

Cluster mutation and 3D integrability

By

井上 玲*
Rei INOUE

Abstract

三次元格子模型の可積分性を記述する四面体方程式の解を、量子クラスター代数と量子 dilogarithm 関数を用いて構成する方法を [IKT23a] に従って紹介する。四面体方程式に対して [SY22] で導入された方法を発展させ、量子 y 変数の成す非可換代数を q ワイル代数へ埋め込むことによって Yang-Baxter 変換を随伴作用として表すことに成功した。これより四面体方程式の解が得られる。

We introduce a method to construct the solutions of tetrahedron equation based on [IKT23a], by developing the strategy proposed in [SY22] using quantum cluster algebras and quantum dilogarithm functions. We embed the noncommuting algebra generated by quantum y -variables into the q -Weyl algebra, and construct an adjoint operator which realizes the Yang-Baxter map. This gives the solutions of tetrahedron equation.

§ 1. 四面体方程式と三次元反射方程式

2次元格子模型の可積分性を表す Yang-Baxter 方程式と反射方程式は、それぞれ Figure 1 の配線図（黒色部分）で表される。1 本の実線は 1 つの粒子の状態を表し、左から右方向へ時間発展する。2 本の線の交点上にある作用素 R_{ij} は 2 つの粒子 i と j を散乱させ、反射壁（青点線）にある作用素 K_i は粒子 i を反射する、というような物理的解釈をする。これらの自然な 3 次元への拡張は何か、という問いに応えたのが Zamolodchikov による四面体方程式と、Isaev-Kulish による 3 次元反射方程式である。そのアイデアは、配線図の交点と反射点に粒子を配置し、紙面に垂直方向に時間発展させて「配線図を変換する」作用 R_{123} と K_{1234} を考えることである（赤色部分）。これらはそれぞれ A_2 型、 C_2 型のワイル群における最長元の最短表示の変換と見なすことができ（本稿 §3 を参照）、この

Received January 25, 2024. Revised April 12, 2024.

2020 Mathematics Subject Classification(s): 82B23, 81R12, 13F60

Key Words: quantum cluster algebras, tetrahedron equation, quantum dilogarithm function.

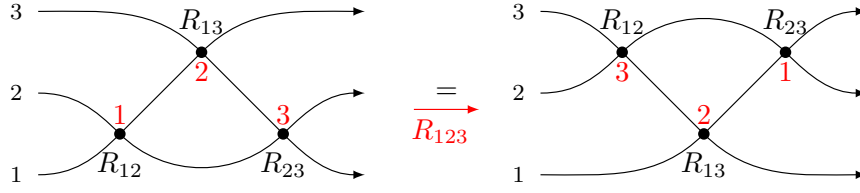
Supported by JSPS KAKENHI Grant Number 19K03440 and 23K03048.

*千葉大学大学院 理学研究院, 〒263-8522 千葉市稲毛区弥生町 1-33

Faculty of Science, Chiba University, 263-8522, Japan.

e-mail: reiiy@math.s.chiba-u.ac.jp

(a) Yang-Baxter 方程式: $R_{23}R_{13}R_{12} = R_{12}R_{13}R_{23}$



(b) 反射方程式: $K_2R_{21}K_1R_{12} = R_{21}K_1R_{12}K_2$

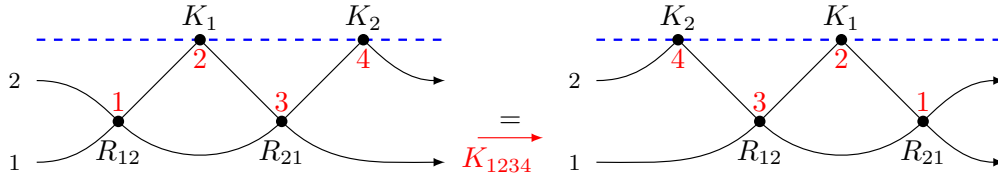


Figure 1. Yang-Baxter 方程式/変換と反射方程式/変換

ような変換を A_3 型および C_3 型のワイル群に拡張して考えると以下の四面体方程式 (1.1) および 3 次元反射方程式 (1.2) が得られる.

$$(1.1) \quad R_{456}R_{236}R_{135}R_{124} = R_{124}R_{135}R_{236}R_{456},$$

$$(1.2) \quad R_{457}K_{4689}K_{2379}R_{258}R_{178}K_{1356}R_{124} = R_{124}K_{1356}R_{178}R_{258}K_{2379}K_{4689}R_{457}.$$

四面体方程式については様々な解が知られている一方 3 次元反射方程式の解は未だ限定的であるが, どちらもその多くは量子群の表現論に基づいて構成されている ([K22] を参照). Sun-Yagi は, 2022 年に量子クラスター代数を用いて四面体方程式の解を構成する新しい方法を提唱した [SY22]. A_2 型や A_3 型の配線図に 3 種類の籐 (三角, 四角, 蝶) を配置し, 変換 R_{ijk} と整合的な mutation 列を用いて, 量子 dilogarithm 関数で書かれる 3 種類の四面体方程式の解を構成したのである. 本稿では, Sun-Yagi の方法を発展させ, 三角籐の代わりに Fock-Goncharov 籐を考えて量子 y 変数の成す代数を q ワイル代数へ埋め込むことによって R_{ijk} を随伴作用素として実現する方法を [IKT23a] に基づいて解説する.

