特異点を持つ螺旋曲面に対する Bour の定理

横浜国立大学・大学院理工学府　服部　祐樹

Yuki Hattori
Graduate School of Engineering Science,
Yokohama National University

概要

本稿の内容は，本田淳史氏 (横浜国立大学) と森本達也氏 (株式会社フレーベル館) との共同研究 [8] に基づく。 等長変換群の 1-パラメータ部分群の作用で不変な曲面を螺旋曲面という。Bour の定理は，与えられた螺旋曲面 S に対し，S と等長的な螺旋曲面の 2-パラメータ族が存在することを主張する。これまで Bour の定理は，外の空間が様々な 3 次元リーマン多様体の場合に拡張されてきた。本稿では，Bour の定理の内在的な一般化として，特異点をもつ螺旋曲面に対する Bour 型定理の紹介を行う。またその応用として得られる特異点における幾何学的不変量の外在性の証明の概説を行う。

1　イントロダクション

3 次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^3$ の螺旋運動で不変な曲面を螺旋曲面という。ここで，螺旋運動とは $\boldsymbol{R}^3$ の等長変換群の非自明な 1-パラメータ部分群の作用とする。螺旋曲面は回転と平行移動により

$$f(u,v) = (x(u)\cos v, x(u)\sin v, z(u) + hv)$$

と表される。ここで，$(x(u), z(u))$ は $\boldsymbol{R}^2$ の平面曲線であり，h はピッチと呼ばれる定数である。 1862 年に E. Bour は螺旋曲面に対する以下の定理を証明した。

事実 1.1 (Bour の定理 [1])**.** $\boldsymbol{R}^3$ の与えられた正則な螺旋曲面に対して，その螺旋曲面に等長的な螺旋曲面の 2-パラメータ族が存在する。

Bour の定理の概略を紹介する。$f : \Sigma \to \boldsymbol{R}^3$ を螺旋曲面とすると，s 座標曲線の族が測地的であり t 座標曲線の像の族が螺旋運動の軌跡となるような直交座標系 (s,t) が存在す

る。この (s,t) を自然なパラメータと呼ぶ。この自然なパラメータ (s,t) に対して第一基本形式 g は C^∞ 級正値関数 $U(s)$ を用いて

$$g = ds^2 + U(s)^2 dt^2 \tag{B$_0$}$$

と表すことができる。逆に与えられた Σ 上の自然なパラメータ (s,t) と C^∞ 級正値関数 $U(s)$ に対して，第一基本形式が (B$_0$) と一致するような螺旋曲面を明示的に記述できる。その螺旋曲面は 2-パラメータ族で与えられる。

do Carmo-Dajczer [4] は，Bour の定理の応用として平均曲率一定な螺旋曲面の積分表現を得た。

Bour の定理は外の空間の一般化がされてきた。具体的には，

- 3 次元ローレンツミンコフスキー空間 $\boldsymbol{R}^3_1$ (Sasahara [26], Ji-Kim [14], Honda [9])
- $\boldsymbol{S}^2 \times \boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{H}^2 \times \boldsymbol{R}$, ハイゼンベルグ群 Nil_3 (Sa Earp-Toubiana [23], Sa Earp [22])
- Bianchi-Cartan-Vranceanu (BCV) space (Caddeo-Onnis-Piu [3])
- キリングベクトル場を持つ 3 次元リーマン多様体 (Domingos-Onnis-Piu [5])

の螺旋曲面に対して，Bour の定理が証明されている。本研究では Bour の定理の内在的な一般化，具体的には特異点を持つ螺旋曲面に対する Bour の定理の一般化を行った。

2 定義

ここでは主定理を述べるために必要な定義を行っていく。まず初めに特異点を持つ曲面であるフロンタルと波面の定義を行う。以下，$\boldsymbol{S}^2$ を $\boldsymbol{R}^3$ の単位球面，つまり $\boldsymbol{S}^2 := \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^3; ||\boldsymbol{x}|| = 1\}$ とし，Σ を向きづけられた 2 次元 C^∞ 級多様体とする。

定義 2.1 (フロンタル，波面)**.** C^∞ 級写像 $f : \Sigma \to \boldsymbol{R}^3$ が**フロンタル**であるとは，任意の $p \in \Sigma$ に対して，p の開近傍 D，C^∞ 級写像 $\nu : D \to \boldsymbol{S}^2$ で，$\boldsymbol{v} \in T_q\Sigma$ と $q \in D$ に対して $df_q(\boldsymbol{v}) \cdot \nu(q) = 0$ を満たすものが存在するときをいう。さらに，$L := (f, \nu) : D \to \boldsymbol{R}^3 \times \boldsymbol{S}^2$ がはめ込みになるとき，フロンタル $f : \Sigma \to \boldsymbol{R}^3$ を**波面**という。

