(3,5)-分布の特異曲線を巡って

北海道大学，石川剛郎
Goo Ishikawa, Hokkaido University

1　導入.

本稿は $(3,5)$-分布の特異曲線に関して最近得られた結果を紹介するサーベイ和文論文である．詳細についてと証明に関しては，オリジナル論文 [4] を参照されたい.

定義 1.1 Y を 5 次元多様体，$D \subset TY$ を階数 3 の接分布（つまり部分ベクトル束）とする．このとき，D が $(3,5)$-**接分布**とは，その増大度が $(3,5)$ のとき，つまり，$\mathrm{rank}(\partial D) = 5$ のときに言う．ここで，$\partial\mathcal{D} := \mathcal{D} + [\mathcal{D}, \mathcal{D}]$ は，局所切断の層 $\mathcal{D}$ からリー括弧積で得られる D の導来系である.

例 1.2 $\mathbb{P}^3$ を 3 次元実射影空間とする.

$$Y := P(T\mathbb{P}^3) = \{(p, \ell) \mid p \in \mathbb{P}^3, \ell \in P(T_p\mathbb{P}^3)\}.$$

とおく．ここで，$P(T_p\mathbb{P}^3) \cong P(\mathbb{R}^3) = \mathbb{P}^2$ である．このとき， $\dim(Y) = 5$ である．自然な射影 $\pi : Y \to \mathbb{P}^3$, $\pi(p, \ell) = p$ について，階数 3 の接分布 $D \subset TY$ を

$$D_{(p,\ell)} := \pi_*^{-1}(\ell) = \{v \in T_{(p,\ell)}Y \mid \pi_*(v) \in \ell\} \subset T_{(p,\ell)}Y,$$

により定義する．$J^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2) \subset Y$ 上の局所座標 x_0, x_1, x_2, p_1, p_2 を自然に取れば，D は

$$\frac{\partial}{\partial x_0} + p_1\frac{\partial}{\partial x_1} + p_2\frac{\partial}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial}{\partial p_1}, \quad \frac{\partial}{\partial p_2},$$

により生成され，D が $(3,5)$-分布となることが分かる. □

$(3,5)$-分布と密接に関係する接分布に $(2,3,5)$-分布がある：

Key words: 制御系，終点写像，異常測地線，拘束ハミルトン系，擬直積構造，ラグランジュ錐構造
2010 *Mathematics Subject Classification*: Primary 53C17, Secondary 53B30, 58E10, 70H05, 93B27.

定義 1.3 Y を 5-次元多様体，$S \subset TY$ を階数 2 を接分布とする．このとき，S が $(2,3,5)$**-分布** あるいは **カルタン分布**であるとは，S の小増大度が $(2,3,5)$ のとき，つまり，$\mathrm{rank}(\partial S) = 3$ で $\mathrm{rank}(\partial^{(2)} S) = 5$ のときに言う．ここで，$\partial\mathcal{S} := \mathcal{S} + [\mathcal{S}, \mathcal{S}]$ および $\partial^{(2)}\mathcal{S} := \partial\mathcal{S} + [\mathcal{S}, \partial\mathcal{S}]$ である．文献 [3] を参照のこと．

S が $(2,3,5)$-分布のとき，$D := \partial S$ は $(3,5)$-分布となる．しかし，任意の $(3,5)$-分布が或る $(2,3,5)$-分布の導来系として得られるとは限らない．

例 1.4 上に述べた $(3,5)$-分布の例（例 1.2）$(P(T\mathbb{P}^3), D)$ を思い出そう．定理 3.1 と例 3.2 から，この $(3,5)$-分布 D は，どんな $(2,3,5)$-分布からも得られないことがわかる．一般に，すべての $(3,5)$-分布の中で，例 1.2 の $P(T\mathbb{P}^3)$ と，$(2,3,5)$-分布は，両極に位置していると言うことができる：

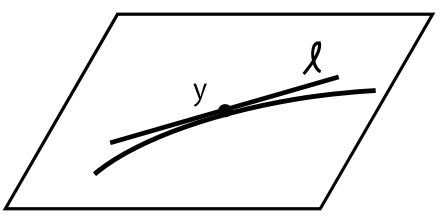
All $(3,5)$-distributions

$P(T\mathbb{P}^3) \supset J^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ ..... $(2,3,5)$-分布