§ 2. 量子クラスター変異と量子 dilogarithm 関数

Fock と Goncharov によるクラスター y 変数の量子化を思い出そう [FG06b]. 有限集合 I に対し, $B = (b_{ij})_{i,j \in I}$ を反対称化可能な半整数値行列, つまり $\hat{B} = (\hat{b}_{ij})_{i,j \in I} := Bd = (b_{ij}d_j)_{i,j \in I}$ が反対称となるような正整数値対角行列 $d = \text{diag}(d_j)_{j \in I}$ が存在するものとする. B は「交換行列」と呼ばれる. $\gcd(d_j \mid j \in I) = 1$ を仮定し, $q \in \mathbb{C}^\times$ に対し $q_i := q^{d_i}$ とおく. I の部分集合 I_0 を $I_0 := \{i \in I; b_{ij} \notin \mathbb{Z} \text{ or } b_{ji} \notin \mathbb{Z}\}$ と定める. (B, d) と, I を頂点集合とする重み付き籐には 1 対 1 対応があり (ただし籐には 1 ループと 2 サ

イクルは無いものとする), 頂点 i の重みは d_i である. 特に d が単位行列のとき, $b_{ij} > 0$ は頂点 i から j へ向かう矢の数に等しい.

$Y = (Y_i)_{i \in I}$ を, $Y_i Y_j = q^{2\widehat{b}_{ij}} Y_j Y_i$ を満たす非可換変数とし, これらが生成する skew field を $\mathcal{Y}(B)$ とする. 3つ組み (B, d, Y) を「量子 y -seed」, 非可換変数 Y_i を「量子 y 変数」とよぶ. 対角行列 d を省略して (B, Y) とも書く.

$k \in I \setminus I_0$ に対し, 量子 mutation μ_k は y -seed (B, d, Y) を別の y -seed $(B', d', Y') := \mu_k(B, d, Y)$ に変換する操作で, 以下で定められる.

$$(2.1) \quad b'_{ij} = \begin{cases} -b_{ij} & i = k \text{ or } j = k, \\ b_{ij} + \frac{|b_{ik}|b_{kj} + b_{ik}|b_{kj}|}{2} & \text{o.w.}, \end{cases}$$

$$(2.2) \quad d'_i = d_i,$$

$$(2.3) \quad Y'_i = \begin{cases} Y_k^{-1} & i = k, \\ Y_i \prod_{j=1}^{|b_{ik}|} (1 + q_k^{2j-1} Y_k^{-\text{sgn}(b_{ik})})^{-\text{sgn}(b_{ik})} & i \neq k. \end{cases}$$

$\mathcal{Y}(B')$ を Y'_i たちの生成する skew field とすると, μ_k は skew field の同型写像 $\mu_k^* : \mathcal{Y}(B') \rightarrow \mathcal{Y}(B)$ を誘導する. 量子化前 ($q = 1$) と同様, mutation は対合的 $\mu_k \mu_k = \text{id.}$, そして $b_{jk} = b_{kj} = 0$ のとき可換 $\mu_k \mu_j = \mu_j \mu_k$ である. 本稿で用いる重要な事項を挙げよう.

• 量子 mutation の分解. mutation は「単項式部分」と「自己同型部分」の2つに, 2通りに分解される [FG09a, Ke11]. 符号 $\varepsilon \in \{+, -\}$ に対し, skew field の同型写像 $\tau_{k,\varepsilon}$ を以下で定める.

$$(2.4) \quad \tau_{k,\varepsilon} : \mathcal{Y}(B') \rightarrow \mathcal{Y}(B); Y'_i \mapsto \begin{cases} Y_k^{-1} & i = k, \\ q^{-\widehat{b}_{ik}[\varepsilon b_{ik}]_+} Y_i Y_k^{[\varepsilon b_{ik}]_+} & i \neq k, \end{cases}$$

ただし $[a]_+ := \max[0, a]$ である. さらに $\mathcal{Y}(B)$ 上の随伴作用 $\text{Ad}_{k,\varepsilon}$ を

$$(2.5) \quad \text{Ad}_{k,+}(Y_i) := \text{Ad}(\Psi_{q_k}(Y_k))(Y_i) = \Psi_{q_k}(Y_k) Y_i \Psi_{q_k}(Y_k)^{-1},$$

$$(2.6) \quad \text{Ad}_{k,-}(Y_i) := \text{Ad}(\Psi_{q_k}(Y_k^{-1})^{-1})(Y_i) = \Psi_{q_k}(Y_k^{-1})^{-1} Y_i \Psi_{q_k}(Y_k^{-1})$$

とする. ここで $\Psi_q(U)$ は量子 dilogarithm 関数

$$(2.7) \quad \Psi_q(U) = \frac{1}{(-qU; q^2)_\infty}, \quad (z; q)_\infty = \prod_{k=0}^{\infty} (1 - zq^k)$$

である. 量子 dilogarithm 関数の基本性質は以下の2つである¹.

$$(2.8) \quad \Psi_q(q^2 U) \Psi_q(U)^{-1} = 1 + qU,$$

$$(2.9) \quad \Psi_q(U) \Psi_q(W) = \Psi_q(W) \Psi_q(q^{-1} U W) \Psi_q(U) \quad \text{if } UW = q^2 WU.$$

¹2 つ目は pentagon 関係式とよばれる.