次に今回の定理で重要になる第一基本形式と等長的の定義を行う。

定義 2.2 (第一基本形式, 等長的)**.** フロンタル $f : \Sigma \to \boldsymbol{R}^3$ に対して，誘導計量 $g = df \cdot df$ を**第一基本形式**という。$\bar{\Sigma}$ を向きづけられた 2 次元 C^∞ 級多様体とし，$f : \Sigma \to \boldsymbol{R}^3$, $\bar{f} : \bar{\Sigma} \to \boldsymbol{R}^3$ をフロンタル，g を f の第一基本形式，$\bar{g}$ を $\bar{f}$ の第一基本形式とする。このとき，f と $\bar{f}$ が**等長的**であるとは，$g = \phi^* \bar{g}$ を満たす微分同相写像 $\phi : \Sigma \to \bar{\Sigma}$ が存在す

るときをいう。

n を正の整数とする。カスプ辺の一般化である n 型辺を定義する。

定義 2.3 (n 型辺 [19])**.** C^∞ 級写像 $f : \Sigma \to \boldsymbol{R}^3$ が $p \in \Sigma$ で n **型辺** (n-type edge) であるとは，写像芽 $f : (\Sigma, p) \to (\boldsymbol{R}^3, f(p))$ が原点での写像芽

$$\boldsymbol{R}^2 \ni (u, v) \longmapsto (u^n, u^{n+1}a(u, v), v) \in \boldsymbol{R}^3$$

と $\mathcal{A}$-同値となるような C^∞ 級関数 $a(u, v)$ が存在するときをいう。

ここで，$\mathcal{A}$-同値とは以下のように定義される写像芽における同値関係である。N を正の整数とし，Σ_1, Σ_2 を C^∞ 級多様体，$i = 1, 2$ に対し $f_i : \Sigma_i \to \boldsymbol{R}^N$ を C^∞ 級写像とする。$p_i \in \Sigma_i$ $(i = 1, 2)$ に対して，$q_i = f_i(p_i)$ とするとき，写像芽 $f_i : (\Sigma_i, p_i) \to (\boldsymbol{R}^N, q_i)$ $(i = 1, 2)$ が **$\mathcal{A}$-同値**であるとは，微分同相写像芽 $\varphi : (\Sigma_1, p_1) \to (\Sigma_2, p_2)$, $\Phi : (\boldsymbol{R}^N, q_1) \to (\boldsymbol{R}^N, q_2)$ が存在して $f_2 = \Phi \circ f_1 \circ \varphi^{-1}$ となるときをいう。

n 型辺の定義において，$n = 2$ の場合は**一般化されたカスプ辺**と呼ばれる [10]。次に，極限法曲率の定義を行う。

定義 2.4 ([25, 18])**.** $f : \Sigma \to \boldsymbol{R}^3$ をフロンタルとし，$p \in \Sigma$ を階数 1 の特異点，つまり $\operatorname{rank}(df)_p = 1$ とする。このとき，

$$\kappa_\nu(p) := \frac{f_{vv}(p) \cdot \nu(p)}{\|f_v(p)\|^2}.$$

は $f_u(p) = \boldsymbol{0}$ を満たす局所座標系 (u, v) の取り方によらない。$\kappa_\nu(p)$ を f の p における**極限法曲率**という。さらに，階数 1 の特異点 p が**ジェネリック**であるとは，$\kappa_\nu(p) \neq 0$ であるときをいう。

定義 2.5. ([8]) $\boldsymbol{R}^3$ のフロンタルが **ジェネリック螺旋 n 型辺** であるとは，螺旋運動で不変であり，フロンタルの特異点集合が空でなく，任意の特異点がジェネリック n 型辺であるときをいう。

3 主定理

ここで主定理を紹介していく。まず初めに Bour 型等長変形定理を紹介する。

定理 3.1 (ジェネリック螺旋 n 型辺に対する Bour 型等長変形定理 [8])**.** $\boldsymbol{R}^3$ の与えられたジェネリック螺旋 n 型辺 $\Psi : \Sigma \to \boldsymbol{R}^3$ に対して，Ψ に等長的なジェネリック螺旋 n 型

