

群衆における対向流の表現に向けた ASEP の拡張とその基本図について

Extended ASEP to represent bidirectional pedestrian flow and its fundamental diagram

By

岡本 和也* ・ 友枝 明保**

Kazuya OKAMOTO and Akiyasu TOMOEDA

Abstract

In recent years, the number of crowd collapses has increased with the increase in the number of large-scale events. Consequently, it is increasingly important to consider crowd control measures from the analysis of the models representing pedestrian dynamics. In this paper, we extend the well-known solvable system called asymmetric simple exclusion process as a bidirectional model and propose our model as equations. Moreover, we show analytically the flow inversion for a specific number of cells which can be observed in a real fundamental diagram in pedestrian flow.

§ 1. はじめに

近年、都市の発展に伴い、群衆に関する研究の重要性が増している。また、ソーシャルメディアの普及によって大規模なイベントの数は増加しており、それに伴い群衆事故の防止に向けた行動計画および群衆管理のための精度の高いツールが必要とされている [1]。このようなツールを作るためには、群衆のダイナミクスを理解することが必要不可欠である。

群衆のダイナミクスを理解するために、実験的な研究が盛んに行われている [2–4]。その中でも、異なる二つの方向に進む群衆が混在する流れに関する研究が注目を集めてい

Received January 27, 2024. Revised July 8, 2024.

2020 Mathematics Subject Classification(s):

Key Words: Pedestrian dynamics, bidirectional flows, cellular automaton.

*Department of Pure and Applied Mathematics, Waseda University, Shinjuku-ku, Tokyo, Japan.

e-mail: poulkun67@gmail.com

**Faculty of Informatics, Kansai University, Takatsuki-shi, Osaka, Japan.

e-mail: tomoeda@kansai-u.ac.jp

る [5,6]. これらの流れは, 進む角度によって交差流や対向流と呼ばれるが, 本研究では対向流に着目する. 対向流は, 1本の廊下のような道を左右から歩いてくる人が混在するような流れである. 他にも, 一方向流と呼ばれる, 左右どちらか片方からのみ歩いてくる人が存在する流れが存在する. この一方向流と対向流を比較すると, 低密度のとき, 一方向流の流量は対向流の流量よりも高く, ある平均密度を超えると流量の大きさは逆転し, 対向流の流量が一方向流の流量より高くなることが知られている [5]. このような流量の逆転は, 対向流における歩行者が体の回転を行うことで, 高い密度でも相手を避けて歩行することが可能になることから発生すると考えられている [7]. また, 異なる方向の歩行者同士が相互予測することによって流量を改善していることも明らかになっている [8].

このような実験で確認されたことを説明するための理解志向型や, 実際の道路における問題の解決に向けた応用志向型など, これまでに様々な種類の数理モデルが提案されている [9–11]. しかし, 近年提案されている数理モデルの多くが複雑化しており, 解析的に流量を得ることが困難になっている. しかし, 解析的に流量を得ることは, 数理的構造を調べるための理学的な観点だけでなく, 群衆を制御するための工学的観点からも重要である. これまでに, 解析的な取り組みの一つとして可解な格子模型としてよく知られている 1次元非対称単純排他過程 (ASEP) [12] を, 対向流を表現するために拡張したモデルの解析 [13] が行われている. しかし, 流量の逆転を解析的に示すことは取り組まれていない. そこで, 本論文では新たに ASEP を拡張したモデルから特定のセル数において, 解析的に流量の逆転が生じることを示したので報告する.

§ 2. ASEP の拡張モデル

ASEP とは, 空間がセル状に区切られ, セル内にいる粒子は, 他のセル内にいる粒子と排他的相互作用をしながら運動するような数理モデルである. このモデルは交通流を表現するための数理モデルとしても知られており, また, 流量が解析的に求まるという特徴を持っている.