これらを用いて, μ_k^* は次の 2 通りに表される.

$$(2.10) \quad \mu_k^*(Y'_i) = \text{Ad}_{k,+} \circ \tau_{k,+}(Y'_i) = \text{Ad}_{k,-} \circ \tau_{k,-}(Y'_i).$$

• 量子トーラス代数. 交換行列 B に対し, 非可換変数 Y^α ($\alpha \in \mathbb{Z}^I$) が生成する量子トーラス代数 $\mathcal{T}(B)$ を関係式 $q^{\langle \alpha, \beta \rangle} Y^\alpha Y^\beta = Y^{\alpha+\beta}$ で定める. ただし $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は $\langle \alpha, \beta \rangle = -\langle \beta, \alpha \rangle = -\alpha \cdot \hat{B}\beta$ で定まる反対称形式である. $\mathbb{Z}^I$ の標準基底 e_i を用いて $Y_i := Y^{e_i}$ と書くと, Y_i は y 変数 Y_i と同一視できる. μ_k^* の単項式部分 (2.4) は, 量子トーラス代数の射

$$(2.11) \quad \tau_{k,\varepsilon} : \mathcal{T}(B') \rightarrow \mathcal{T}(B); Y'_i \mapsto \begin{cases} Y_k^{-1} & i = k, \\ Y^{e_i + e_k[\varepsilon b_{ik}]_+} & i \neq k \end{cases}$$

を誘導する. Y^α ($\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^I$) が生成する $\mathcal{T}(B)$ の部分代数を $\mathbb{A}(B)$ とし, さらに Y_i ($i \in I$) の生成するイデアルによる $\mathbb{A}(B)$ の完備化を $\hat{\mathbb{A}}(B)$ とする [Ke11]. $\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^I$ のとき, 量子 dilogarithm 関数 $\Psi_q(Y^\alpha)$ は $\hat{\mathbb{A}}(B)$ の可逆元になっている.

• dilogarithm 恒等式. I に作用する対称群 $\mathfrak{S}_I$ は, 量子 y -seeds に

$$\mathfrak{S}_I \ni \sigma : (b_{ij}, d_i, y_i) \mapsto (b_{\sigma^{-1}(i), \sigma^{-1}(j)}, d_{\sigma^{-1}(i)}, y_{\sigma^{-1}(i)})$$

と作用する. I の列 $\mathbf{i} = (i_1, i_2, \dots, i_L)$ に対し, mutation の列を $\mu_{\mathbf{i}} := \mu_{i_L} \mu_{i_{L-1}} \cdots \mu_{i_2} \mu_{i_1}$ とし, y -seed の列を考える.

$$(2.12) \quad (B, Y) =: (B(1), Y(1)) \xleftrightarrow{\mu_{i_1}} (B(2), Y(2)) \xleftrightarrow{\mu_{i_2}} \cdots \xleftrightarrow{\mu_{i_L}} (B(L+1), Y(L+1)).$$

$t = 1, \dots, L+1$ に対し, $Y^{e_i}(t) (= Y_i(t))$ ($i \in I$) を $\mathcal{T}(B(t))$ の生成系とする. 任意の符号列 $(\delta_t)_{t=1, \dots, L}$ について, (2.12) に現れる量子 y 変数は

$$(2.13) \quad \begin{aligned} Y_i(t+1) &= \text{Ad}(\Psi_{q_{i_1}}(Y_{i_1}(1)^{\delta_1})^{\delta_1}) \tau_{i_1, \delta_1} \cdots \text{Ad}(\Psi_{q_{i_t}}(Y_{i_t}(t)^{\delta_t})^{\delta_t}) \tau_{i_t, \delta_t} (Y_i(t+1)) \\ &= \text{Ad}(\Psi_{q_{i_1}}(Y^{\delta_1 \beta_1})^{\delta_1}) \cdots \text{Ad}(\Psi_{q_{i_t}}(Y^{\delta_t \beta_t})^{\delta_t}) \tau_{i_1, \delta_1} \cdots \tau_{i_t, \delta_t} (Y_i(t+1)) \end{aligned}$$

と表される. ただし $\beta_r \in \mathbb{Z}^I$ は $Y^{\beta_r} = \tau_{i_1, \delta_1} \cdots \tau_{i_{r-1}, \delta_{r-1}}(Y_{i_r}(r))$ から定まる.