辺の 2 パラメータ族 $\{\Psi_{h,m}\}_{h,m}$ が存在する。逆に，Ψ に等長的なジェネリック螺旋 n 型辺は $\{\Psi_{h,m}\}_{h,m}$ で与えられる。

上記の等長変形定理は次の表現公式を用いて示される。

定理 3.2 (ジェネリック螺旋 n 型辺に対する Bour 型表現公式 [8])**.** k を正の整数で，$n = k+1$ とする。J を原点を含む開区間，$U(s)$ を J 上の C^∞ 級正値関数で $U^{(i)}(0) = 0$ $(1 \leq i \leq k)$ を満たすものとする。$V(s)$ を J 上の C^∞ 級関数で $U'(s) = s^k V(s)$ を満たすものとする。さらに，m, h を実数 $(m > 0)$ で，

$$\rho_{h,m}(s) := \sqrt{m^2U(s)^2 - h^2 - m^4U(s)^2V(s)^2}$$

で表される $\rho_{h,m}(s)$ が J 上で C^∞ 級関数であり，$\rho_{h,m}(0) \neq 0$ を満たすとする。さらに，$x(s)$，$z(s) : J \to \boldsymbol{R}$，$\theta(s,t) : J \times \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ をそれぞれ $\epsilon_0, \epsilon_1, \epsilon_2 \in \{+1, -1\}$ を用いて

$$\begin{aligned} x(s) &= \epsilon_0 \sqrt{m^2U(s)^2 - h^2}, \\ z(s) &= \epsilon_2 m \int_0^s \frac{\zeta^k U(\zeta)\rho_{h,m}(\zeta)}{m^2U(\zeta)^2 - h^2} d\zeta, \\ \theta(s,t) &= \frac{1}{m}\left(\epsilon_1 t - \epsilon_2 h \int_0^s \frac{\zeta^k \rho_{h,m}(\zeta)}{U(\zeta)(m^2U(\zeta)^2 - h^2)} d\zeta\right) \end{aligned}$$

とする。このとき，

$$\Psi(s,t) := (x(s)\cos\theta(s,t),\, x(s)\sin\theta(s,t),\, z(s) + h\theta(s,t))$$

で表される $\Psi : J \times \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}^3$ は，第一基本形式が

$$g = s^{2k}ds^2 + U(s)^2dt^2 \tag{B_k}$$

であるようなジェネリック螺旋 n 型辺である。

逆に，特異点の近傍で，第一基本形式が (B_k) で与えられる任意のジェネリック螺旋 n 型辺は $\boldsymbol{R}^3$ の合同変換を除いて上記の Ψ で与えられる。

ここで主定理の証明の前に証明に必要な標準パラメータを導入するため，重複度の定義と特異点をもつ曲線の標準パラメータを紹介する。

定義 3.3 (重複度)**.** I を開区間, n, N を正の整数，u_0 を開区間 I 上の点とする，このとき，C^∞ 級写像 $\gamma : I \to \boldsymbol{R}^N$ が u_0 で**重複度** n であるとは，

$$\gamma'(u_0) = \cdots = \gamma^{(n-1)}(u_0) = \boldsymbol{0}, \qquad \gamma^{(n)}(u_0) \neq \boldsymbol{0}$$

を満たすときをいう。この u_0 を**重複度** n の特異点と呼ぶ。

事実 3.4 ([27, 6, 17])**.** C^∞ 級写像 $\gamma : I \to \boldsymbol{R}^N$ が u_0 で重複度 n とする。この時,

$$\left\| \frac{d\gamma}{ds} \right\| = |s|^{n-1}$$

を満たす座標変換 $s = s(u)$ が存在する。この s を**標準パラメータ**と呼ぶ。

表現公式 (定理 3.2) の証明の概略を述べる。$f : \Sigma \to \boldsymbol{R}^3$ をジェネリック螺旋 n 型辺，$p \in \Sigma$ を f の特異点とする。このとき，原点を含む区間 J と J 上の C^∞ 級正値関数 $U(s)$，p を中心とする座標近傍 $(D; s, t)$ が存在して，$\varphi : D \to J \times \boldsymbol{R}$ は微分同相写像であり，$U^{(i)}(0) = 0$ $(1 \leq i \leq k)$ かつ