$(2,3,5)$-分布のクラスの研究は，単純リー群 G_2 と関係する E. カルタンの仕事から始まり，多くの数学者により研究されたきた．$(2,3,5)$-分布は,「回転する球」の問題 (Agrachev(2007), Bor-Montgomery(2009), Baez-Huerta(2014), An-Nurowski(2014)...), $(2,3)$-計量と $(3,4)$-計量との関連 (Nurowski(2005), Leistner-Nurowski-Sagerschung(2017)), Chazy 方程式との関係 (Randall(2016)) などの研究がある．

さて，ここでは，$(3,5)$-分布に関するわれわれの結果を述べる前に，関連する $(2,3,5)$-分布に関する結果をまず思い出しておこう：

定理 1.5 (Liu-Sussman [8], Montgomery [9], [6]) S を 5-次元多様体 Y 上の $(2,3,5)$-分布とする．このとき，任意の $y \in Y$ と任意の方向 $\ell \in P(S_y)$ に対して，S-特異パス（= はめ込まれた S-特異曲線）$\gamma : (\mathbb{R}, 0) \to Y$ で $\gamma(0) = y$ および $[\gamma'(0)] = \ell$ を満たすものがパラメータ付けを除いて一意的に存在する．□



したがって，(Y,S) 上の S-特異パスたちは，別の 5-次元多様体 X, S-特異曲線全体の空間，を形成することがわかる．

次の結果は，$(2,3,5)$-分布と接触 5-次元多様体上のラグランジュ錐構造の間の双対性を与えている：

定理 1.6 ([6]). 5 次元多様体 Y 上の任意の $(2,3,5)$-分布 $S \subset TY$ に対し，S-特異パス全体が作る 5 次元空間 X 上に自然に接触構造 $H \subset TX$ と非退化錐構造 $C \subset H$ が対応し，元の空間 Y は，C-特異パス全体の空間として復元され，元の分布 S も，錐構造 C から復元される．

上の定理で与えられた $(2,3,5)$-分布と 5 次元接触多様体上の錐構造の間の双対性は，次のように精密化される：

定理 1.7 ([7]). 次の局所同型類の間に自然な全単射が存在する：

$$\{(2,3,5)\text{-分布 } (Y,S)\}/\cong$$

$$\longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{5 次元接触多様体 (X, H) の} \\ \underline{\text{非退化}}\ \text{ラグランジュ錐構造 } (X,C) \text{ で条件} \\ C \subset H \subset TX, \\ \text{すべての切断 } s : X \to PC, \text{ について } \partial(T_sC) \subset O_s^{(2)}C, \\ \text{であり } s \text{ によらず } O_s^{(3)}C = H. \end{array} \right\} / \cong$$

本論文では，まず，上に紹介した $(2,3,5)$-分布の特異曲線による双対性がどのようにして得られるかを述べ，次にそれが，一般の $(3,5)$-分布に対してどのように拡張されるか？ということを説明したい．

2 $(2,3,5)$-分布に関する双対性をいかに得るか．

まず，$(2,3,5)$-分布に対して，その拡張の概念を思い出しておこう．

S を 5 次元多様体 Y の上の $(2,3,5)$-分布とする．S の “接直線” の空間

$$Z := P(S) := (S \setminus 0)/\mathbb{R}^\times = \{(y,\ell) \mid y \in Y,\ \ell \subset S_y (\subset T_yY),\ \dim(\ell) = 1\},$$

を考える．$\dim(Z) = 6$ であり，射影 $\pi_Y : Z \to Y, \pi(y,\ell) = \ell$ は $\mathbb{P}^1$-束となる．

階数 2 の部分束 $E \subset TZ$ を各 $(y,\ell) \in Z$ と $\ell \subset S_y$ に対して，

$$E_{(y,\ell)} := \pi_{Y*}^{-1}(\ell)\ (\subset T_{(y,\ell)}Z),$$

$S \subset TY$ の**カルタン拡張**と呼ぶ．すると，E は小増大度ベクトル $(2,3,4,5,6)$ の分布となる．すなわち，Z の各点で $\mathrm{rank}(E)=2$, $\mathrm{rank}(\partial E)=3$, $\mathrm{rank}(\partial^{(2)}E)=4$, $\mathrm{rank}(\partial^{(3)}E)=5$, $\mathrm{rank}(\partial^{(4)}E)=6$, となる．

このとき，E の内在的な直和分解

$$E = K \oplus L$$

を得る．ここで，$L := \mathrm{Ker}(\pi_{Y*}) \subset E$ であり，直線束 K of E は Y 上の S-特異パスの（接線方向による）一意的リフトの接方向からなる．この分解は，田中昇の意味で**擬直積構造**となる（[10]）．

