The decomposition of $q(\cdot)$-atom

Kazuki Kobayashi

Abstract

変動指数 Hardy 空間上での新たなアトム分解についてその証明と応用について紹介する.

1 Introduction

まず, Hardy 空間 $H^p(\mathbb{R}^n)$ を定義する. $0 < p < \infty$ とする. また, $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ とし, 非退化条件

$$\int_{\mathbb{R}^n} \psi(x)dx \neq 0$$

を満たすものとする. このとき, Hardy 空間 $H^p(\mathbb{R}^n)$ を以下の条件を満たす $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ 全体の集合とする.

$$\|f\|_{H^p} \equiv \left\| \sup_{j \in \mathbb{Z}} |\psi^j * f| \right\|_{L^p} < \infty,$$

但し, $\psi^j(x) \equiv 2^{-jn}\psi(2^{-j}x)$.

ここで, 変動指数 Hardy 空間 $H^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ を定義する為に, 変動指数 Lebesgue 空間 $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ について考える. 変動指数 $p(\cdot)$ と可測関数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ とする. この時, 変動指数 Lebesgue 空間 $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ は, 以下のように定義される変動指数 Lebesgue ノルム $\|f\|_{L^{p(\cdot)}}$ が有限となる $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ 全体の集合とする.

$$\|f\|_{L^{p(\cdot)}} \equiv \inf \left\{ \lambda > 0 \ : \ \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{|f(x)|}{\lambda} \right)^{p(x)} dx \leq 1 \right\},$$

但し, $\inf \emptyset \equiv \infty$ とする.

以上の定義を組み合わせることにより, 変動指数 Hardy 空間 $H^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ は, 以下の変動指数 Hardy ノルム $\|f\|_{H^{p(\cdot)}}$ が有限となる $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ 全体の集合とする.

$$\|f\|_{H^{p(\cdot)}} \equiv \left\| \sup_{j \in \mathbb{Z}} |\psi^j * f| \right\|_{L^{p(\cdot)}}$$

更に, 変動指数 $p(x)$ に関して以下の 2 条件を仮定する. (以降では 2 つをまとめて, LH と表すことにする.)

$$|p(x)-p(y)| \le \frac{C}{\log(1/|x-y|)} \quad \text{for } |x-y| \le \frac{1}{2},$$
$$|p(x)-p(y)| \le \frac{C}{\log(e+|x|)} \quad \text{for } |y| \ge |x|.$$

また, c をコンパクト台を持つ $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ 関数全体の集合, $L \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ として, $\mathscr{P}_L(\mathbb{R}^n)^\perp$ を以下の 2 条件を満たす可積分関数 f 全体の集合とする.

$$\int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|)^L |f(x)| dx < \infty$$
$$\int_{\mathbb{R}^n} x^\alpha f(x) dx = 0$$

ここで, α は多重指数であって, $|\alpha| \le L$ を満たす.

この 2 つをまとめて,

$$L_{\mathrm{c}}^{q(\cdot),L}(\mathbb{R}^n) \equiv L_{\mathrm{c}}^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n) \cap \mathscr{P}_L(\mathbb{R}^n)^\perp$$

と表す.

最後に, 以降では以下の記号を使用する.

$$\begin{cases} p_- \equiv \inf\limits_{x \in \mathbb{R}^n} p(x), \\ p_+ \equiv \sup\limits_{x \in \mathbb{R}^n} p(x), \end{cases} \quad \begin{cases} \underline{p} \equiv \min(p_-, 1), \\ d_{p(\cdot)} \equiv \max\left(\left[\dfrac{n}{p_-} - n\right], 0\right) \end{cases} \quad ([x] \text{ は } x \text{ の整数部分})$$