$$g = s^{2k} ds^2 + U(s)^2 dt^2 \tag{B_k}$$

が成り立つ。このような近傍系 $(D; s, t)$ の存在を示すために，特異点を持つ曲線の標準パラメータを用いる。ジェネリック螺旋 n 型辺を

$$f(u, v) = (x(u)\cos v, x(u)\sin v, z(u) + h\, v)$$

と表すとき，特異点は $p = (u_0, v_0)$ と表される。このとき，(u, t) が直交座標となるような座標変換 $(u, v) \mapsto (u, t(u, v))$ が存在する。各 t に対し，$\alpha_t(u) := f(u, t)$ と定める。このとき，$\alpha_t(u)$ は u_0 で重複度 n となるので，標準パラメータへの座標変換 $s = s(u)$ が存在する。このとき，$f = f(s, t)$ は

$$E = f_s \cdot f_s = s^{2k}, \quad F = f_s \cdot f_t = 0, \quad G = f_t \cdot f_t = U(s)^2$$

をみたす。このことから f の第一基本形式は (B_k) で表されることが示された。逆は Bour の定理の証明 [1] と同様に示される。

4　主定理の応用

ここでは主定理を用いて得られた応用を 2 つ紹介する。

4.1　(n, r)-カスプ辺を持つ螺旋曲面の等長変形

1 つ目は (n, r)-カスプ辺を持つ螺旋曲面についての応用例を紹介する。結果の紹介の前に，結果を述べるために必要な定義や事実，補題を紹介する。以下，$(n, r) = (2, 3), (2, 5), (2, 7), (3, 4), (3, 5)$ とする。

定義 4.1 ((n,r)-カスプ辺)**.** $f:\Sigma\to\boldsymbol{R}^3$ を C^∞ 級写像とする。このとき，特異点 $p\in\Sigma$ が (n,r)**-カスプ辺**であるとは，写像芽 $f:(\Sigma,p)\to(\boldsymbol{R}^3,f(p))$ が写像芽 $F_{n,r}:(\boldsymbol{R}^2,0)\to(\boldsymbol{R}^3,0)$ と $\mathcal{A}$-同値であるときをいう。ここで，$F_{n,r}:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}^3$ は $F_{n,r}(u,v):=(u^n,u^r,v)$ $(u,v\in\boldsymbol{R})$ で定まる C^∞ 級写像とする。$F_{n,r}$ を標準 (n,r)-カスプ辺という。$(2,3)$-カスプ辺のことを単に**カスプ辺**と呼ぶ。

次に (n,r)-カスプの定義を紹介する。

定義 4.2 ((n,r)-カスプ)**.** 開区間 I 上で定義される C^∞ 級写像 $\gamma:I\to\boldsymbol{R}^2$ に対し，特異点 $u_0\in I$ が (n,r)**-カスプ**であるとは，写像芽 $\gamma:(I,u_0)\to(\boldsymbol{R}^2,\gamma(u_0))$ が写像芽 $\Gamma_{n,r}:(\boldsymbol{R},0)\to(\boldsymbol{R}^2,0)$ と $\mathcal{A}$-同値であるときをいう。ここで，$\Gamma_{n,r}:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}^2$ は $\Gamma_{n,r}(u):=(u^n,u^r)$ $(u\in\boldsymbol{R})$ で定まる C^∞ 級写像である。$\Gamma_{n,r}$ を標準 (n,r)-カスプという。$(2,3)$-カスプのことを単に**カスプ**と呼ぶ。

ここで (n,r)-カスプの判定法を紹介する。

事実 4.3 ($(2,3),(2,5),(3,4),(3,5)$-カスプの判定法, cf. [2], [21])**.** I を開区間, $\gamma:I\to\boldsymbol{R}^2$ を C^∞ 級写像，$\gamma'(u_0)=\boldsymbol{0}$ とする。このとき，

(1) γ が u_0 でカスプをもつための必要十分条件は，$\det(\gamma'',\gamma''')(u_0)\neq 0$ で与えられる。
(2) γ が u_0 で $(2,5)$-カスプをもつための必要十分条件は，次式が成り立つような実数 $c_1\in\boldsymbol{R}$ が存在することで与えられる。

$$\gamma'''(u_0)=c_1\,\gamma''(u_0),\quad \det(\gamma'',3\gamma^{(5)}-10c_1\gamma^{(4)})(u_0)\neq 0.$$