まず初めに, ASEP の拡張として, 向き合う粒子の位置が入れ替わる効果と, 向き合う粒子間に空きがある場合にどちらか一方の粒子が進む効果を導入したモデルを構築し, その解析を行う. 図 1(a) に示すように, まず初めにセル内にいるそれぞれの粒子は確率によって向きの情報を得る. 具体的には, 確率 $p \in [0, 1]$ で右を向き, 確率 $1 - p$ で左を向く. このようにして向きが決まると, 図 1(b) のように各粒子は前のセルが空いていれば $q \in [0, 1]$ の確率で前のセルに進む. 図 1(b) で見られるような動きは ASEP と変わらないが, 図 1(a) のように向きを決めることによって, 2つの粒子が向き合うパターンが考えられる. そのうちの 1つは図 1(c) に示すような, 隣接している粒子が向かい合っている場合である. この場合, 粒子は確率 r でどちらも前に進み, 確率 $1 - r$ でどちらの粒子も進まないものとする. ここで, $r = q^2 \in [0, 1]$ としている. これは, 向き合っている粒子がそれぞれの粒子を避ける場合のみ進めることを表現している. もう 1つは図 1(d) のように, 向き合っている 2つの粒子の間にあるセルが空いている場合である. このとき, 向き合っている粒子のうち 1つが確率 s で前に進み, 確率 $1 - 2s$ でどちらの粒子も進まな

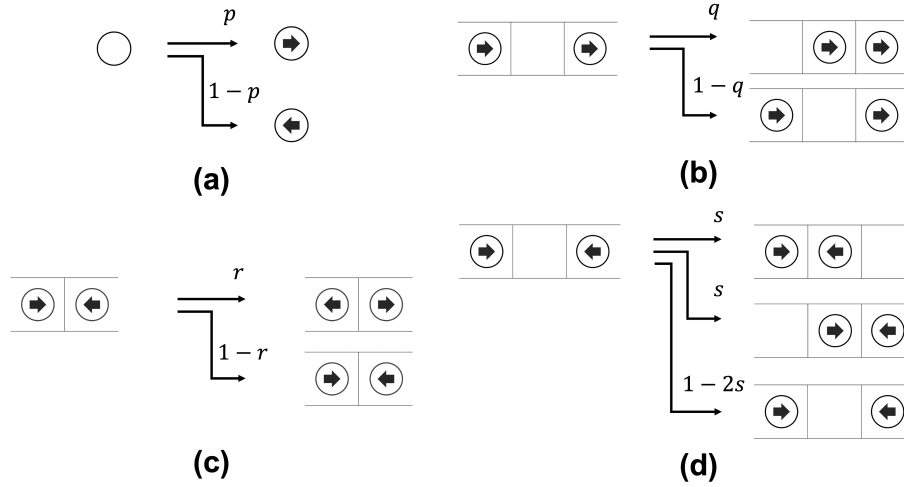


図 1: 新しいモデルの概念図. (a) 粒子は確率 p で進行方向が右向きになり, $1-p$ で左向きになる. (b) 進行方向に対して 1 つ前のセルが空いていたら確率 q で前に進む. (c) 1 つ前のセルに逆向きの粒子がいる場合, 確率 r でどちらも前に進む. これは体の回転によって前の歩行者を避けていることを表現している. (d) 2 つの粒子の間に 1 つ空きのセルがある場合, 確率 s でどちらが一方が前に進む. これは相互予測によって歩行者が衝突を避けることを表現している.

いものとする. ここで, $s = q(1-q) \in [0, 0.25]$ としている. ここまでが拡張したモデルでの粒子の振る舞いであり, 次節では, 拡張したモデルから流量を解析的に得るために, 分解仮説 [14] と呼ばれる流量を解析的に得ることに有用な仮設が成り立つかどうか検証する.

§ 2.1. 分解仮説の数値的検証

ある時刻 t について, L 個のセルが並び, それぞれセルの内部状態を $u_1^t, u_2^t, \dots, u_L^t$ と表現する. ここで, $u_k^t \in \{0, 1\}$ ($k = 1, 2, \dots, L$) であり, u_k^t が 1 を取る時, セル内に粒子がいることを表し, 0 を取る時粒子がセル内にいないことを表している. このとき, $x_1, x_2, \dots, x_m$ をそれぞれ 0 か 1 を取る定数として, ある m 個のセルの状態 $x_1 x_2 \dots x_m$ が空間内に含まれる密度を

$$(2.1) \quad \rho_{x_1 x_2 \dots x_m}^t = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \sum_{j=1}^L \delta_{u_j^t x_1} \delta_{u_{j+1}^t x_2} \dots \delta_{u_{j+m-1}^t x_m}$$

で定義する. また, この密度のことを以下ではパターン密度と呼ぶ. ここで, $\delta_{u_k^t x_l}$ ($l = 1, 2, \dots, m$) は