2 Main results

Theorem 2.1. $\alpha > 1$ とする. 変動指数 $p(\cdot) \in \mathrm{LH}$ と $q(\cdot) \in \mathrm{LH}$ は $0 < p_- \le p_+ < \infty$ と $q(\cdot) > \alpha\, p(\cdot)$ を満たすものとし, 立方体の列 $\{Q_j\}_{j=1}^\infty$, 非負数の列 $\{\lambda_j\}_{j=1}^\infty$, $L_{\mathrm{c}}^{q(\cdot),d_{p(\cdot)}}(\mathbb{R}^n)$ 関数列 $\{a_j\}_{j=1}^\infty$ とする. これらについて, すべての $j \in \mathbb{N}$ に対して,

$$\operatorname{supp} a_j \subset Q_j \ , \ \|a_j\|_{L^{q(\cdot)}} \le \|\chi_{Q_j}\|_{L^{q(\cdot)}}$$

が成立し,

$$\left\| \left(\sum_{j=1}^\infty (\lambda_j \chi_{Q_j})^{\underline{p}} \right)^{\frac{1}{\underline{p}}} \right\|_{L^{p(\cdot)}} < \infty.$$

を満たすとする. このとき, $f = \sum\limits_{j=1}^\infty \lambda_j a_j$ は, $H^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ 上で収束し,

$$\|f\|_{H^{p(\cdot)}} \le C \left\| \left(\sum_{j=1}^\infty (\lambda_j \chi_{Q_j})^{\underline{p}} \right)^{\frac{1}{\underline{p}}} \right\|_{L^{p(\cdot)}}$$

も満たす.

Theorem 2.1 の応用として, Olsen の不等式がある. それに伴って, 分数冪積分作用素 $I_\beta\,(0<\beta<n)$ と変動指数 Morrey 空間 $\mathcal{M}^p_{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ を以下のように定義する.

$$I_\beta f(x) \equiv \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\beta}}dy \quad (x\in\mathbb{R}^n),$$

$$\|g\|_{\mathcal{M}^p_{q(\cdot)}} \equiv \sup_Q |Q|^{\frac{1}{p}} \times \frac{\|g\chi_Q\|_{L^{q(\cdot)}}}{\|\chi_Q\|_{L^{q(\cdot)}}}$$

但し, Q はすべての立方体を考えるものとし, f, g は可測関数であるとする.

Theorem 2.2. $\alpha>1$, $0<\beta<n$ とする. 変動指数 $p(\cdot)\in \mathrm{LH}$ と $q(\cdot)\in\mathrm{LH}$ は以下を満たすものとする.

$$p_->1\ ,\ \frac{n}{\beta}\geq q(\cdot)>\alpha p(\cdot).$$

このとき, $g\in\mathcal{M}^{n/\beta}_{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ と $f\in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ とすると,

$$\|g\cdot I_\beta f\|_{L^{p(\cdot)}} \leq C\|g\|_{\mathcal{M}^{n/\beta}_{q(\cdot)}}\|f\|_{L^{p(\cdot)}}.$$

が成立する. 但しこのとき, C は f と g に依存しない.

[11, Theorem 5.1] により, $f\in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ について, $\widetilde{q}(\cdot)$ が,

$$\frac{1}{\widetilde{q}(\cdot)}=\frac{1}{p(\cdot)}-\frac{\beta}{n}.$$

を満たすとき, $I_\beta f\in L^{\widetilde{q}(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ となる.

3 Proof of Theorem 2.1

立方体 $Q(z,r)$ を以下のように定義する.

$$Q(z,r)\equiv\prod_{\nu=1}^n (z_\nu-r/2, z_\nu+r/2)$$

但し, $z=(z_1,\ldots,z_n)\in\mathbb{R}^n$, $r>0$ とする.

定理の証明には, 以下の評価 [7, Lemma 19.1] を用いる. $p(\cdot)\in\mathrm{LH}$ は, $0<p_-\leq p_+<\infty$ を満たすものとする. このとき,

$$|Q|^{1/p_-(Q)}\sim|Q|^{1/p_+(Q)}\sim\|\chi_Q\|_{L^{p(\cdot)}} \tag{3.1}$$

が, 任意の立方体 $Q=Q(z,r)$ $(z\in\mathbb{R}^n, r\leq 1)$ に対して成立する. 更に,

$$\|\chi_Q\|_{L^{p(\cdot)}}\sim|Q|^{1/p_\infty} \tag{3.2}$$

が, 任意の立方体 $Q = Q(z, r)$ $(z \in \mathbb{R}^n, r > 1)$ に対して成立する.