これを，“幾何学的制御理論” の言葉で説明しよう．

一般に，多様体 M 上の**制御系** $\mathbb{C} : \mathcal{U} \xrightarrow{F} TM \to M$ とは，M 上の局所自明なファイブレーション $\pi_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} \to M$ と可微分写像 $F : \mathcal{U} \to TM$ で，図式

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{U} & \xrightarrow{F} & TM \\ \pi_{\mathcal{U}} \searrow & & \swarrow \pi_{TM} \\ & M & \end{array}$$

を可換にするものの組のことである．

M 上で局所に，制御系は M 上のベクトル場の族 $f_u(x) = F(x,u)$ $(x,u) \in \mathcal{U}, x \in M$ によって与えられる．

例 2.1 接分布 $S \subset TM$ (部分ベクトル束) は，包含写像により制御系 $\mathbb{S} : S \hookrightarrow TM \longrightarrow M$ と見なすことができる．

2 つの制御系 $\mathbb{C} : \mathcal{U} \xrightarrow{F} TM \xrightarrow{\pi_{TM}} M$ and $\mathbb{C}' : \mathcal{U}' \xrightarrow{F'} TM' \xrightarrow{\pi_{TM'}} M'$ が**同値**であるとは，或る微分同相写像 ψ と φ があって，図式

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{U} & \xrightarrow{F} & TM & \xrightarrow{\pi_{TM}} & M \\ \psi\downarrow & & \varphi_*\downarrow & & \downarrow\varphi \\ \mathcal{U}' & \xrightarrow{F'} & TM' & \xrightarrow{\pi_{TM'}} & M' \end{array}$$

が可換になるときに言う．微分同相写像の組 (ψ, φ) を制御系 $\mathbb{C}$ と $\mathbb{C}'$ との間の**同型**とよび．

制御系 $\mathbb{C} : \mathcal{U} \xrightarrow{F} TM \to M$ が与えられたとき，L^∞ つまり可測で測度 0 の部分を除いて有界である写像 $c : [a,b] \to \mathcal{U}$ が **許容制御**とは，曲線

$$\gamma := \pi_{\mathcal{U}} \circ c : [a,b] \to M$$

が微分方程式

$$\dot{\gamma}(t) = F(c(t)) \quad (\text{ほとんどずべての } t \in [a,b]).$$

を満たすときに言う．このとき，リプシッツ曲線 γ は**軌道** (trajectory) と呼ばれる．もし，$c(t) = (x(t), u(t))$ と書けば，$x(t) = \gamma(t)$ とおいて，

$$\dot{x}(t) = F(x(t), u(t)), \quad (\text{ほとんどすべての } t \in [a,b]),$$

が成り立つ．可微分（すなわち C^∞）はめ込みである軌道をパラメータ変換で移り合うものは同一視して考えたものを用語 “パス” で表すことにする．

点 $q_0 \in M$ を固定したとき，$\pi_{\mathcal{U}}(c(a)) = q_0$ を満たす許容制御 $c : [a,b] \to \mathcal{U}$ の全体はバナッハ多様体の構造を持つ．終点写像 (endpoint mapping) $\mathrm{End} : \mathcal{C} \to M$ を

$$\mathrm{End}(c) := \pi_{\mathcal{U}} \circ c(b)$$

により定義する．許容制御 $c : [a,b] \to \mathcal{U}, c \in \mathcal{C}$ が**特異** あるいは **異常**とは，c が End の臨界点，つまり，微分写像 $\mathrm{End}_* : T_c\mathcal{C} \to T_{\mathrm{End}(c)}M$ が全射でないときに言う．特異制御 c に対し，軌道 $\gamma = \pi_{\mathcal{U}} \circ c$ は**特異軌道**あるいは**特異曲線**あるいは**異常極値曲線**と呼ばれる．

特異制御は局所的な特徴付けを持つ：制御系 $F : \mathcal{U} \to TM$ の**ハミルトニアン** $H : \mathcal{U} \times_M T^*M \to \mathbb{R}$ を

$$H(x,p,u) := \langle p, F(x,u) \rangle, \quad ((x,u),(x,p)) \in \mathcal{U} \times_M T^*M.$$

により定義したとき，許容制御 $(x(t), u(t))$ が特異制御である条件は，次の拘束ハミルトン方程式

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = \dfrac{\partial H}{\partial p_i}(x(t), p(t), u(t)), & (1 \le i \le m) \\ \dot{p}_i(t) = -\dfrac{\partial H}{\partial x_i}(x(t), p(t), u(t)), & (1 \le i \le m) \\ \dfrac{\partial H}{\partial u_j}(x(t), p(t), u(t)) = 0, \quad (1 \le j \le r), & p(t) \neq 0. \end{cases}$$