さて, mutation の列 $\mu_{\mathbf{i}}$ が $\sigma \in \mathfrak{S}_I$ について周期的, つまり $\sigma(B(L+1), Y(L+1)) = (B(1), Y(1))$ のとき以下が成り立つ.

$$(2.14) \quad \begin{aligned} &\text{Ad}(\Psi_{q_{i_1}}(Y^{\delta_1 \beta_1})^{\delta_1}) \text{Ad}(\Psi_{q_{i_2}}(Y^{\delta_2 \beta_2})^{\delta_2}) \cdots \text{Ad}(\Psi_{q_{i_L}}(Y^{\delta_L \beta_L})^{\delta_L}) \\ &\quad \circ \tau_{i_1, \delta_1} \tau_{i_2, \delta_2} \cdots \tau_{i_L, \delta_L} \sigma = \text{id}. \end{aligned}$$

ここで, $\alpha_t \in \mathbb{Z}^I$ を y 変数 $Y_{i_t}(t)$ の c ベクトル ($q = 1$ で得られる $y_{i_t}(t)$ 変数を $y_i(1)$ たちの有理関数として表したときの主要項のベキ) とする (特に $\alpha_1 = e_{i_1}$). 一般に, c ベクトルは $\mathbb{Z}_{\geq 0}^I$ または $\mathbb{Z}_{\leq 0}^I$ に属することが知られており, $\alpha_t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^I$ のときその符号 (トロピカル符号) を $\varepsilon_t = +$, $\alpha_t \in \mathbb{Z}_{\leq 0}^I$ のとき $\varepsilon_t = -$ と書く. 量子 y -seed の列 (2.12) に対し, 符号の列 $(\delta_i)_{i=1, \dots, L}$ をそのトロピカル符号列 $(\varepsilon_i)_{i=1, \dots, L}$ にとると, (2.14) は 2 つの恒等式

に分解し、それぞれ $\mathcal{Y}(B)$ の上の射、 $\hat{\mathbb{A}}(B)$ 内の恒等式として以下が成り立つ [Ke11] (Cf. [KN11, Theorem 3.5]) .

$$(2.15) \quad \tau_{i_1, \varepsilon_1} \tau_{i_2, \varepsilon_2} \cdots \tau_{i_L, \varepsilon_L} \sigma = \text{id},$$

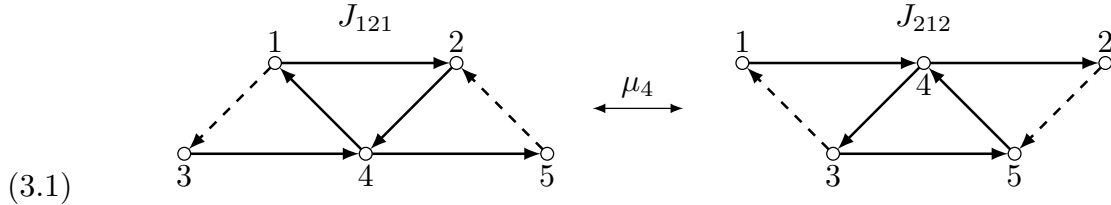
$$(2.16) \quad \Psi_{q_{i_1}}(Y^{\varepsilon_1 \alpha_1})^{\varepsilon_1} \Psi_{q_{i_2}}(Y^{\varepsilon_2 \alpha_2})^{\varepsilon_2} \cdots \Psi_{q_{i_L}}(Y^{\varepsilon_L \alpha_L})^{\varepsilon_L} = 1.$$

§ 3. Fock-Goncharov 籠と配線図

ランク ℓ の有限次元単純 Lie 環 $\mathfrak{g}$ のワイル群 $W(\mathfrak{g})$ を考える. $W(\mathfrak{g})$ を生成する単純鏡映変換を r_s ($s = 1, 2, \dots, \ell$) とし, $W(\mathfrak{g})$ の最長元を w_0 とする. w_0 の最短表示 $r_{s_1} r_{s_2} \cdots r_{s_p}$ を簡単に $s_1 s_2 \cdots s_p$ と書く.

Fock と Goncharov は, w_0 の最短表示 $s_1 s_2 \cdots s_p$ に対して籠 $J_{s_1 s_2 \cdots s_p}$ を導入し [FG06b], Lie 群の表現論および高次タイヒミュラー空間への応用を提唱した. 本稿ではこの籠を「Fock-Goncharov 籠 (FG 籠)」とよぶ. w_0 の異なる最短表示はコクセター変換で移り合うが, このとき対応する FG 籠は mutation で移り合う. (FG 籠の詳細については, 例えば [HIO21, Section 4] を参照.)

Example 3.1. A_2 型のワイル群 $W(A_2)$ の最長元は 121 と 212 の 2 通りの最短表示をもつ. このとき J_{121} と J_{212} は以下のような籠で, 全ての頂点は重み 1 である. これらは 1 つの mutation で移り合う (正確には, J_{121} を頂点 4 で mutation し, この頂点を上にずらすと J_{212} になる).