但しここでは,

$$p_+(Q) = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in Q} p(x),\ p_-(Q) = \operatorname*{ess\,inf}_{x \in Q} p(x)\ ,\ p_\infty = \lim_{x \to \infty} p(x)$$

とし, $A \sim B$ は, $A \le CB$ and $B \le C'A$ $(C, C' > 0)$ が成立することを意味する.

次に, [16] において定義された極大作用素 $M_{r(\cdot)}$ について考える. $r(\cdot) \in \mathrm{LH}$ と $s(\cdot) \in \mathrm{LH}$ を, $0 < s_- \le s_+ \le \infty$ と $s(\cdot) > \kappa\, r(\cdot)$ $(\kappa > 1)$ を満たすものとする. このとき, 可測関数 f に対して,

$$M_{r(\cdot)} f(x) \equiv \sup_Q \frac{\|f\chi_Q\|_{L^{r(\cdot)}}}{\|\chi_Q\|_{L^{r(\cdot)}}} \chi_Q(x)$$

この極大作用素について以下の不等式 [16, p.2] が成立する.

$$\|M_{r(\cdot)} f\|_{L^{s(\cdot)}} \le C \|f\|_{L^{s(\cdot)}}\ (C > 0). \tag{3.3}$$

Lemma 3.1. $p(\cdot) \in \mathrm{LH}$ と $q(\cdot) \in \mathrm{LH}$ を以下を満たすものとする.

$$q(\cdot) > \alpha p(\cdot)\ \ (\alpha > 1)$$

更に, $\{Q_j\}_{j=1}^\infty$ を立方体の列, $\{\lambda_j\}_{j=1}^\infty$ を非負数の列, $L_{\mathrm{c}}^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ 関数の列 $\{a_j\}_{j=1}^\infty$ とし, 以下を満たすとする.

$$\mathrm{supp} a_j \subset Q_j,\ \|a_j\|_{L^{q(\cdot)}} \le \|\chi_{Q_j}\|_{L^{q(\cdot)}}.$$

このとき, 以下が成立する.

$$\left\| \left(\sum_{j=1}^\infty |\lambda_j a_j|^{\underline{p}} \right)^{\frac{1}{\underline{p}}} \right\|_{L^{p(\cdot)}} \le C \left\| \left(\sum_{j=1}^\infty (\lambda_j \chi_{Q_j})^{\underline{p}} \right)^{\frac{1}{\underline{p}}} \right\|_{L^{p(\cdot)}}.$$

Proof. 単調収束定理により, $\sum_{j=1}^\infty (\lambda_j \chi_{Q_j})^{\underline{p}}$ は有限和になる. また, $\|g\|_{L^{\left(\frac{p(\cdot)}{\underline{p}}\right)'}} \le 1$ を満たす正値関数 $g \in L^{\left(\frac{p(\cdot)}{\underline{p}}\right)'}(\mathbb{R}^n)$ をとれば,

$$\left\| \left(\sum_{j=1}^\infty |\lambda_j a_j|^{\underline{p}} \right)^{\frac{1}{\underline{p}}} \right\|_{L^{p(\cdot)}} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \sum_{j=1}^\infty |\lambda_j a_j(x)|^{\underline{p}} g(x) dx \right)^{\frac{1}{\underline{p}}}.$$

が成立する. 更に, 変動指数 Lebesgue 空間に対する Hölder の不等式により, 以下が成立する.