を満たす**異常陪極値曲線** $(x(t), p(t), u(t))$ に持ち上げられることである．

余接束 T^*M 上の曲線 $(x(t), p(t))$ は特異曲線 $x(t)$ の **随伴曲線**と呼ばれる．

$Z = P(S) = (S \setminus 0)/\mathbb{R}^\times$ を S の接直線の空間とする．$\dim(Z) = 6$ である．空間 Z は S-特異パスの持ち上げにより自然に葉層付けられ，局所的に 2 重ファイブレーション

$$Y \xleftarrow{\pi_Y} Z \xrightarrow{\pi_X} X$$

を得る．

$E \subset TZ$ を $S \subset TY$ のカルタン延長とする．すなわち，すなわち，各 $(y,\ell) \in Z$, $\ell \subset T_yY$ に対し，$E_{(y,\ell)} := \pi_{Y*}^{-1}(\ell)$ とおく．すると，E は小増大度 $(2,3,4,5,6)$ の接分布となる．$L := \mathrm{Ker}(\pi_{Y*}), K := \mathrm{Ker}(\pi_{X*})$ とおけば，可積分部分束による分解 $E = K \oplus L$ を得る．

定理 2.2 次の自然な全単射が存在する：

$$\{(2,3,5)\text{-分布}\}/\cong \quad \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} G_2\text{-型擬直積構造} \quad (Z,E): \\ (2,3,4,5,6)\text{-分布 } E \text{ の分解} \\ E = K \oplus L,\ \mathrm{rank}(K) = \mathrm{rank}(L) = 1, \\ [\mathcal{K},\mathcal{L}] = \partial\mathcal{E}\ (:= [\mathcal{E},\mathcal{E}] = \mathcal{E} + [\mathcal{E},\mathcal{E}]), \\ [\,\mathcal{K},\partial\mathcal{E}\,] = \partial^{(2)}\mathcal{E},\ [\,\mathcal{L},\partial\mathcal{E}\,] = \partial\mathcal{E}, \\ [\,\mathcal{K},\partial^{(2)}\mathcal{E}\,] = \partial^{(3)}\mathcal{E},\ [\,\mathcal{L},\partial^{(2)}\mathcal{E}\,] = \partial^{(2)}\mathcal{E}, \\ [\,\mathcal{K},\partial^{(3)}\mathcal{E}\,] = \partial^{(3)}\mathcal{E},\ [\,\mathcal{L},\partial^{(3)}\mathcal{E}\,] = \partial^{(4)}\mathcal{E}. \end{array} \right\}/\cong$$

このとき，系列

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathcal{E} & \subset & \partial\mathcal{E} & \subset & \partial^{(2)}\mathcal{E} & \subset & \partial^{(3)}\mathcal{E} & \subset & \partial^{(4)}\mathcal{E} \\ 2 & & 3 & & 4 & & 5 & & 6 \end{array}$$

の階数は下の数字で表されることに注意する．

上の対応で，元々の $(2,3,5)$-分布 S は，K から誘導される錐場 (cone filed, “蝶ネクタイ”) の線形包として得られる：

$$S_y = \left(\bigcup_{z \in \pi_Y^{-1}(y)} \pi_{Y*}(K_z) \subset T_yY \right) \text{の線形包.}$$

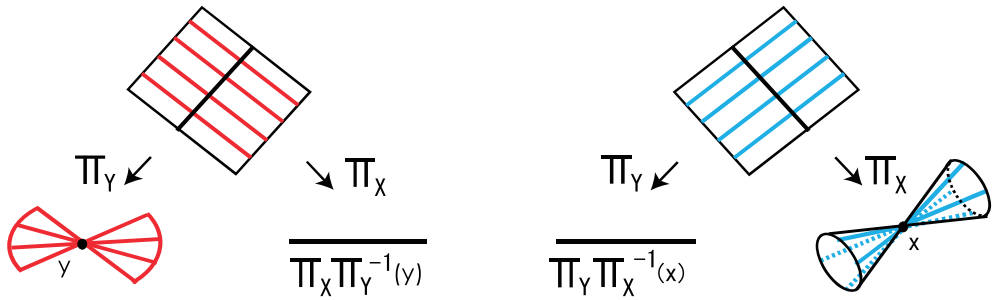
また，$(2,3,5)$-distribution S は，導来分布 ∂E のコーシー特性系 $L = \mathrm{Ker}(\pi_{Y*})$ による簡約として得られる．