(3) γ が u_0 で $(3,4)$-カスプをもつための必要十分条件は，$\gamma''(u_0)=\boldsymbol{0}$ かつ $\det(\gamma''',\gamma^{(4)})(u_0)\neq 0$ で与えられる。
(4) γ が u_0 で $(3,5)$-カスプをもつための必要十分条件は，$\gamma''(u_0)=\boldsymbol{0}$ かつ

$$\det(\gamma''',\gamma^{(4)})(u_0)=0,\quad \det(\gamma''',\gamma^{(5)})(u_0)\neq 0$$

で与えられる。

$(2,7)$-カスプの判定法は以下で与えられる。

定理 4.4 ($(2,7)$-カスプの判定法 [28, 8])**.** I を開区間，$\gamma:I\to\boldsymbol{R}^2$ を C^∞ 級写像，$\gamma'(u_0)=\boldsymbol{0}$ とする。このとき，γ が u_0 で $(2,7)$-カスプをもつための必要十分条件は，u_0

において次式が成り立つような実数 $c_1, c_2 \in \boldsymbol{R}$ が存在することで与えられる。

$$\gamma''' = c_1\gamma'', \quad \gamma^{(5)} - \frac{10}{3}c_1\gamma^{(4)} = c_2\gamma'',$$
$$\det\left(\gamma'', \gamma^{(7)} - 7c_1\gamma^{(6)} - \left(7c_2 - \frac{70}{3}c_1^3\right)\gamma^{(4)}\right) \neq 0.$$

上記の判定法を用いることで以下の命題を得られる。

命題 4.5 ([8])**.** $\Psi : J \times \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}^3$ を定理 3.2 で与えられるジェネリック螺旋 n 型辺とする。このとき，特異点 $p = (0, t) \in J \times \boldsymbol{R}$ が

(1) カスプ辺であるための必要十分条件は，$n = 2$ かつ $U'''(0) \neq 0$ で与えられる。
(2) $(2, 5)$-カスプ辺であるための必要十分条件は，$n = 2$ かつ $U'''(0) = 0$, $U^{(5)}(0) \neq 0$ で与えられる。
(3) $(2, 7)$-カスプ辺であるための必要十分条件は, $n = 2$ かつ $U'''(0) = 0$, $U^{(5)}(0) = 0$, $U^{(7)}(0) \neq 0$ で与えられる。
(4) $(3, 4)$-カスプ辺であるための必要十分条件は，$n = 3$ かつ $U^{(4)}(0) \neq 0$ で与えられる。
(5) $(3, 5)$-カスプ辺であるための必要十分条件は, $n = 3$ かつ $U^{(4)}(0) = 0$, $U^{(5)}(0) \neq 0$ で与えられる。

命題 4.5 より，(n, r)-カスプ辺であるための必要十分条件に h, m が含まれず $U(s)$ のみで表されるため，等長変形で $\mathcal{A}$-同値類が保たれる。このことから，以下の系が得られる。

系 4.6 ([8])**.** $(n, r) = (2, 3), (2, 5), (2, 7), (3, 4), (3, 5)$ とする。$\boldsymbol{R}^3$ の与えられたジェネリック螺旋 (n, r)-カスプ辺は，ジェネリック螺旋 (n, r)-カスプ辺からなる非自明な等長変形をもつ。この等長変形はジェネリック螺旋 (n, r)-カスプ辺 s の 2-パラメータ族で与えられる。