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \sum_{j=1}^\infty |\lambda_j a_j(x)|^{\underline{p}} g(x) \mathrm{d}x &= \sum_{j=1}^\infty \lambda_j^{\underline{p}} \int_{\mathbb{R}^n} |a_j(x)|^{\underline{p}} g(x) \mathrm{d}x \\
&\le C \sum_{j=1}^\infty \lambda_j^{\underline{p}} (\|a_j\|_{L^{q(\cdot)}})^{\underline{p}} \|g\chi_{Q_j}\|_{L^{\left(\frac{q(\cdot)}{\underline{p}}\right)'}} \\
&\le C \sum_{j=1}^\infty \lambda_j^{\underline{p}} \|\chi_{Q_j}\|_{L^{\frac{q(\cdot)}{\underline{p}}}} \|g\chi_{Q_j}\|_{L^{\left(\frac{q(\cdot)}{\underline{p}}\right)'}}.
\end{aligned}$$

(3.1) と (3.2) によれば,

$$\int_{\mathbb{R}^n}\sum_{j=1}^{\infty}|\lambda_j a_j(x)|^{\underline{p}}g(x)\mathrm{d}x \le C\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j^{\underline{p}}|Q_j|\frac{\|g\chi_{Q_j}\|_{L^{\left(\frac{q(\cdot)}{\underline{p}}\right)'}}}{\|\chi_{Q_j}\|_{L^{\left(\frac{q(\cdot)}{\underline{p}}\right)'}}}.$$

次に, 極大作用素 $M_{\left(\frac{q(\cdot)}{\underline{p}}\right)'}$ の定義と $L^{\frac{p(\cdot)}{\underline{p}}}(\mathbb{R}^n)$ についての Hölder の不等式を用いると,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}\sum_{j=1}^{\infty}|\lambda_j a_j(x)|^{\underline{p}}g(x)\mathrm{d}x &\le C\sum_{j=1}^{\infty}\int_{\mathbb{R}^n}\left(\lambda_j\chi_{Q_j}(x)\right)^{\underline{p}}\left(M_{\left(\frac{q(\cdot)}{\underline{p}}\right)'}g(x)\right)\mathrm{d}x \\ &= C\int_{\mathbb{R}^n}\sum_{j=1}^{\infty}\left(\lambda_j\chi_{Q_j}(x)\right)^{\underline{p}}\left(M_{\left(\frac{q(\cdot)}{\underline{p}}\right)'}g(x)\right)\mathrm{d}x \\ &\le C\left\|\sum_{j=1}^{\infty}(\lambda_j\chi_{Q_j})^{\underline{p}}\right\|_{L^{\frac{p(\cdot)}{\underline{p}}}}\left\|M_{\left(\frac{q(\cdot)}{\underline{p}}\right)'}g\right\|_{L^{\left(\frac{p(\cdot)}{\underline{p}}\right)'}}.\end{aligned}$$

$q(\cdot)>\alpha p(\cdot)$ と $\alpha>1$ から,

$$\left(\frac{\left(\frac{p(\cdot)}{\underline{p}}\right)'}{\left(\frac{q(\cdot)}{\underline{p}}\right)'}\right)_{-}>1,$$

が成立する. したがって, (3.3) によれば,

$$\int_{\mathbb{R}^n}\sum_{j=1}^{\infty}|\lambda_j a_j(x)|^{\underline{p}}g(x)\mathrm{d}x \le C\left\|\sum_{j=1}^{\infty}(\lambda_j\chi_{Q_j})^{\underline{p}}\right\|_{L^{\frac{p(\cdot)}{\underline{p}}}}.$$

□

変動指数 Lebesgue 空間における Fefferman–Stein のベクトル値不等式を改めて確認する.

Lemma 3.2 ([1])**.** 変動指数 $p(\cdot)\in \mathrm{LH}$ を $1<p_-\le p_+<\infty$ を満たすものとする. また,$1<q<\infty$ とする. そのとき, 可測関数列 $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ に対して,

$$\left\|\left(\sum_{j=1}^{\infty}(Mf_j)^q\right)^{\frac{1}{q}}\right\|_{L^{p(\cdot)}}\le C\left\|\left(\sum_{j=1}^{\infty}|f_j|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right\|_{L^{p(\cdot)}},$$

但し, C は $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ に依存しない.

Proof of Theorem 2.1. 立方体 Q に対して, $3Q$ を立方体 Q を 3 倍に拡大したものとする.