さらに，X 上の錐場 $C \subset TX$ は，各 $x \in X$ に対し，

$$C_x := \bigcup_{z \in \pi_X^{-1}(x)} \pi_{X*}(L_z) \subset T_xX$$

とおくことで得られる．

このとき，束場 C の線形包は $\partial^{(3)}E$ から π_X により誘導される X 上の接触構造と一致する．こうして，“ラグランジュ錐構造”(X,C) を得る．



Y, Z, X のそれぞれの上に次の小増大度をもつ錐構造を得る：

$$(\underline{2}, 2, 3, \underline{5}, 5) \text{ on Y} \longleftarrow (2, 3, 4, 5, 6) \text{ on Z} \longrightarrow (\underline{2}, \underline{3}, \underline{4}, 4, 5) \text{ on X}.$$

ここまで，2 重ファイブレーション $Y \xleftarrow{\pi_Y} Z \xrightarrow{\pi_X} X$ から分布 S, E, L, K と錐場 C を得た:

$$\begin{array}{ccccc}
TY & \xleftarrow{\pi_{Y*}} & TZ & \xrightarrow{\pi_{X*}} & TX \\
\cup & & \cup & & \cup \\
S & \xleftarrow{\pi_{Y*}|_E} & E = K \oplus L & \xrightarrow{\pi_{X*}|_E} & C \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
Y & \xleftarrow{\pi_Y} & Z & \xrightarrow{\pi_X} & X
\end{array}$$

さて，錐場 C を X 上の制御系 $\mathbb{C} : L \xrightarrow{\pi_{X*}|_L} TX \to X$ と捉える．このとき次の結果を得る．

定理 2.3 (双対性．[6])． 制御系 $\mathbb{C} : L \xrightarrow{\pi_{X*}|_L} TX \to X$ の特異パスは，$(2, 3, 5)$-分布 (Y, S) から π_Y-ファイバーの π_X-像として与えられる．したがって，任意の $x \in X$ と任意方向 $\ell \subset C_x$ に対して，x を通り，x で方向 ℓ をもつ $\mathbb{C}$-特異パスが一意的に存在する．元々の空間 Y は (X, C) の特異パスの空間と同一視され，空間 X は (Y, S) の特異パスの空間と同一視される．

3 一般の $(3, 5)$-分布の場合．

さて，$(2, 3, 5)$-分布から来るとは限らない一般の $(3, 5)$-分布を考えよう．$(3, 5)$-分布とラグランジュ錐構造の間に何か対応がつくだろうか？

(3, 5)-分布とラグランジュ錐構造の対応

$$\{(3,5)\text{-分布 } (Y,D)\}/\cong \quad \longleftrightarrow \quad ???$$

次が成り立つ．

定理 3.1 (モンゴメリー [9]§6.8, [4]) D を 5-次元多様体 Y 上の $(3,5)$-分布とする．このとき，
(1) 一意的に階数 2 の部分束 $S \subset D$ があって，$\partial\mathcal{S}(:=[\mathcal{S},\mathcal{S}]) \subseteq \mathcal{D}$ が成り立つ．
(2) 任意の D-特異曲線は S-積分曲線である．
(3) 任意 $y \in Y$ と任意 $[u] \in P(S_y)$ に対して，パラメータ付けを除いて一意的に D-特異パス $\gamma : (\mathbb{R}, 0) \to Y$ があって，$\gamma(0) = y$ と $[\gamma'(0)] = [u]$ が存在する．

例 3.2 ($Y = PT(\mathbb{P}^3)$ の場合). 例 1.2 のように，$Y = PT(\mathbb{P}^3), \pi : PT(\mathbb{P}^3) \to \mathbb{P}^3$, $D_{(p,\ell)} := (\pi_*)^{-1}(\ell)$ と置く．このとき，$S = \mathrm{Ker}(\pi_*)$ であり，したがって，S は可積分であって，$\partial S = S \subsetneq D$ となる．D-特異パスは，π-ファイバー $P(T_p\mathbb{P}^3) \cong \mathbb{P}^2$ の射影直線により与えられる．