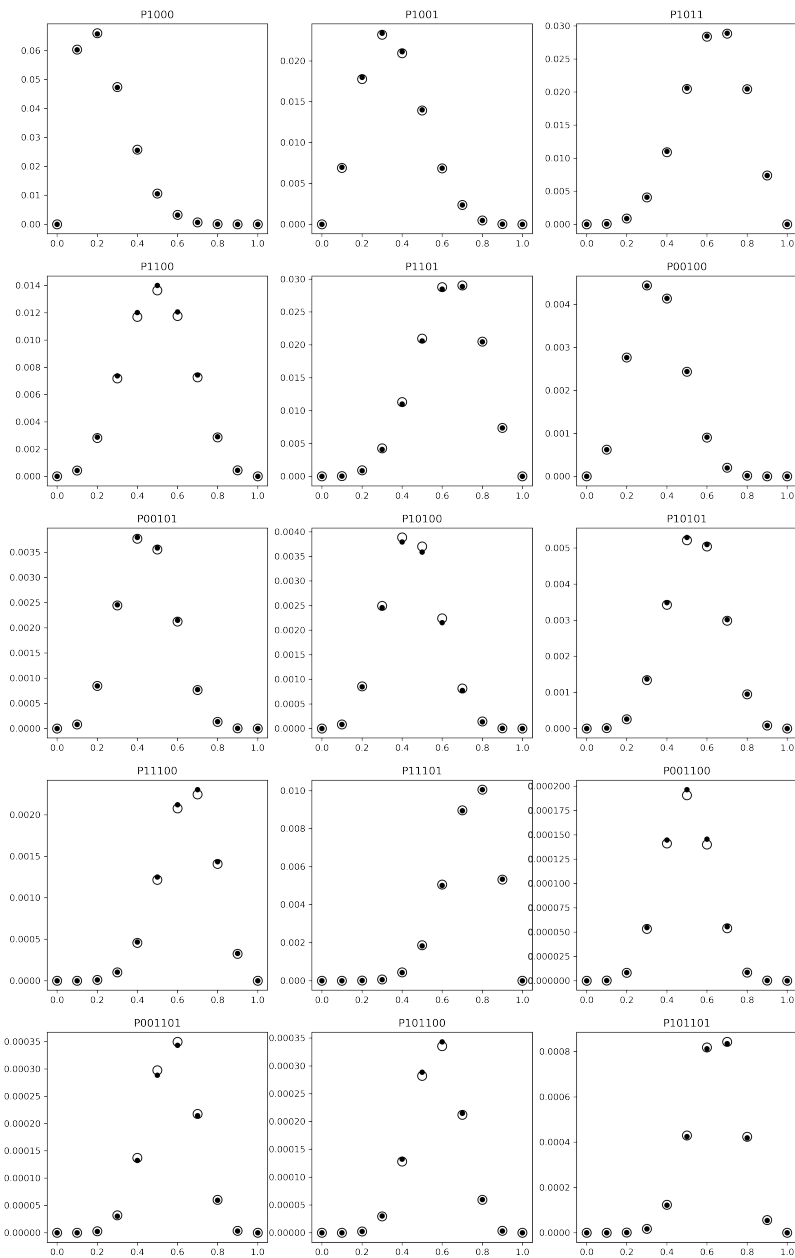


図 2: 分解仮説の数値的検証. 横軸は密度, 縦軸はパターンの出現割合を表している. 黒点が分解仮説における (2.3), (2.4) の右辺の分子を左辺にかけたときの左辺の値, 白丸が右辺の分子の値を表している. ここで, $p = 0.8, q = 0.7, L = 4000$ として, 100000 ステップ時間発展させ, 最後の 12000 ステップ分の時間平均を取っている.

$$(2.2) \quad \delta_{u_k^t x_l} = \begin{cases} 1 & (u_k^t = x_l) \\ 0 & (u_k^t \neq x_l) \end{cases}$$

で定義される関数である． $t \rightarrow \infty$ のとき，パターン密度 $\rho_{x_1 x_2 \dots x_m}^\infty$ を $\rho_{x_1 x_2 \dots x_m}$ と表すことにすると，ASEP では次のような関係式

$$(2.3) \quad \rho_{x_1 x_2 x_3} = \frac{\rho_{x_1 x_2} \rho_{x_2 x_3}}{\rho_{x_2}}, \rho_{x_1 x_2 x_3 x_4} = \frac{\rho_{x_1 x_2 x_3} \rho_{x_2 x_3 x_4}}{\rho_{x_2 x_3}}$$