$M = M_1$ を Hardy–Littlewood の極大作用素とする．このとき, [8, (4.21) and (4.22)] によれば, 以下の不等式が成立する.

$$\sup_{j\in\mathbb{Z}} |\psi^j * a_k(x)| \lesssim \chi_{3Q_k}(x) M a_k(x) + M\chi_{Q_k}(x)^{\frac{n+d_{p(\cdot)}+1}{n}}$$

他方で,

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k a_k \right\|_{H^{p(\cdot)}} &\le \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \sup_{j\in\mathbb{Z}} |\psi^j * a_k| \right\|_{L^{p(\cdot)}} \\
&\lesssim \left\| \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k| \chi_{3Q_k} M a_k \right\|_{L^{p(\cdot)}} \\
&\qquad + \left\| \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k| (M\chi_{Q_k})^{\frac{n+d_{p(\cdot)}+1}{n}} \right\|_{L^{p(\cdot)}} \\
&\lesssim \left(\left\| \sum_{k=1}^{\infty} (|\lambda_k| \chi_{3Q_k} M a_k)^{\underline{p}} \right\|_{L^{\frac{p(\cdot)}{\underline{p}}}} \right)^{\frac{1}{\underline{p}}} \\
&\qquad + \left\| \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k| (M\chi_{Q_k})^{\frac{n+d_{p(\cdot)}+1}{n}} \right\|_{L^{p(\cdot)}}.
\end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{cases}
\mathrm{I} \equiv \left(\left\| \sum_{k=1}^{\infty} (|\lambda_k| \chi_{3Q_k} M a_k)^{\underline{p}} \right\|_{L^{\frac{p(\cdot)}{\underline{p}}}} \right)^{\frac{1}{\underline{p}}}, \\
\mathrm{II} \equiv \left\| \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k| (M\chi_{Q_k})^{\frac{n+d_{p(\cdot)}+1}{n}} \right\|_{L^{p(\cdot)}},
\end{cases}$$

とおけば, 上記の不等式は以下のように表せる.

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k a_k \right\|_{H^{p(\cdot)}} \lesssim \mathrm{I} + \mathrm{II}.$$

したがって, 以下のことを示せば良い.

$$\mathrm{I} + \mathrm{II} \lesssim \left(\left\| \sum_{k=1}^{\infty} (|\lambda_k| \chi_{Q_k})^{\underline{p}} \right\|_{L^{\frac{p(\cdot)}{\underline{p}}}} \right)^{\frac{1}{\underline{p}}}. \tag{3.4}$$

ここで,

$$\frac{q(\cdot)}{\underline{p}} > \alpha \frac{p(\cdot)}{\underline{p}}$$

が成立することから,

$$\mathrm{I} \lesssim \left(\left\| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\|(|\lambda_k|\chi_{3Q_k} Ma_k)^{\underline{p}}\|_{L^{\frac{q(\cdot)}{\underline{p}}}}}{\|\chi_{3Q_k}\|_{L^{\frac{q(\cdot)}{\underline{p}}}}} \chi_{3Q_k} \right\|_{L^{\frac{p(\cdot)}{\underline{p}}}} \right)^{\frac{1}{\underline{p}}}.$$

$q(\cdot) \in \mathrm{LH}$ と

$$\left(\frac{q(\cdot)}{\underline{p}}\right)_- > \left(\frac{\alpha p(\cdot)}{\underline{p}}\right)_- \geq \alpha > 1,$$

であったから, 極大作用素 M の有界性について考えると,

$$\|(\chi_{3Q_k} Ma_k)^{\underline{p}}\|_{L^{\frac{q(\cdot)}{\underline{p}}}} \lesssim \|\chi_{3Q_k}\|_{L^{\frac{q(\cdot)}{\underline{p}}}}.$$

したがって,

$$\mathrm{I} \lesssim \left(\left\| \sum_{k=1}^{\infty} (|\lambda_k|\chi_{3Q_k})^{\underline{p}} \right\|_{L^{\frac{p(\cdot)}{\underline{p}}}} \right)^{\frac{1}{\underline{p}}}.$$