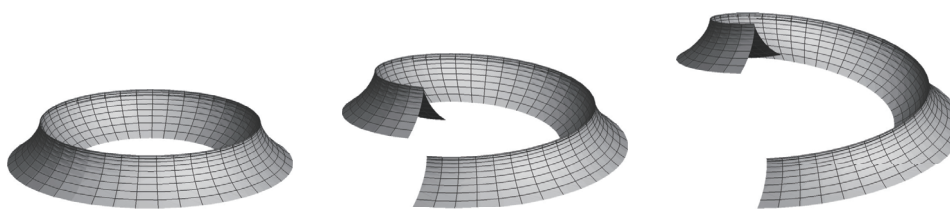

図 1　ジェネリック螺旋カスプ辺の等長変形

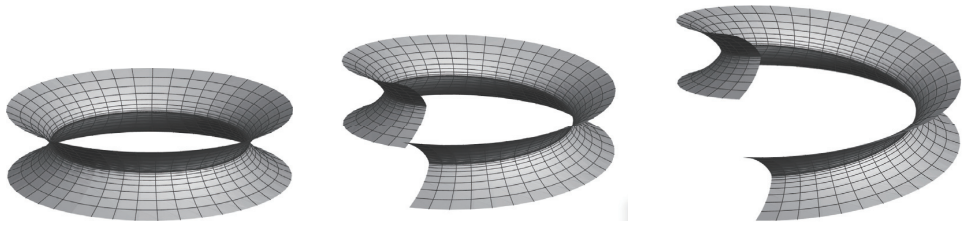

図 2　ジェネリック螺旋 $(3,4)$ カスプ辺の等長変形

4.2　特異点における幾何学的不変量の外在性

主定理の 2 つ目の応用を紹介する。まずはじめに不変量の定義を行う。

定義 4.7 (不変量)**.** $f:\Sigma\to\boldsymbol{R}^3$ をフロンタル，p を Σ 上の点とする。

- f,p から定まる実数 $J(f,p)$ が**不変量**であるとは，$\boldsymbol{R}^3$ の等長変換 T と微分同相写像 $\phi:\Sigma\to\Sigma$ で $\phi(p)=p$ を満たすものに対して，$|J(f,p)|=|J(T\circ f\circ\phi^{-1},p)|$ が成り立つときをいう。
- 不変量 $J(f,p)$ が**内在的**であるとは，任意の f に等長的なフロンタル $\bar{f}:\Sigma\to\boldsymbol{R}^3$ に対して，$|J(f,p)|=|J(\bar{f},p)|$ が成り立つときをいう。
- 不変量 $J(f,p)$ が**外在的**であるとは，$J(f,p)$ が内在的でない，つまり，$|J(f,p)|\neq|J(\bar{f},p)|$ を満たすような f に等長的なフロンタル $\bar{f}:\Sigma\to\boldsymbol{R}^3$ が存在するときをいう。

例 4.8. ガウス曲率 K は第一基本形式のみで表されるため内在的不変量である。一方，平均曲率 H は外在的不変量である。

以下の事実が知られている。

事実 4.9 ([20, 11, 10])**.** 実解析的かつジェネリックな一般化されたカスプ辺に対して，極限法曲率 κ_ν は外在的不変量である。

主定理を用いることで，実解析的かつジェネリックな一般化されたカスプ辺をジェネリック螺旋 n 型辺に変えても同様のことが成り立つことが分かった。

系 4.10 ([8])**.** ジェネリック螺旋 n 型辺に対して，極限法曲率 κ_ν は外在的である。

系 4.10 は，次の命題を用いて示される。

命題 4.11. $\Psi : J \times \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}^3$ を定理 3.2 で与えられるジェネリック螺旋 n 型辺とする。このとき，特異点 $p = (0, t) \in J \times \boldsymbol{R}$ における極限法曲率 κ_ν は次で与えられる。

$$\kappa_\nu(p) = \frac{\rho_{h,m}(0)}{m^2 U(0)^2}.$$

主定理から，$\Psi(s, t)$ の第一基本形式は (B_k) で表される。一方，κ_ν は m, h に依存するため，κ_ν は外在的であることがわかる。

[19] において，κ_ν 以外の n 型辺に対する様々な不変量が導入された。主定理を用いてそれらの不変量の外在性を紹介する。

定義 4.12. $f : \Sigma \to \boldsymbol{R}^3$ をフロンタルとし，f の特異点集合 $S(f)$ が Σ 内の正則曲線とする。また，$p \in S(f)$ を階数 1 の特異点とする。このとき，p の近傍 $\tilde{D}$ で定義されるベクトル場 η で，$\eta \neq \boldsymbol{0}$ かつ任意の $q \in S(f) \cap \tilde{D}$ に対して $df_q(\eta_q) = \boldsymbol{0}$ を満たすものを**退化ベクトル場**という。

[19] で次の n 型辺 の判定法が示された。

事実 4.13 ([19])**.** $f : \Sigma \to \boldsymbol{R}^3$ をフロンタルとし，f の特異点集合 $S(f)$ が Σ 内の正則曲線とする。また，$p \in S(f)$ を階数 1 の特異点とする。ξ を $\xi_p \in T_p S(f)$ で $\xi \notin \ker(df_p)$ を満たすベクトル場とする。このとき，f が p 上で n 型辺をもつことと，

$$\text{各 } i = 2, \ldots, n-1, \text{ 各 } q \in S(f) \text{ に対して } \eta^i f(q) = \boldsymbol{0} \text{ が成り立つ} \tag{4.1}$$