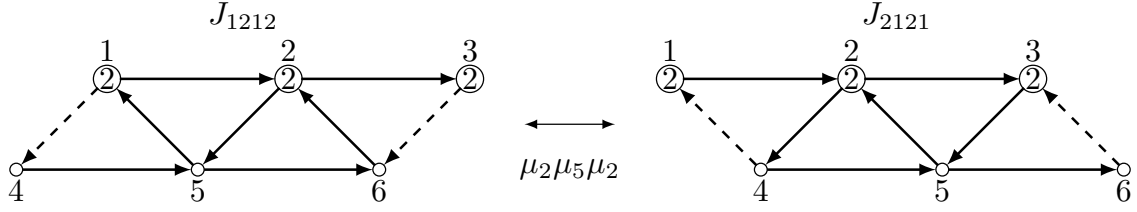


一方, w_0 の最短表示には Figure 1(a) のように 3 本の線から成る配線図を使い, r_1 は線 1 と線 2 の交差, r_2 は線 2 と線 3 の交差を対応させる. J_{121} , J_{212} はこれらに双対な籠 (配線図の領域に籠の頂点が配置される) であり, 配線図の変換 R_{123} に相当するのが籠の変換 μ_4 と理解できる.

A_ℓ 型のワイル群の最長元の最短表示には $\ell + 1$ 本の線から成る配線図が同様に対応する. Lie 環 $\mathfrak{g}$ のディンキン図形が simply-laced の場合, FG 籠の全ての頂点は重み 1 であり, w_0 の最短表示の変換に対応する FG 籠の変換は A_2 型と同様である. 四面体方程式では $\mathfrak{g} = A_2, A_3$ の場合しか必要ないが, 参考までに 3 次元反射方程式で必要になる $\mathfrak{g} = C_2$ の場合を見てみよう.

Example 3.2. C_2 型のワイル群 $W(C_2)$ の最長元は 1212 と 2121 の 2 通りの最短表示をもつ. このとき J_{1212} と J_{2121} はそれぞれ次のような籠で, 3 つの mutation で移り

合う.

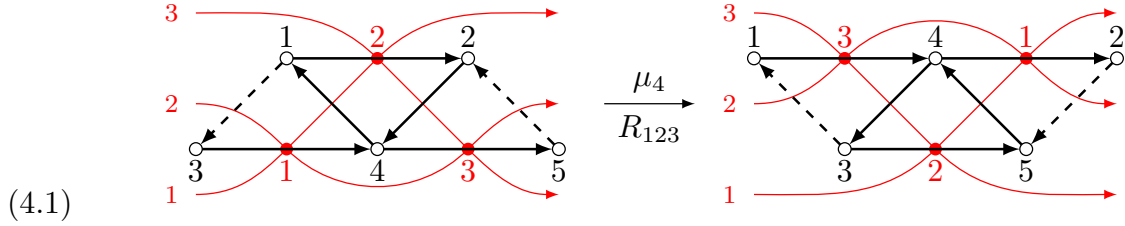


ここで丸 2 は重み 2 の頂点を表す.

§ 4. 四面体方程式

FG 簇の mutation から得られる量子 y 変数の変換を用いて四面体方程式の解 R_{ijk} を実現する方法を説明する.

• R 作用素. 配線図の変換 R_{123} に対応する FG 簇の変異 $\mu_4(J_{121}, Y) = (J_{212}, Y')$ を考える.



mutation の分解 $\mu_4^* = \text{Ad}(\Psi_q(Y_4)) \circ \tau_{4,+}$ は

$$(4.2) \quad \mu_4^* : \begin{pmatrix} Y'_1 \\ Y'_2 \\ Y'_3 \\ Y'_4 \\ Y'_5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\tau_{4,+}} \begin{pmatrix} Y_1 \\ q^{-1}Y_2Y_4 \\ q^{-1}Y_3Y_4 \\ Y_4^{-1} \\ Y_5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Ad}(\Psi_q(Y_4))} \begin{pmatrix} Y_1(1+qY_4) \\ Y_2(1+qY_4^{-1})^{-1} \\ Y_3(1+qY_4^{-1})^{-1} \\ Y_4^{-1} \\ Y_5(1+qY_4) \end{pmatrix}$$

となっている. $\mathcal{Y}(J_{121})$, $\mathcal{Y}(J_{212})$ をそれぞれ Y_i , Y'_i が生成する skew field とする.

次の関係式を満たす正準変数 p_i, u_i ($i = 1, 2, 3$)

$$(4.3) \quad [p_i, u_j] = \hbar \delta_{ij}, \quad [p_i, p_j] = [u_i, u_j] = 0$$

を配線図 (4.1) の交点 i に配置する. $q := e^{\hbar}$ とする. $e^{\pm p_i}, e^{\pm u_i}$ ($i = 1, 2, 3$) は q 交換関係式 $e^{p_i}e^{u_j} = q^{\delta_{ij}}e^{u_j}e^{p_i}$ を満たす. $e^{\pm p_i}, e^{\pm u_i}$ ($i = 1, 2, 3$) が $\mathbb{C}$ 上生成する q ワイル代数を $\mathcal{W}(A_2)$ とする. パラメーター $\kappa_i = e^{\lambda_i} \in \mathbb{C}$ ($i = 1, 2, 3$) を入れた埋め込み