ここで, Lemma 4.2 を用いると,

$$\begin{aligned}
\mathrm{I} &\lesssim \left(\left\| \sum_{k=1}^{\infty} (|\lambda_k| \left(M\chi_{Q_k}\right)^{\frac{2}{\underline{p}}})^{\underline{p}} \right\|_{L^{\frac{p(\cdot)}{\underline{p}}}} \right)^{\frac{1}{\underline{p}}} \\
&= \left(\left\| \left(\sum_{k=1}^{\infty} (|\lambda_k|^{\underline{p}} \left(M\chi_{Q_k}\right)^2) \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^{\frac{2p(\cdot)}{\underline{p}}}} \right)^{\frac{2}{\underline{p}}} \\
&\lesssim \left(\left\| \left(\sum_{k=1}^{\infty} (|\lambda_k|^{\underline{p}} \left(\chi_{Q_k}\right)^2) \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^{\frac{2p(\cdot)}{\underline{p}}}} \right)^{\frac{2}{\underline{p}}} \\
&\lesssim \left(\left\| \sum_{k=1}^{\infty} (|\lambda_k|\chi_{Q_k})^{\underline{p}} \right\|_{L^{\frac{p(\cdot)}{\underline{p}}}} \right)^{\frac{1}{\underline{p}}}.
\end{aligned}$$

よって,

$$\mathrm{I} \lesssim \left(\left\| \sum_{k=1}^{\infty} (|\lambda_k|\chi_{Q_k})^{\underline{p}} \right\|_{L^{\frac{p(\cdot)}{\underline{p}}}} \right)^{\frac{1}{\underline{p}}}. \tag{3.5}$$

一方で,

$$\frac{n + d_{p(\cdot)} + 1}{n} > \frac{1}{p_-},$$

より, Lemma 4.2 と $\underline{p} \leq 1$ であることより,

$$\mathrm{II} \lesssim \left\| \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|\chi_{Q_k} \right\|_{L^{p(\cdot)}} \leq \left(\left\| \sum_{k=1}^{\infty} (|\lambda_k|\chi_{Q_k})^{\underline{p}} \right\|_{L^{\frac{p(\cdot)}{\underline{p}}}} \right)^{\frac{1}{\underline{p}}}. \tag{3.6}$$

(3.5) と (3.6) をまとめると, (3.4) を得た. □

4 Proof of Theorem 2.2

関数の分解に関しては, [11, Theorem 1.1 **2**] や [12, Theorem 4.6] を参照する.

Lemma 4.1. $L \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $s \in (0, \infty)$, $f \in H^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ とし, $\{Q_j\}_{j=1}^{\infty}$ を立方体の列, $\{\lambda_j\}_{j=1}^{\infty}$ を非負数の列, $L_c^{\infty, L}(\mathbb{R}^n)$ 関数の列 $\{a_j\}_{j=1}^{\infty}$ とする. このとき, $H^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ 上の分解 $f = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j a_j$ が存在し, 任意の $j \in \mathbb{N}$ に対して,

$$|a_j| \leq \chi_{Q_j}$$

かつ, 任意の $s \in (0, \infty)$ に対して,

$$\left\| \left(\sum_{j=1}^{\infty} (\lambda_j \chi_{Q_j})^s \right)^{\frac{1}{s}} \right\|_{L^{p(\cdot)}} \leq C_s \|f\|_{H^{p(\cdot)}}$$

が成立する. ここで, C_s とは, s に依存する定数とする.

定理の証明には, [1, Corollary 2.1] や [6, Lemma 4.2] の評価を用いる.

Lemma 4.2. 変動指数 $p(\cdot) \in \mathrm{LH}$ は, $1 < p_- \leq p_+ < \infty$ を満たし, $1 < q < \infty$ とする. このとき, 任意の可測関数列 $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ に対して,

$$\left\| \left(\sum_{j=1}^{\infty} (M f_j)^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_{L^{p(\cdot)}} \leq C \left\| \left(\sum_{j=1}^{\infty} |f_j|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_{L^{p(\cdot)}},$$

が成立する. 但し, $M = M_1$ は, Hardy–Littlewood の極大作用素である.