$$\xi f(p) \quad \text{と} \quad \eta^n f(p) \quad \text{が線形独立} \tag{4.2}$$

を満たす退化ベクトル場 η が存在することは同値である。

定義 4.14 ([19])**.** $f : \Sigma \to \boldsymbol{R}^3$ をフロンタル，$p \in \Sigma$ を n 型辺とする。ξ, η を (4.1), (4.2) を満たすベクトル場とする。このとき，

$$\kappa_t(p) := \frac{\det(\xi f, \eta^n f, \xi \eta^n f)}{\|\xi f \times \eta^n f\|^2}(p) - \frac{(\xi f \cdot \eta^n f) \det(\xi f, \eta^n f, \xi^2 f)}{\|\xi f\|^2 \|\xi f \times \eta^n f\|^2}(p)$$

は (4.1), (4.2) を満たすベクトル場 ξ, η の取り方によらない。$\kappa_t(p)$ を **cusp-directional torsion** と呼ぶ。また，$i = 1, \ldots, n$ に対して，$\omega_{n,n+i}$ を

$$\omega_{n,n+i}(p) = \frac{\|\xi f\|^{(n+i)/n} \det(\xi f, \eta^n f, \eta^{n+i} f)}{\|\xi f \times \eta^n f\|^{(2n+i)/n}}(p)$$

で定める。$\omega_{n,n+1}(p)$ は (4.1), (4.2) を満たすベクトル場 ξ, η の取り方によらない。また，$i = 2, \ldots, n-1$ に対し，$\omega_{n,n+1}|_{S(f)} = \cdots = \omega_{n,n+i-1}|_{S(f)} = 0$ のとき，$\omega_{n,n+i}(p)$ は (4.1), (4.2) を満たすベクトル場 ξ, η の取り方によらない。$\omega_{n,n+i}(p)$ を $(n, n+i)$-**cuspidal curvature**，$i = n$ のとき，$\omega_{n,2n}(p)$ を $\beta_{n,2n}(p)$ で表し，$(n, 2n)$-**bias** と呼ぶ。

主結果を用いることで次の命題が得られる。

命題 4.15 ([8])**.** $\Psi : J \times \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}^3$ を定理 3.2 で与えられるジェネリック螺旋 n 型辺とする。このとき，特異点 $p = (0, t) \in J \times \boldsymbol{R}$ における cusp-directional torsion $\kappa_t(p)$, $(n, n+i)$-cuspidal curvature $\omega_{n,n+i}(p)$，$(n, 2n)$-bias $\beta_{n,2n}(p)$ は次で与えられる。

$$\begin{aligned}
\kappa_t(p) &= \frac{h}{m^2 U(0)^2}, \\
\omega_{n,n+i}(p) &= \epsilon_1 \epsilon_2 \frac{m^2 U(0) U^{(n+i)}(0)}{((n-1)!)^{(n+i)/n} \rho_{h,m}(0)}, \\
\beta_{n,2n}(p) &= \frac{\epsilon_1 \epsilon_2}{\rho_{h,m}(0)} \left(\frac{m^2 U(0) U^{(2n)}(0)}{((n-1)!)^2} - \binom{2n-1}{n} \frac{h^2}{m^2 U(0)^2} \right).
\end{aligned}$$

命題 4.15 から，各不変量は m, h に依存しており，第一基本形式が一致しても異なる値をとるため，外在的不変量であることがわかる。したがって，次が成り立つ。

系 4.16 ([8])**.** ジェネリック螺旋 n 型辺に対して，極限法曲率 κ_ν，cusp-directional torsion κ_t，$(n, n+i)$-cuspidal curvature $\omega_{n,n+i}$ $(1 \leq i \leq n-1)$，$(n, 2n)$-bias $\beta_{n,2n}$ は全て外在的不変量である。

参考文献

[1] E. Bour, *Memoire sur le deformation de surfaces*, Journal de l'Ecole Polytechnique, XXXIX Cahier, 1862, 1–148

[2] J.W. Bruce and T.J. Gaffney, *Simple singularities of mappings* $\mathbb{C}, 0 \to \mathbb{C}^2, 0$, J. Lond. Math. Soc., II. Ser. **26** (1982), 465–474.

[3] R. Caddeo, I.I. Onnis and P. Piu, *Bour's theorem and helicoidal surfaces with constant mean curvature in the Bianchi-Cartan-Vranceanu spaces*, Ann. Mat. Pura Appl. **201** (2022), 913–932.

[4] M.P. do Carmo and M. Dajczer, *Helicoidal surfaces with constant mean curvature*, Tohoku Math. J. (2) **34** (1982), 425–435.