が成り立つことが数値的に確かめられている [14]．次に，このような関係式が拡張したモデルにも成り立つか確認するため，(2.3) 式に加えて次のような分解仮設

$$(2.4) \quad \rho_{x_1 x_2 x_3 x_4 x_5} = \frac{\rho_{x_1 x_2 x_3 x_4} \rho_{x_2 x_3 x_4 x_5}}{\rho_{x_2 x_3 x_4}}, \rho_{x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6} = \frac{\rho_{x_1 x_2 x_3 x_4 x_5} \rho_{x_2 x_3 x_4 x_5 x_6}}{\rho_{x_2 x_3 x_4 x_5}}$$

について考える．(2.3),(2.4) が成り立っていると仮定すると，拡張したモデルに対して平衡方程式を記述し，その方程式の解から流量を厳密に求めることができる．そこで，これらの関係が成り立つか調べるために，数値的な検証結果を図 2 に示す．以下の解析では周期境界条件を課している．(2.3),(2.4) が成り立っているとき黒点と白丸の値は一致するが，図 2 のいくつかの図が示すように，値が大きくずれているパターンも存在する．つまり，拡張したモデルではこのような分解仮設が成り立たないことが数値的に示唆される．そこで，次節では確率遷移行列を用いた解析を行う．

§ 2.2. 確率遷移行列を用いた解析

$L = 4$ で，ある時間 t における空間上の粒子の数を $N = 3$ とする．このとき，確率遷移行列は

$$(2.5) \quad A = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} & P_{14} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} & P_{24} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} & P_{34} \\ P_{41} & P_{42} & P_{43} & P_{44} \end{pmatrix}$$

と表される．ここで， $P_{kl}(k, l = 1, 2, 3, 4)$ はそれぞれある状態 X_l から時間発展によって，ある状態 X_k に遷移する確率を表している．具体的には， $P_{11} = P_{22} = P_{33} = P_{44} = -2p^2q^2 + 2pq^2 - q + 1$, $P_{12} = P_{23} = P_{34} = P_{41} = p^2q^2 - pq^2 - pq + q$, $P_{13} = P_{24} = P_{31} = P_{42} = 0$, $P_{14} = P_{21} = P_{32} = P_{43} = p^2q^2 - pq^2 + pq$ となる．このような既約である確率遷移行列 A にペロン-フロベニウスの定理を適用すると，絶対値が最大の固有値は 1 であり，単純固有値であることが知られている．したがって，この行列で定義されるマルコフ連鎖は一意的な定常分布を持つ．また，固有値 1 に対応する固有ベクトルは定常分布の定数倍となる．すなわち，固有値 1 に対応する固有ベクトルの成分をそれぞれ規格化すると具体的な定常分布が得られる．流量 Q は定常分布を用いて，

$$(2.6) \quad Q = \frac{(\text{前に進んだ粒子の数}) \times (\text{遷移確率}) \times (\text{定常分布})}{(\text{セル数})}$$

と表される．確率遷移行列 (2.5) の固有値 1 に対応する固有ベクトルは

$$(2.7) \quad (1, 1, 1, 1)$$

となる．ここで，十分に時間が経過したときのセルの状態が $x_1 x_2 x_3 x_4$ である確率を $P(x_1 x_2 x_3 x_4)$ とする．また， $x_j (j = 1, 2, 3, 4)$ の値が 1 のときセル内に粒子が存在し，0 のとき粒子が存在しないことを表している．このとき，定常分布は

$$(2.8) \quad P(1110) = P(1101) = P(1011) = P(0111) = \frac{1}{4}$$

と求まる．これを用いて流量は，

$$\begin{aligned} Q &= \{1 \times (p^3 + (1-p)^3)q + p^2(1-p)(2 \times q(1-q) + 3 \times q^3 + 2 \times q^2(1-q)) \\ &\quad + 1 \times q(1-q^2) + 2 \times q^2 + p(1-p)^2(2 \times q(1-q) + 3 \times q^3 + 2 \times q^2(1-q)) \\ &\quad + 1 \times q(1-q^2) + 2q^2\} \times 1 \times \frac{1}{4} \\ &= \frac{-2p^2q^2 + 2pq^2 + q}{4} \end{aligned}$$

と得られる．それぞれの密度に対して同様の計算を行い，得られた流量をもとにプロットした基本図を図 3 に示す．赤色が一方向流を示しており，青色が対向流を表している．また，点が解析的な結果，丸が数値的な結果を表している．図 3 より，密度が 0.5 のとき一方向流の流量が対向流の流量より高いが，密度が 0.75 のとき流量の大きさが逆転していることがわかった．