Lemma 4.3. $0 < \beta < n$, $L \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ とする. また, $A \in L_c^{\infty, L}(\mathbb{R}^n)$ は台を立方体 Q 上に持つとする. このとき,

$$|I_\beta A(x)| \leq C_{\beta, L} \|A\|_{L^\infty} \ell(Q)^\beta \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k(n+L+1-\beta)}} \chi_{2^k Q}(x) \quad (x \in \mathbb{R}^n).$$

ここでは, $2^k Q$ を Q を 2^k 拡大したものとする.

Proof of Theorem 2.2. [8, Lemma 3.1], Lemma 4.1 によれば, $f \in H^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ は分解できる. つまり, $\{Q_j\}_{j=1}^{\infty}$ を立方体の列, $\{\lambda_j\}_{j=1}^{\infty}$ を非負数の列, $L_c^{\infty, L}(\mathbb{R}^n)$ 関数の列 $\{a_j\}_{j=1}^{\infty}$ が存在して, $H^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ 上で, $f = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j a_j$,

$$\left\| \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \chi_{Q_j} \right\|_{L^{p(\cdot)}} \leq C \|f\|_{H^{p(\cdot)}}.$$

が成立する.

このとき, $\sum_{j=1}^{N} \lambda_j a_j$ は, $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ 上で, f に収束する．また, [11, Theorem 5.1] によれば, $L^{\tilde{q}(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ の位相で $I_\beta \left(\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j a_j \right)(x)$ は $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j I_\beta a_j(x)$ に収束する．但し, $\tilde{q}$ は $\frac{1}{\tilde{q}(\cdot)} = \frac{1}{p(\cdot)} - \frac{\beta}{n}$ を満たす．また, 非負数の増加列 $\{N_\ell\}_{\ell=1}^{\infty}$ について, ほとんどすべての $x \in \mathbb{R}^n$ で $I_\beta \left(\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j a_j \right)(x) = \lim_{\ell \to \infty} I_\beta \left(\sum_{j=1}^{N_\ell} \lambda_j a_j \right)(x)$ が成立する．このとき,

$$\begin{aligned} g(x) \cdot I_\beta f(x) &= g(x) \cdot I_\beta \left(\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j a_j \right)(x) \\ &= g(x) \cdot \lim_{\ell \to \infty} I_\beta \left(\sum_{j=1}^{N_\ell} \lambda_j a_j \right)(x) \\ &= g(x) \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j I_\beta a_j(x). \end{aligned}$$

ここで, Lemma 4.3 を用いると,

$$|g(x) \cdot I_\beta f(x)| \leq C|g(x)| \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \ell(Q_j)^\beta \left(\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k(n-\beta+L+1)} \times \chi_{2^k Q_j}(x) \right).$$

$a_{j,k}(x) \equiv |g(x)|\chi_{2^k Q_j}(x) \times \dfrac{\|\chi_{2^k Q_j}\|_{L^{q(\cdot)}}}{\|\chi_{2^k Q_j} g\|_{L^{q(\cdot)}}}$ と定義することで,

$$\|g \cdot I_\beta f\|_{L^{p(\cdot)}} \leq C \left\| \sum_{j,k=1}^{\infty} \lambda_j \ell(Q_j)^\beta 2^{-k(n-\beta+L+1)} \frac{\|\chi_{2^k Q_j} g\|_{L^{q(\cdot)}}}{\|\chi_{2^k Q_j}\|_{L^{q(\cdot)}}} a_{j,k} \right\|_{L^{p(\cdot)}}$$

ここで,

$$\operatorname{supp} a_{j,k} \subset \chi_{2^k Q_j}, \ \|a_{j,k}\|_{L^{q(\cdot)}} \leq \|\chi_{2^k Q_j}\|_{L^{q(\cdot)}},$$

であるから, Lemma 3.1 を用いると,

$$\|g \cdot I_\beta f\|_{L^{p(\cdot)}} \leq C \left\| \sum_{j,k=1}^{\infty} \lambda_j 2^{-k(n+L+1)} \chi_{2^k Q_j} \right\|_{L^{p(\cdot)}} \times \|g\|_{\mathcal{M}^{n/\beta}_{q(\cdot)}}.$$

