参考文献

- [1] S. Akamine: *CAUSAL CHARACTERS OF ZERO MEAN CURVATURE SURFACES OF RIEMANN TYPE IN THE LORENTZ-MINKOWSKI 3-SPACE*, Kyushu J. Math. **71** (2017), 211–249.
- [2] L. J. Alías, R. M. B. Chaves and P. Mira: *Björling problem for maximal surfaces in Lorentz–Minkowski space*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. (2003), **134**, 289–316.
- [3] S. Izumiya, K. Saji, and N. Takeuchi: *Circular Surfaces*, Adv. Geom, Vol 7, 295–313, 2007.
- [4] M. Kokubu, W. Rossman, K. Saji, M. Umehara, K. Yamada: *Singularities of flat fronts in hyperbolic space*, Pacific J. Math. 221 (2005), no. 2, 303–351.
- [5] J. A. Montaldi: *Contact with applications to submanifolds*, Ph.D. thesis, University of Liverpool.
- [6] J. A. Montaldi: *On contact between submanifolds*, Michigan Math. J. 33 (1986), no. 2, 195–199.
- [7] K. Saji: *Criteria for cuspidal S_k singularities and their applications*, J. Gökova Geom. Topol. GGT **4** (2010), 67–81.
- [8] 山本卓宏, 竹内伸子: 1つの漸近線を共有する双曲線対を用いた放物線族から作られる曲面, 東京学芸大学紀要 自然科学系 第74集, 2022, 1–7.
- [9] 山本卓宏, 西村圭一, 太田伸也, 竹内伸子: 円錐曲線に関する探究–教員養成課程における探究の課題として–, 日本数学教育学会高専・大学部会論文誌, Vol. 29 No. 1, May 2023.