§ 3. 対向流を表現するための数理モデル

前節で拡張したモデルに対して，群衆における対向流を表現するために，粒子が初期値として定められた方向を維持する数理モデルについて考える．歩行者を表現する数理モデルとして，遷移割合 $r = q^2 \in [0, 1]$ は，二人の歩行者が近い距離で向き合っているとき，歩行者が体の回転によって衝突を避けて通り抜けられることを表している．一方で， $s = q(1-q) \in [0, 0.25]$ は，歩行者が相互予測によって衝突を避けられることを表している．まず初めに，方向を維持した対向流モデル（対向流モデル）は次のような時間発展方程式

$$(3.1) \quad u_x^{t+1} = u_x^t - f_x^t u_x^t a_x^t - (1 - f_x^t) u_x^t b_x^t + f_{x-1}^t u_{x-1}^t a_{x-1}^t + (1 - f_{x+1}^t) u_{x+1}^t b_{x+1}^t$$

で記述することができる．(3.1) は，保存則から構築されており，東らの研究 [15] の提案したモデルを拡張したものになっている．ここで， $u_x^t \in \{0, 1\}$ はセル内の粒子の有無を表している．右を向いている粒子は，ある時刻 t にいる粒子のうち，先の時刻で右に進めなかった粒子または左から進んできた粒子であるとする，粒子の向きを表す f_x^t は，

$$(3.2) \quad f_x^{t+1} = \frac{f_x^t u_x^t (1 - a_x^t) + f_{x-1}^t u_{x-1}^t a_{x-1}^t}{u_x^{t+1}}$$

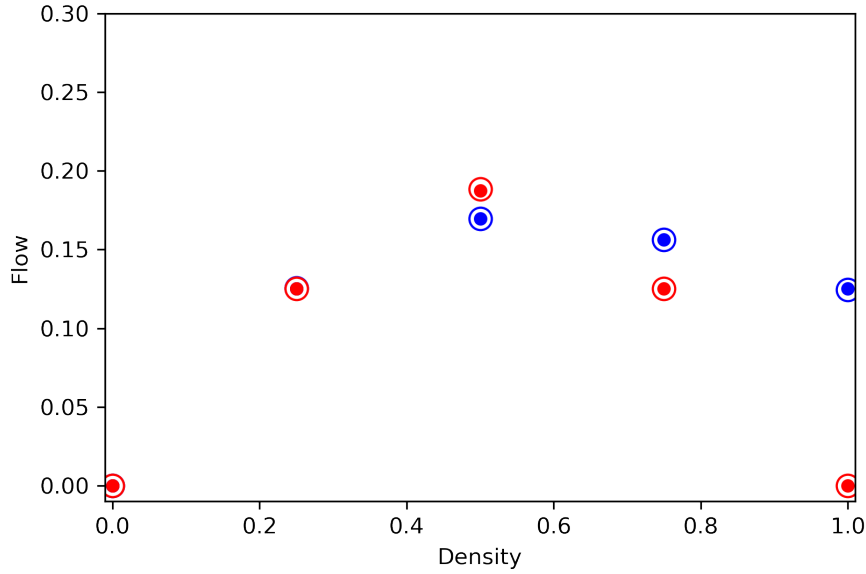


図 3: 拡張したモデルから得られた基本図. 横軸は密度, 縦軸は流量を表している. 点が解析的に得られた流量, 丸が数値的に得られた流量の値を表している. 赤色が一方向流 ($p = 1$), 青色が対向流 ($p = 0.5$) を表している. ここで, $q = 0.5, L = 4$ としている. 密度が 0 の場合, 粒子数が 0 であり, 密度が 0.25 の場合は粒子数が 1 であるため, 赤色と青色の点が示す流量の値が一致しており, 赤色だけが表示されている.