D を 5-次元多様体 Y 上の $(3,5)$-分布とする．$(2,3,5)$-分布の場合と同様に，

$$Z := P(S) = \{(y,\ell) \mid y \in Y, \ell \in P(S_y)\}$$

として，階数 2 の接分布 $E \subset TZ$ を，各 $(y,\ell) \in Z$ について，

$$E_{(y,\ell)} := \pi_*^{-1}(\ell) = \{v \in Z_{(y,\ell)} \mid \pi_*(v) \in \ell\}$$

と定める．ここで，$\pi : Z \to Y$, $\pi(y,\ell) = y$ は標準的な射影である．すると，$\partial(E)$ は階数 3 となるが，$\partial^{(2)}(E) = \partial(E)$ となる．つまり，E は小増大度 $(2,3,3,\ldots)$ を持つ．元々の分布 $D \subset TY$ に関する情報を加えるために，

$$\widetilde{D} := \pi_*^{-1}(D) \subset TZ$$

と置く．$\widetilde{D}$ は階数 4 の分布となる．そして，駅伝で例えると，$\partial(E)$ から $\partial^{(2)}(E)$ ではなく，代わりの “走者”$\widetilde{D}$ に襷を渡すことにするのである．こうして次のような $(3,5)$-分布から付加的な情報込みの擬直積構造ができて双対性が得られる．

定理 3.3 自然な全単射が存在する：

$$\{(3,5)\text{-分布 }\}/\cong \quad \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{6-次元多様体 } Z \text{ 上の-分布の組 } E \subset \widetilde{D} \subset TZ \\ \text{ただし } E \text{ は } (2,3,3,\ldots)\text{-分布で} \\ \text{分解 } E = K \oplus L,\ \mathrm{rank}(K) = \mathrm{rank}(L) = 1 \text{ を持ち，} \\ \widetilde{D}\text{は階数 4 の接分布で，次の条件を満たす：} \\ [\mathcal{K},\mathcal{L}] = \partial\mathcal{E};\ [\,\mathcal{K},\partial\mathcal{E}\,] \subseteq \widetilde{\mathcal{D}},\ [\,\mathcal{L},\partial\mathcal{E}\,] = \partial\mathcal{E}; \\ [\,\mathcal{K},\widetilde{\mathcal{D}}\,] = [\,\mathcal{E},\widetilde{\mathcal{D}}\,] : \mathrm{rank}\ 5,\ [\,\mathcal{L},\widetilde{\mathcal{D}}\,] = \widetilde{\mathcal{D}}, \\ [\,\mathcal{K},[\,\mathcal{K},\widetilde{\mathcal{D}}\,]\,] = [\,\mathcal{K},\widetilde{\mathcal{D}}\,],\ [\,\mathcal{L},[\,\mathcal{K},\widetilde{\mathcal{D}}\,]\,] = TZ\text{: rank 6.} \end{array} \right\}/\cong$$

上の定理において，系列

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathcal{E} & \subset & \partial\mathcal{E} & \subset & \widetilde{\mathcal{D}} & \subset & [\,\mathcal{K},\widetilde{\mathcal{D}}\,] & \subset & [\,\mathcal{L},[\,\mathcal{K},\widetilde{\mathcal{D}}\,]\,] \\ 2 & & 3 & & 4 & & 5 & & 6 \end{array}$$

がある．

さて，Z 上で，$\mathcal{K}$ の葉空間を考えて，局所的に $X := Z/\mathcal{K}$ と置く．$\pi_X : Z \to X$ を自然な射影とする．$(2,3,5)$-分布のときと同様に，X 上の錐構造 $C \subset TX$ を各 $x \in X$ に対し，

$$C_x := \bigcup_{z \in \pi_X^{-1}(x)} \pi_{X*}(L_z) \subset T_xX$$

により定める．ただし，一般の $(3,5)$-分布に対しては，C の凸包が X 上の接触構造になるとは限らないことに注意する．

錐構造 C を X 上の制御系

$$\mathbb{C} : L \xrightarrow{\pi_{X*}|_L} TX \to X.$$

と見なす．定理 3.3 により，各 $z_0 \in Z$ について，$(z_0, 0)$ での L の近傍において $\pi_{X*} : L \setminus$ 零切断 $\to TX$ は局所的に単射となる．そこで，任意の $z = (x,\ell) \in Z$ に対し, $\Delta_{(x,\ell)} := \pi_{X*}(\widetilde{D}_z)$ と置く．そして，$\Delta_{(x,\ell)}^{\perp} = \{\alpha \in T_x^*X \mid \langle \alpha, \Delta_{(x,\ell)} \rangle = 0\}$ と定める．