今,

$$\chi_{2^k Q_j} \leq CM\chi_{Q_j} \times 2^{kn}, \ \left(1 + \frac{L}{n}\right) p_- > 1,$$

であったから, Lemma 4.2 により

$$\|g \cdot I_\beta f\|_{L^{p(\cdot)}} \le C\|g\|_{\mathcal{M}^{n/\beta}_{q(\cdot)}} \left\| \sum_{j,k=1}^{\infty} \lambda_j 2^{-k} (M\chi_{Q_j})^{1+\frac{L}{n}} \right\|_{L^{p(\cdot)}}$$
$$\le C\|g\|_{\mathcal{M}^{n/\beta}_{q(\cdot)}} \|f\|_{L^{p(\cdot)}} .$$

□

References

[1] D. Cruz-Uribe, A. Fiorenza, J. M. Martell and C. Pérez, *The boundedness of classical operators on variable L^p spaces*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. **31** (2006), no.1, 239–264.

[2] C. Fefferman, E. M. Stein, H^p spaces of several variables, Acta Math. **129** (1972), 137–193 DOI: 10.1007/BF02392215

[3] E.M. Stein and G. Weiss, On the theory of harmonic functions of several variables, I: The theory of Hp-spaces, Acta Math. **103** (1960), 25–62.

[4] V. S. Guliyev, S. G. Hasanov, Y. Sawano and T. Noi, *Non-smooth atomic decompositions for generalized Orlicz-Morrey spaces of the third kind*, Acta Appl. Math. **145** (2016), 133–174.

[5] N. Hatano, *Fractional operators on Morrey-Lorentz spaces and the Olsen inequality*, Math. Notes **107** (2020), no.1-2, 63–79.

[6] T. Iida, Y. Sawano and H. Tanaka, *Atomic decomposition for Morrey spaces*, Z. Anal. Anwend. **33** (2014), no. 2, 149–170.

[7] M. Izuki, E. Nakai and Y. Sawano, *Function spaces with variable exponents -An introduction -*, Sci. Math. Japonicae, **77**, No.2 (2014), 187–315: e-2014, 153–281.

[8] E. Nakai and Y. Sawano, *Hardy spaces with variable exponents and generalized Campanato spaces*, J. Funct. Anal. **262** (2012), no.9, 3665–3748.

[9] T. Nogayama, T. Ono, D. Salim and Y. Sawano, *Atomic decomposition for mixed Morrey spaces*, J. Geom. Anal. **31** (2021), no. 9, 9338–9365.

[10] P. Olsen, *Fractional integration, Morrey spaces and Schrödinger equation*, Comm. Partial Differential Equations, **20** (1995), 2005–2055.

[11] Y. Sawano, *Atomic Decomposition of Hardy Spaces with Variable Exponents and its Application to Bounded Linear Operators*, Integr. Equ. Oper. Theory **77** (2013), 123–148 DOI: 10.1007/s00020-013-2073-1

[12] Y. Sawano and K. Kobayashi, *A remark on the atomic decomposition in Hardy spaces based on the convexification of ball Banach spaces*, Potentials and Partial Differential Equations: The Legacy of David R. Adams, edited by Suzanne Lenhart and Jie Xiao, Berlin, Boston: De Gruyter, 2023, 157–178.

[13] Y. Sawano, S. Sugano and H. Tanaka, *A note on generalized fractional integral operators on generalized Morrey spaces*, Bound. Value Prabl. 2009, Art.ID 835865, 18pp.

[14] Y. Sawano, S. Sugano and H. Tanaka, *Generalized fractional integral operators and fractional maximal operators in the framework of Morrey spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **363** (2011), no. 12, 6481–6503.

[15] M.H. Taibleson and G. Weiss, The molecular characterization of certain Hardy spaces, Asterisque **77** (1980), 67–149.

[16] F. Weisz, *Generalization of Hardy-Littlewood maximal inequality with variable exponent*, Math. Nachr, **296**, (2023), (4), 1687–1705. DOI: 10.1002/mana.202200188