と表される. 簡単化のために, $r_x^t = f_x^t u_x^t$ とすると, (3.2) 式は

$$(3.3) \quad r_x^{t+1} = r_x^t(1 - a_x^t) + r_{x-1}^t a_{x-1}^t$$

となる. また, a_x^t, b_x^t は

$$(3.4) \quad a_x^t = c_x^t [(1 - u_{x+1}^t) \{1 - (u_{x+2}^t - r_{x+2}^t)\} + c_{x+1}^t (u_{x+1}^t - r_{x+1}^t + (1 - u_{x+1}^t)(u_{x+2}^t - r_{x+2}^t)(1 - c_{x+2}^t))]$$

$$(3.5) \quad b_x^t = c_x^t [(1 - u_{x-1}^t)(1 - r_{x-2}^t) + c_{x-1}^t r_{x-1}^t + u_{x-2}^t(1 - u_{x-1}^t)(1 - c_{x-2}^t)]$$

であり, $c_x^t \in \{0, 1\}$ は, u_x^t に粒子がいる場合, その粒子が前進するかどうかを決める確率変数である. ここで, (3.4) および (3.5) は, 右向きと左向きの粒子が動く場合, 1 を取るような変数になっている. (3.4) の右辺にある第 1 項は, 図 1(b) のように粒子を動く場合に 1 を取り, 第 2 項および第 3 項はそれぞれ図 1(c), (d) に対応している. (3.1) および (3.3) に対して, (3.4) および (3.5) を代入したものが, モデルを表す方程式になっている.

§ 3.1. 確率遷移行列を用いた解析

次に, 対向流モデルに対して, 前節で取り扱った確率遷移行列を用いた解析を行う. 右向きの粒子数を N_R , 左向きの粒子数を N_L とする. $L = 4, N_R = 1, N_L = 1$ としたときの確率遷移行列は

$$(3.6) \quad A = \begin{pmatrix} P1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P2 & 0 & P4 & 0 & 0 & P4 \\ 0 & P1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P2 & P4 & P4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P1 & 0 & P2 & 0 & 0 & 0 & 0 & P4 & P4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P1 & 0 & P2 & 0 & 0 & 0 & 0 & P4 & P4 \\ P2 & 0 & 0 & 0 & P3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P2 & 0 & 0 & 0 & P3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P2 & 0 & 0 & 0 & P3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P2 & 0 & 0 & 0 & P3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P4 & P4 & P5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & P4 & 0 & 0 & P4 & 0 & P5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & P4 & P4 & 0 & 0 & 0 & 0 & P5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P4 & P4 & 0 & 0 & 0 & 0 & P5 \end{pmatrix}$$

と表される. ここで, $P1 = 1 - q^2$, $P2 = q^2$, $P3 = (1 - q)^2$, $P4 = q(1 - q)$, $P5 = 1 - 2q(1 - q)$ としている. (3.6) の固有値 1 に対応する固有ベクトルは

$$(3.7) \quad \left(\frac{2 - q}{q}, \frac{2 - q}{q}, \frac{2 - q}{q}, \frac{2 - q}{q}, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1 \right)$$

となる. ここで, セル内に右向きの粒子が存在する状態を R_p , 左向きの粒子が存在する状態を L_p , 粒子が存在しない状態を 0 を用いて表すと, 定常分布は

$$(3.8) \quad \begin{aligned} P(00R_pL_p) &= P(0R_pL_p0) = P(R_pL_p00) = P(L_p00R_p) = C \frac{2 - q}{q}, \\ P(00L_pR_p) &= P(0L_pR_p0) = P(L_pR_p00) = P(R_p00L_p) = C, \\ P(0R_p0L_p) &= P(R_p0L_p0) = P(0L_p0R_p) = P(L_p0R_p0) = C \end{aligned}$$