このとき，$(3,5)$-分布と 5-次元接触多様体上のあるデータを持つラグランジュ錐構造の間の双対性を示すことができる：

定理 3.4 任意の $(3,5)$-分布 $D \subset TY$ について，D-特異パス全体から成る 5-次元多様体 X 上に自然に接触構造 $H \subset TX$，ラグランジュ錐構造 $C \subset H$，および 3-次元ベクトル空間の滑らかな族 $\mathscr{D} := \{\Delta_{x,\ell} \subset H_x \mid x \in X, \ell \in P(C_x)\}$ で $T_\ell C_x \subset \Delta_{x,\ell}$ を満たすものが自然に存在して，元の空間 Y は $\mathscr{D}^{\perp}$ に随伴曲線を持つ C-特異パスの空間として再現され，元の分布 D も $\mathscr{D}$ から復元される．

特に次を得る：

定理 3.5 $(3,5)$-分布 (Y,D) から得られる制御系

$$\mathbb{C} : L \xrightarrow{\pi_{X*}|_L} TX \to X$$

の特異パスはπ_Y-ファイバーの π_X-像として得られる．したがって，任意の $x \in X$ と任意方向 $\ell \subset C_x$ に対して，$\mathscr{D}^{\perp}$ に随伴曲線を持ち，x を通り x での方向が ℓ となる $\mathbb{C}$-特異パスが一意的に存在する．

4　旗多様体の間の射影双対性.

上に述べた $(3,5)$-分布と 5-次元接触構造上のラグランジュ錐構造の間の双対性は，旗多様体の間の古典的な射影双対性を与える．

まず $Y := P(T\mathbb{P}^3)$ 上に擬直積構造を定めよう．

$\mathbb{R}^3$ の座標系 x_0, x_1, x_2 に対して，$Y = P(T\mathbb{P}^3)$ の局所座標系 x_0, x_1, x_2, p_1, p_2 を考える．ただし，p_1, p_2 は，自然な射影 $Y \to \mathbb{R}^3$ のファイバーのアフィン座標系である．この場合，

$$D = \langle \frac{\partial}{\partial x_0} + p_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + p_2 \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial p_1}, \frac{\partial}{\partial p_2} \rangle, \quad S = \langle \frac{\partial}{\partial p_1}, \frac{\partial}{\partial p_2} \rangle$$

である．$Z := P(S)$ とおき，Z の局所座標系 $x_0, x_1, x_2, p_1, p_2, s$ をとる．このとき，

$$E = \langle \frac{\partial}{\partial p_1} + s \frac{\partial}{\partial p_2}, \frac{\partial}{\partial s} \rangle, \quad K = \langle \frac{\partial}{\partial p_1} + s \frac{\partial}{\partial p_2} \rangle, \quad L = \langle \frac{\partial}{\partial s} \rangle,$$

であり，

$$\widetilde{D} = \langle \frac{\partial}{\partial x_0} + p_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + p_2 \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial p_1}, \frac{\partial}{\partial p_2}, \frac{\partial}{\partial s} \rangle$$

である．すると，$[K, L] = \langle \frac{\partial}{\partial p_1}, \frac{\partial}{\partial p_2}, \frac{\partial}{\partial s} \rangle = \partial E$ which is of rank 3. Moreover $[K, \partial E] = \partial E \subsetneq \widetilde{D}$, $[L, \partial E] = \partial E$, $L = \mathrm{Cauchy}(\partial E)$ である．さらに，

$$[K, \widetilde{D}] = \langle \frac{\partial}{\partial x_0} + p_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + p_2 \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial p_1}, \frac{\partial}{\partial p_2}, \frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial x_1} + s \frac{\partial}{\partial x_2} \rangle$$

となり，これは階数 5 である．その上，$[K, [K, \widetilde{D}]] = [K, \widetilde{D}]$, $K = \mathrm{Cauchy}([K, \widetilde{D}])$ であり，

$$[L, [K, \widetilde{D}]] = \langle \frac{\partial}{\partial x_0}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial p_1}, \frac{\partial}{\partial p_2}, \frac{\partial}{\partial s} \rangle = TZ$$

とあり，これは階数 6 である．

このとき，$Y = P(T\mathbb{P}^3)$ と $X = P(T^*\mathbb{P}^3)$ の間の双対性は次で与えられる．

$$Y = P(T\mathbb{P}^3) \cong \mathcal{F}_{1,2}(\mathbb{R}^4) := \{V_1 \subset V_2 \subset \mathbb{R}^4\}, \quad S \subset D \subset TY.$$

$$X = P(T^*\mathbb{P}^3) \cong \mathcal{F}_{1,3}(\mathbb{R}^4) := \{V_1 \subset V_3 \subset \mathbb{R}^4\}, \quad C \subset H \subset TX,\ \mathscr{D},$$