$\phi : \mathcal{Y}(J_{121}) \hookrightarrow \text{Frac}\mathcal{W}(A_2)$, $\phi' : \mathcal{Y}(J_{212}) \hookrightarrow \text{Frac}\mathcal{W}(A_2)$ を次のように定義する.

$$(4.4) \quad \phi : \begin{cases} Y_1 \mapsto \kappa_2^{-1} e^{p_2 - u_2 - p_1}, \\ Y_2 \mapsto \kappa_2 e^{p_2 + u_2 - p_3}, \\ Y_3 \mapsto \kappa_1^{-1} e^{p_1 - u_1}, \\ Y_4 \mapsto \kappa_1 \kappa_3^{-1} e^{p_1 + u_1 + p_3 - u_3 - p_2}, \\ Y_5 \mapsto \kappa_3 e^{p_3 + u_3}, \end{cases} \quad \phi' : \begin{cases} Y'_1 \mapsto \kappa_3^{-1} e^{p_3 - u_3}, \\ Y'_2 \mapsto \kappa_1 e^{p_1 + u_1}, \\ Y'_3 \mapsto \kappa_2^{-1} e^{p_2 - u_2 - p_3}, \\ Y'_4 \mapsto \kappa_1^{-1} \kappa_3 e^{p_3 + u_3 + p_1 - u_1 - p_2}, \\ Y'_5 \mapsto \kappa_2 e^{p_2 + u_2 - p_1}. \end{cases}$$

さらに $\mathcal{W}(A_2)$ の自己同型写像 π_{123} を、冪に対して

$$(4.5) \quad \pi_{123} : \begin{cases} p_1 \mapsto p_1 + \lambda_{23}, & p_2 \mapsto p_1 + p_3, & p_3 \mapsto p_2 - p_1 - \lambda_{23}, \\ u_1 \mapsto u_1 + u_2 - u_3, & u_2 \mapsto u_3, & u_3 \mapsto u_2 \end{cases}$$

と定める. ただし $\lambda_{23} = \lambda_2 - \lambda_3$ である. これは $\mathcal{W}(A_2)$ の非可換な商 $\text{Frac}\mathcal{W}(A_2)$ の同型写像を誘導する.

Proposition 4.1. (i) ϕ および ϕ' は *skew fields* の射である. さらに以下の図式は可換である.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Y}(J_{212}) & \xrightarrow{\phi'} & \text{Frac}\mathcal{W}(A_2) \\ \tau_{4,+} \downarrow & & \downarrow \pi_{123} \\ \mathcal{Y}(J_{121}) & \xrightarrow{\phi} & \text{Frac}\mathcal{W}(A_2) \end{array}$$

(ii) 自己同型写像 π_{123} は随伴作用 $\text{Ad}(P_{123})$ として表せる.

$$(4.6) \quad P_{123} = \rho_{23} e^{\frac{1}{\hbar} p_1 (u_3 - u_2)} e^{\frac{\lambda_{23}}{\hbar} (u_3 - u_1)}.$$

ただし $\rho_{23} \in \mathfrak{S}_3$ は $\mathcal{W}(A_2)$ の生成元のラベル 2 と 3 を入れ替える. ($\mathfrak{S}_3$ はパラメーター λ_i, κ_i には作用しない.)

● 四面体方程式. A_3 型のワイル群 $W(A_3)$ の最長元の最短表示 123121 を 321323 に移す 2 通りの変換から四面体方程式

$$(4.7) \quad R_{456} R_{236} R_{135} R_{124} = R_{124} R_{135} R_{236} R_{456}$$

が得られる. これに対応して Figure 2 のような FG 簾 $J(123121)$ から $J(321323)$ への mutation 列を考えると次の命題が得られる.

Lemma 4.2. (cf. [SY22, Proposition 3.7]) 量子 *y-seed* (J_{123121}, Y) について

$$(4.8) \quad \sigma_{4,7} \mu_8 \mu_7 \mu_4 \mu_8 (J_{123121}, y) = \sigma_{4,8} \mu_7 \mu_8 \mu_4 \mu_7 (J_{123121}, y)$$

が成り立つ. ここで $\sigma_{4,7}, \sigma_{4,8} \in \mathfrak{S}_9$ は簾 J_{123121} の頂点集合に作用する. 2 つの mutation 列 $\mu_8 \mu_7 \mu_4 \mu_8$, $\mu_7 \mu_8 \mu_4 \mu_7$ のトロピカル符号列は全て正, つまり $(+, +, +, +)$ である. さらに $\sigma_{4,7} \mu_8 \mu_7 \mu_4 \mu_8 (J_{123121}) = \sigma_{4,8} \mu_7 \mu_8 \mu_4 \mu_7 (J_{123121}) = J_{321323}$ が成り立つ.