と求められる. C は規格化定数であり, この場合では,

$$(3.9) \quad C = \frac{q}{8 + 4q}$$

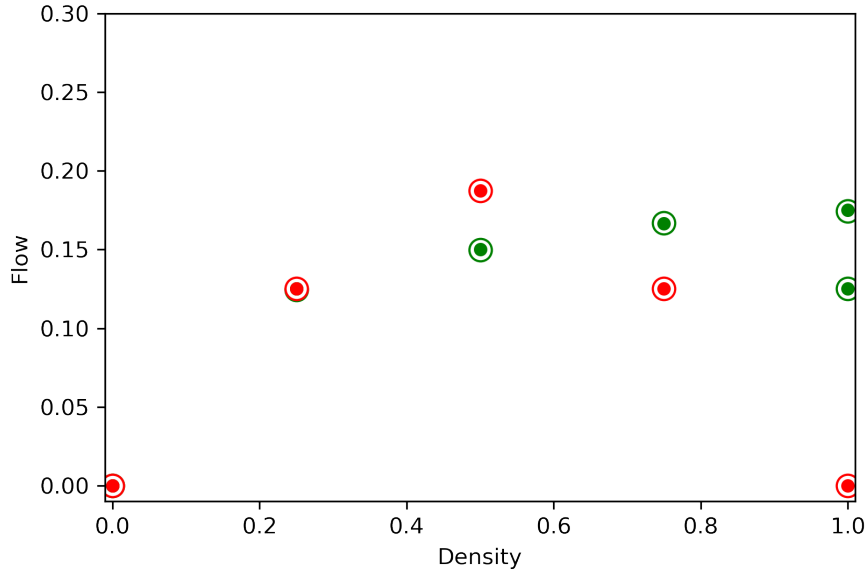


図 4: 対向流モデルから得られた基本図. 横軸は密度, 縦軸は流量を表している. 点が解析的に得られた流量, 丸が数値的に得られた流量の値を表している. 赤色が一方方向流 (任意の x, t に対して $r_x^t = 0$), 緑色が対向流を表している. ここで, $q = 0.5, L = 4$ としている.

となる. 流量は (3.8) および (3.9) を用いて,

$$\begin{aligned}
 Q &= \left(2 \times q^2 \times \frac{q}{8+4q} \times \frac{2-q}{q} \times \frac{1}{4} \right) \times 4 + \left(2 \times q^2 \times \frac{q}{8+4q} \times 1 \times \frac{1}{4} \right) \times 4 \\
 &\quad + \left(1 \times 2q(1-q) \times \frac{q}{8+4q} \times 1 \times \frac{1}{4} \right) \times 4 \\
 &\quad + 2 \times \left(1 \times q(1-q) \times \frac{q}{8+4q} \times 1 \times \frac{1}{4} \right) \times 4 \\
 &= \frac{q^2(2-q)}{2+q}
 \end{aligned}$$

と求められる. 同様にして, それぞれの密度に対して考えうる N_R, N_L のパターンごとに計算すると図 4 が得られる. 赤色が一方方向流を示しており, 緑色が対向流を表している. 図 3 と同様に流量の逆転が解析的および数値的に確認できる. ここで, 密度 1.0 のときの対向流の流量が 2 つ存在しているが, これは右向きと左向きの粒子の数の割合に依存しているためである. 具体的には, 右向きと左向きの粒子の数の割合が等しい時がもっとも流量が高く, 割合が偏ると流量が低くなっている. 図 5 は, $L = 5, 6$ のときの基本図を数値的にプロットしたものである. 図 5 が示すように, L の値を変えても, 流量の逆転が見られることがわかる.

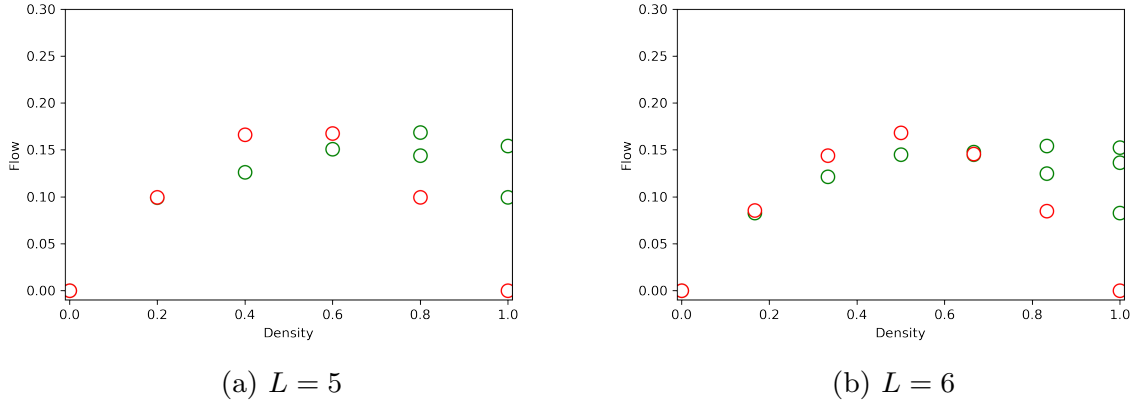


図 5: (a), (b) はそれぞれ $L = 5, 6$ のときの, 対向流モデルから数値的に得られた基本図. 赤色が一方向流 (任意の x, t に対して $r_x^t = 0$), 緑色が対向流を表している. それぞれの場合で, 平均密度に依存して流量が逆転している.