[5] I. Domingos, I.I. Onnis and P. Piu, *The Bour's Theorem for invariant surfaces in three-manifolds*, preprint (arXiv:2306.03837).

[6] T. Fukui, *Local differential geometry of singular curves with finite multiplicities*, Saitama Math. J. **31** (2017), 79–88.

[7] M. Hasegawa, A. Honda, K. Naokawa, K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *Intrinsic properties of surfaces with singularities*, Internat. J. Math. **26** (2015), no. 4, 1540008, 34 pp.

[8] Y. Hattori, A. Honda and T. Morimoto, *Bour's theorem for helicoidal surfaces with singularities*, preprint (arXiv : 2310.16418).

[9] A. Honda, *On associate families of spacelike Delaunay surfaces*, Real and complex singularities, 103–120, Contemp. Math., 675, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2016.

[10] A. Honda, K. Naokawa, K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *Duality on generalized cuspidal edges preserving singular set images and first fundamental forms*, J. Singul. **22** (2020), 59–91.

[11] A. Honda, K. Naokawa, M. Umehara and K. Yamada, *Isometric deformations of wave fronts at non-degenerate singular points*, Hiroshima Math. J. **50** (2020), 269–312.

[12] A. Honda and K. Saji, *Geometric invariants of* 5/2*-cuspidal edges*, Kodai Math. J. **42** (2019), 496–525.

[13] T. Ikawa, *Bour's theorem in Minkowski geometry*, Tokyo J. Math. **24** (2001), 377–394.

[14] F. Ji and Y.H. Kim, *Mean curvatures and Gauss maps of a pair of isometric helicoidal and rotation surfaces in Minkowski 3-space*, J. Math. Anal. Appl. **368** (2010), 623–635.

[15] M. Kokubu, W. Rossman, K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *Singularities of flat fronts in hyperbolic* 3*-space*, Pacific J. Math. **221** (2005), 303–351.

[16] L. F. Martins and K. Saji, *Geometric invariants of cuspidal edges*, Canad. J. Math. **68** (2016), no. 2, 445–462.

[17] L. F. Martins and K. Saji, *Geometry of cuspidal edges with boundary*, Topol. Appl. **234** (2018) 209–219.

[18] L. F. Martins, K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *Behavior of Gaussian curvature and mean curvature near non-degenerate singular points on wave fronts*, Geometry and Topology of Manifold, Springer Proc. in Math. & Stat. **154**, 2016, Springer, 247–282.

[19] L.F. Martins, K. Saji, S.P. dos Santos and K. Teramoto, *Boundedness of geometric invariants near a singularity which is a suspension of a singular curve*, preprint (arXiv:2206.11487).

[20] K. Naokawa, M. Umehara and K. Yamada, *Isometric deformations of cuspidal edges*, Tohoku Math. J. (2) **68** (2016), 73–90.

[21] I.R. Porteous, *Geometric differentiation for the intelligence of curves and surfaces*, Second edition, Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

[22] R. Sa Earp, *Parabolic and hyperbolic screw motion surfaces in* $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, J. Aust. Math. Soc. **85** (2008), 113–143.

[23] R. Sa Earp and E. Toubiana, *Screw motion surfaces in* $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ *and* $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$, Ill. J. Math. **49** (2005), 1323–1362.

[24] K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *Behavior of corank one singular points on wave fronts*, Kyushu J. Math. **62** (2008), 259–280.

[25] K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *The geometry of fronts*, Ann. of Math. (2) **169** (2009), 491–529.

[26] N. Sasahara, *Spacelike helicoidal surfaces with constant mean curvature in Minkowski 3-space*, Tokyo J. Math. **23** (2000), 477–502.

[27] *S. Shiba and M. Umehara*, The behavior of curvature functions at cusps and inflection points, Differential Geom. Appl. **30** (2012), 285–299.

[28] N. Takagi, *Criterion for 7/2-cusp singularity* (in Japanese), Bachelor thesis, Yokohama National University, 2021.

[29] M. Takahashi and K. Teramoto, *Surfaces of revolution of frontals in the Euclidean space*, Bull Braz Math Soc, New Series **51** (2020), 887–914.

[30] M. Umehara, K. Saji and K. Yamada, Differential geometry of curves and surfaces with singularities. Translated from the Japanese by Wayne Rossman. Series in Algebraic and Differential Geometry 1. Singapore: World Scientific. xvi, 370 p. (2022).