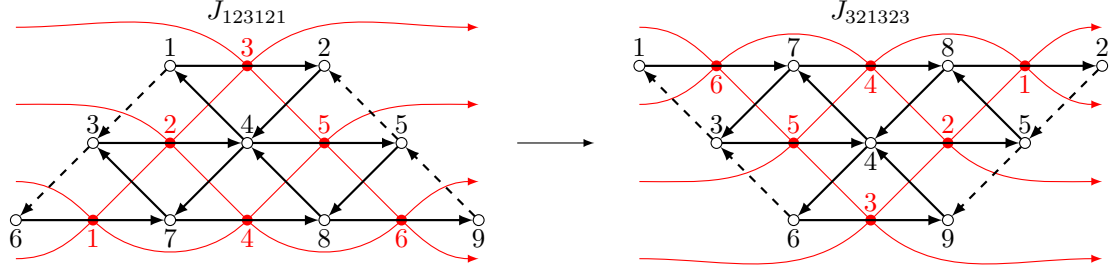


Figure 2. 四面体方程式を与える配線図と籠の変換

この mutation 列に対し (2.15), (2.16) に対応する次の結果が得られる.

Proposition 4.3. 量子トーラス $\mathcal{T}(J_{321323})$ から $\mathcal{T}(J_{123121})$ への射として

$$(4.9) \quad \tau_{8,+} \tau_{4,+} \tau_{7,+} \tau_{8,+} \sigma_{4,7} = \tau_{7,+} \tau_{4,+} \tau_{8,+} \tau_{7,+} \sigma_{4,8}$$

が成り立つ. そして $\hat{\mathbb{A}}(J_{123121})$ における恒等式として以下が成り立つ.

$$(4.10) \quad \Psi_q(Y^{e_8}) \Psi_q(Y^{e_4}) \Psi_q(Y^{e_7+e_8}) \Psi_q(Y^{e_7}) = \Psi_q(Y^{e_7}) \Psi_q(Y^{e_4+e_7}) \Psi_q(Y^{e_8}) \Psi_q(Y^{e_4}).$$

$S := \{1, 2, \dots, 6\}$ を Figure 2 の配線図の交点集合とする. 各交点 $i \in S$ に正準変数の組 (p_i, u_i) を配置し, $e^{\pm p_i}, e^{\pm u_i}$ ($i \in S$) が生成する q ワイル代数を $\mathcal{W}(A_3)$ とする. (4.4) と同様に, $\kappa_i = e^{\lambda_i} \in \mathbb{C}$ ($i \in S$) を入れた埋め込み $\phi: \mathcal{Y}(J_{123121}) \hookrightarrow \text{Frac} \mathcal{W}(A_3)$ を

$$\phi: \begin{cases} Y_1 \mapsto \kappa_3^{-1} e^{p_3 - u_3 - p_2}, & Y_2 \mapsto \kappa_3 e^{p_3 + u_3 - p_5}, & Y_3 \mapsto \kappa_2^{-1} e^{p_2 - u_2 - p_1}, \\ Y_4 \mapsto \kappa_2 \kappa_5^{-1} e^{p_2 + u_2 + p_5 - u_5 - p_3 - p_4}, & Y_5 \mapsto \kappa_5 e^{p_5 + u_5 - p_6}, & Y_6 \mapsto \kappa_1^{-1} e^{p_1 - u_1}, \\ Y_7 \mapsto \kappa_1 \kappa_4^{-1} e^{p_1 + u_1 + p_4 - u_4 - p_2}, & Y_8 \mapsto \kappa_4 \kappa_6^{-1} e^{p_4 + u_4 + p_6 - u_6 - p_5}, & Y_9 \mapsto \kappa_6 e^{p_6 + u_6} \end{cases}$$

で定める. π_{123} (4.5) を拡張し, 四面体方程式 (4.7) に現れる配線図の変換 R_{ijk} に対応する $\mathcal{W}(A_3)$ 上の写像 π_{ijk} of $\mathcal{W}(A_3)$ を以下で定める.

$$(4.11) \quad \pi_{ijk}: \begin{cases} p_i \mapsto p_i + \lambda_{jk}, & p_j \mapsto p_k + p_i, & p_k \mapsto p_j - p_i - \lambda_{jk}, \\ u_i \mapsto u_i + u_j - u_k, & u_j \mapsto u_k, & u_k \mapsto u_j. \end{cases}$$

さらに P_{ijk} を

$$(4.12) \quad P_{ijk} := \rho_{jk} e^{\frac{1}{h} p_i (u_k - u_j)} e^{\frac{\lambda_{jk}}{h} (u_k - u_i)}$$

とすると π_{ijk} は P_{ijk} の随伴作用として表される. 重要なのは, P_{ijk} 自体が四面体方程式

$$(4.13) \quad P_{456} P_{236} P_{135} P_{124} = P_{124} P_{135} P_{236} P_{456}$$

を満たすことで、これは直接計算で確かめられる．さらに $\mathcal{R}_{ijk} = \mathcal{R}(\lambda_i, \lambda_j, \lambda_k)_{ijk}$ を

$$(4.14) \quad \mathcal{R}_{ijk} = \Psi_q(e^{p_i+u_i+p_k-u_k-p_j+\lambda_{ik}})P_{ijk}$$