（3-次元空間のペンシル．）さらに，

$$Z \cong P(S) \cong P(C) \cong \mathcal{F}_{1,2,3;4} = \{V_1 \subset V_2 \subset V_3 \subset \mathbb{R}^4\}$$

を得る．そして，任意の点 $V_1 \in \mathbb{P}^3$ に対して，次の対応を得る：

(V_1 上の D-特異パス) $\longleftrightarrow$ (ペンシル $V_1 \subset V_{2t} \subset \mathbb{R}^4$) $\longleftrightarrow$ (ペンシル $V_{2t}/V_1 \subset \mathbb{R}^4/V_1$)
$\longleftrightarrow$ ($P(\mathbb{R}^4/V_1)$ の直線) $\longleftrightarrow$ (旗 $V_1 \subset V_3 \subset \mathbb{R}^4$) $\longleftrightarrow$ ($V_1 \in \mathbb{P}^3$ 上の X の点).

一方,

(V_1 上の $\mathscr{D}^\perp$ に随伴曲線を持つ C-特異パス) $\longleftrightarrow$ (ペンシル $V_1 \subset V_{3t} \subset \mathbb{R}^4$)
$\longleftrightarrow$ (ペンシル $V_{3t}^\perp \subset V_1^\perp \subset \mathbb{R}^{4*}$) $\longleftrightarrow$ ($P(V_1^\perp)$ の射影直線) $\longleftrightarrow$
($V_1 \subset V_2 \subset \mathbb{R}^4$ を満たす平面 V_2) $\longleftrightarrow$ ($V_1 \in \mathbb{P}^3$ の Y の点).

5 未解決問題.

問題 1. 一般の $(3,5)$-分布に丁度対応する定理 3.4 の系 $(X, H, C, \mathscr{D})$ のクラスを特徴付けることは可能か？

問題 2. ジェネリック $(3,5)$-分布に現れる特異性は何か？

問題 3. $(3,5)$-分布の対称性を研究することは可能か？

References

[1] A. Agrachev, Y. Sachkov, *Control Theory from the Geometric Viewpoint*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, **87**, Springer Berlin Heidelberg, (2010).

[2] R. L. Bryant, *Élie Cartan and geometric duality,* A lecture given at the Institut d'Élie Cartan on 19 June 1998.

[3] E. Cartan, *Les systèmes de Pfaff à cinq variables et les équations aux dérivées partielles du second ordre,* Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (3), **27** (1910), 109–192.

[4] G. Ishikawa, *Singular curves of* $(3,5)$*-distributions,* in preparation.

[5] G. Ishikawa, Y. Machida, M. Takahashi, *Singularities of tangent surfaces in Cartan's split* G_2*-geometry,* Hokkaido Univ. Preprint Series in Math. #1020 (2012), Asian J. of Math., **20–2**, (2016), 353–382.

[6] G. Ishikawa, Y. Kitagawa, W. Yukuno, *Duality of singular paths for* $(2,3,5)$*-distributions,* arXiv:1308.2501 [math.DG] (2013), J. of Dynamical and Control Systems, **21** (2015), 155–171.

[7] G. Ishikawa, Y. Kitagawa, A. Tsuchida, W. Yukuno, *Duality of* $(2,3,5)$-*distributions and Lagrangian cone structures,* arXiv:1808.00149 [math.DG] (2018), Nagoya Math. J., **243** (2021), 303–315.

[8] W. Liu, H. Sussman, *Shortest paths for sub-Riemannian metrics on rank-two distributions,* Memoirs of the American Mathematical Society Vol. 118, Number 564, American Mathematical Society (1995).

[9] R. Montgomery, *A Tour of Subriemannian Geometries, Their Geodesics and Applications,* Mathematical Surveys and Monographs, **91**, Amer. Math. Soc. (2002).

[10] N. Tanaka, *On the equivalence problems associated with simple graded Lie algebras,* Hokkaido Mathematical Journal, **8** (1979), 23–84.

[11] K. Yamaguchi, *Differential systems associated with simple graded Lie algebras,* Advanced Studies in Pure Mathematics, **22** (1993), 413–494.

This work was supported by Kakenhi 19K0345809.

This work was supported by the Research Institute for Mathematical Sciences, an International Joint Usage/Research Center located in Kyoto University.