§ 4. 結論

本論文では, ASEP を拡張し, そのモデルの解析について報告した. 具体的には, 拡張したモデルでは分解仮設が成り立たないことを数値的に示し, 特定のセル数において, 確率遷移行列を用いて流量を解析的に求めた. また, 群衆における対向流を表現するために, 粒子が向きを変えないような数理モデルについても解析を行った. 対向流モデルに対しても確率遷移行列を用いた解析を行ったところ, 対向流の流量がある密度までは一方向流の流量より低くなるが, ある密度を超えると流量の大きさが逆転することをセル数 4 の場合に示すことができた. また, セル数 5, 6 のときについても流量の逆転が起きることを数値的に示した. 本論文の解析ではセル数が制限されているため, 任意のセル数において流量の逆転が発生することを示すことが今後の課題となる. また, 本論文では $u_x^t \in \{0, 1\}$ としているが, これを $u_x^t \in [0, 1]$ とすることで, ファジーセルオートマトンとの対応を見ることが今後の課題である.

謝辞

This work was supported by the Research Institute for Mathematical Sciences, an International Joint Usage/Research Center located in Kyoto University, JST SPRING Grant Number JPMJSP2128 (K.O.), and JSPS KAKENHI Grant Number JP23K11139 (A.T.).

References

- [1] Schadschneider, A., Chraïbi, M., Seyfried, A., Tordeux, A., & Zhang, J. (2018). Pedestrian dynamics: From empirical results to modeling. *Crowd Dynamics*, Volume 1: Theory, Models, and Safety Problems, 63–102.

- [2] Helbing, D., Molnár, P., Farkas, I. J., & Bolay, K. (2001). Self-organizing pedestrian movement. *Environment and planning B: planning and design*, **28**(3), 361–383.
- [3] Kretz, T., Grünebohm, A., Kaufman, M., Mazur, F., & Schreckenberg, M. (2006). Experimental study of pedestrian counterflow in a corridor. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, **2006**(10), P10001.
- [4] Shi, X., Ye, Z., Shiwakoti, N., & Li, Z. (2015). A review of experimental studies on complex pedestrian movement behaviors. *CICTP 2015*, 1081–1096.
- [5] Zhang, J., Klingsch, W., Schadschneider, A., & Seyfried, A. (2012). Ordering in bidirectional pedestrian flows and its influence on the fundamental diagram. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, **2012**(02), P02002.
- [6] Zanlungo, F., Feliciani, C., Yücel, Z., Nishinari, K., & Kanda, T. (2023). Macroscopic and microscopic dynamics of a pedestrian cross-flow: Part I, experimental analysis. *Safety science*, **158**, 105953.
- [7] Yamamoto, H., Yanagisawa, D., Feliciani, C., & Nishinari, K. (2019). Body-rotation behavior of pedestrians for collision avoidance in passing and cross flow. *Transportation research part B: methodological*, **122**, 486–510.
- [8] Murakami, H., Feliciani, C., Nishiyama, Y., & Nishinari, K. (2021). Mutual anticipation can contribute to self-organization in human crowds. *Science Advances*, **7**(12), eabe7758.
- [9] Li, Y., Chen, M., Dou, Z., Zheng, X., Cheng, Y., & Mebarki, A. (2019). A review of cellular automata models for crowd evacuation. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, **526**, 120752.
- [10] Chen, X., Treiber, M., Kanagaraj, V., & Li, H. (2018). Social force models for pedestrian traffic—state of the art. *Transport reviews*, **38**(5), 625–653.
- [11] Nicolas, A., & Hassan, F. H. (2023). Social groups in pedestrian crowds: review of their influence on the dynamics and their modelling. *Transportmetrica A: transport science*, **19**(1), 1970651.
- [12] Spitzer, F. (1970). Interaction of Markov processes. *Advances in Mathematics*, **5**, 246–290.
- [13] Yanagisawa, D. (2016). Coordination Game in Bidirectional Flow. *Collective Dynamics*, **1**, 1–14.
- [14] Endo, K., Takahashi, D., & Matsukidaira, J. (2016). On fundamental diagram of stochastic cellular automata with a quadratic conserved quantity. *Nonlinear Theory and Its Applications*, IEICE, **7**(3), 313–323.
- [15] Higashi, K., Satsuma, J., & Tokihiro, T. (2021). Rule 184 fuzzy cellular automaton as a mathematical model for traffic flow. *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics*, **38**, 579–609.