とし、(4.10) と (4.13) を組み合わせると以下の主定理が得られる．

Theorem 4.4. 作用素 $\mathcal{R}_{ijk}$ は四面体方程式を満たす．

$$(4.15) \quad \begin{aligned} & \mathcal{R}(\lambda_4, \lambda_5, \lambda_6)_{456} \mathcal{R}(\lambda_2, \lambda_3, \lambda_6)_{236} \mathcal{R}(\lambda_1, \lambda_3, \lambda_5)_{135} \mathcal{R}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_4)_{124} \\ &= \mathcal{R}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_4)_{124} \mathcal{R}(\lambda_1, \lambda_3, \lambda_5)_{135} \mathcal{R}(\lambda_2, \lambda_3, \lambda_6)_{236} \mathcal{R}(\lambda_4, \lambda_5, \lambda_6)_{456}. \end{aligned}$$

この構成では、量子 y 変数の q ワイル代数への埋め込みによってスペクトルパラメーター $\kappa_i = e^{\lambda_i}$ が自然に入るのが大きな利点である． $\kappa_i = 1$ (つまり $\lambda_i = 0$) のとき、写像 π_{123} は [MS97, Eq.(12)] に書かれた作用 $\hat{P}_{123}$ と本質的に同じで、変換 μ_4^* は [BV15, Prop.1] に書かれている $\mathcal{R}$ の特別な場合、そして π_{123} は [BV15, Prop.2] の作用 $\mathcal{F}$ に一致する．

§ 5. おわりに

本稿で議論したのは四面体方程式のみだが、本文で少し触れたように C_2 型の FG 箎を使うと反射変換 K_{1234} が構成できる．これを Yang-Baxter 変換の R_{123} と合わせると C_3 型の FG 箎を用いて 3 次元反射方程式の解が構成できる [IKT23a]．また [IKT23b] では四角箎、そして [IKSTY24] では蝶箎を改良した対称蝶箎の場合に q ワイル代数 $\mathcal{W}(A_3)$ を用いて四面体方程式の解を構成している．さらに $\mathcal{W}(A_3)$ の表現 (無限次元) による $\mathcal{R}_{ijk}$ の表示をとるなどの方法で、既に知られている幾つかの解との関係が分かる．こうして、これまで個々に構成されてきた解を量子クラスター代数の側面から統一的に理解できるようになる．

本研究はクラスター代数の応用としても興味深い．特に、mutation が誘導する斜体の変換が 2 通りに表されるという性質 (2.10) は、FG 箎の反射方程式、および四角箎、対称蝶箎の四面体方程式でそれぞれ大事な役割を果たす．

最後に、講演の機会を与えてくださった世話人の三木啓司氏にお礼申し上げます．

References

- [BV15] A. Bytsko and A. Volkov, *Tetrahedron equation, Weyl group, and quantum dilogarithm*, Lett. Math. Phys. 105 (2015) 45–61.
- [FG06b] V. V. Fock and A. B. Goncharov, Cluster $\mathcal{X}$ -varieties, amalgamation and Poisson-Lie groups, *Algebraic geometry and number theory, volume 253 of Progr. Math.* (Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2006) 27–68.
- [FG09a] V. V. Fock and A. B. Goncharov, Cluster ensembles, quantization and the dilogarithm, *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér.* (4) 42 (2009) 865–930.

- [IIO21] R. Inoue, T. Ishibashi and H. Oya, *Cluster realizations of Weyl groups and higher Teichmüller theory*, *Selecta Math. (N.S.)* 27 (2021) no. 3, Paper No. 37, 84pp.
- [IKT23a] R. Inoue, A. Kuniba and Y. Terashima, Quantum cluster algebras and 3D integrability: Tetrahedron and 3D reflection equations, arXiv:2310.14493.
- [IKT23b] R. Inoue, A. Kuniba and Y. Terashima, Tetrahedron equation and quantum cluster algebras, *J. Phys. A: Math. Theor.* 57 (2024) 085202, 33pp.
- [IKSTY24] R. Inoue, A. Kuniba, X. Sun, Y. Terashima and J. Yagi, arXiv:2403.08814.
- [KN11] R. M. Kashaev and T. Nakanishi, *Classical and quantum dilogarithm identities*, *SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl.* 7 (2011) Paper 102, 29pp.
- [Ke11] B. Keller, *On cluster theory and quantum dilogarithm identities*, in *Representations of Algebras and Related Topics*, Editors A. Skowroński and K. Yamagata, EMS Series of Congress Reports (European Mathematical Society, 2011) 85–11.
- [K22] A. Kuniba, *Quantum groups in three-dimensional integrability*, Springer Singapore (2022).
- [MS97] J. -M. Maillard and S. M. Sergeev, *Three-dimensional integrable models based on modified tetrahedron equations and quantum dilogarithm*, *Phys. Lett. B* 405 (1997) 55–63.
- [SY22] X. Sun and J. Yagi, *Cluster transformations, the tetrahedron equation and three-dimensional gauge theories*, arXiv:2211.10702.