Besov 空間における双曲型発展方程式

大阪経済法科大学・国際学部・岩田順敬

Yoritaka Iwata
Faculty of International Studies, Osaka University of Economics and Law,
Gakuonji 6-10, Yao, Osaka 581-8511, Japan.

iwata_phys@08.alumni.u-tokyo.ac.jp

Mathematics Subject Classification 2010 : 37L05, 47D60, 30H25.

Abstract

Besov 空間上で双曲型抽象発展方程式を考える。Banach 空間の非有界作用素に対する対数表現理論を用いることで、双曲型発展作用素の生成に関する定理を証明する。本稿で示される結果は、既存の Besov 空間上で放物型抽象発展方程式論を、双曲型抽象発展方程式にまで適用できる形に拡張するものである。

1 導入

これまで抽象発展方程式論においては、解析を行う舞台の具体性を取り除いて、Banach 空間や Hilbert 空間という基本的な性質のみ持つものとして理論が構成されてきた (例えば、[1] を参照)。Banach 空間や Hilbert 空間の例としては、関数の集合に代数的な構造や距離が与えられたものもあるが、それ以外に数列や行列、実数や複素数から構成されるものもある。その意味では、Banach 空間という設定は微分方程式を扱うには一般的すぎる設定であると言うこともできる。本稿では Banach 空間に対して、より具体的な Besov 空間という関数空間としての構造を与えることで、より具体的な設定の下での抽象発展方程式論を構成する。つまり、解析の舞台となる空間に対してより具体的設定を与えることで、これまでには無かった理論を展開できるかという点に、Besov 空間上で抽象発展方程式を考える上での要点がある。とくにここで関数空間として補間空間としての性質を有する Besov 空間を採用するのは、関数空間の中では Besov 空間が自在に可積分性を制御できるという意味で一般的な母体を与えるものになっているからである。

他方、Besov 空間を非斉次発展方程式の枠組みに導入するという試みは、主に放物型発展方程式に対して行われてきた。その主な理由の一つとして、放物型方程式の解については平滑化効果があるために、非斉次方程式を考えた時に、非斉次項に関する条件を弱めて時間について Hölder 連続性を持つような非斉次項を考えることができるからである。ここで Hölder 連続性という性質と補間空間としての Besov 空間のもつ性質に類似性を見出すことができることが主な理由となっている。

本稿では、Besov 空間において非斉次の線形双曲型抽象発展方程式を考える。とくに無限小生成作用素に対しては C^0-半群を生成するということの他に条件を課さないことから、Besov 空間という具体的な設定が与えられた下でも十分に抽象発展方程式と呼ぶのに相応しい問題設定となっている。結果として、C^0-半群（連続半群）の生成理論に関する一定理を証明する。

2　数学的設定

2.1　Banach 空間での抽象双曲型発展方程式

空間 X が Banach 空間とした場合の一般論から始める。Banach 空間 X において、非斉次項線形抽象発展方程式を考える。

$$\begin{aligned} &du/dt + Au = f(t), \qquad t \in (a, b], \\ &u(a) = u_a \end{aligned} \tag{1}$$

ここで t は時間変数、A は無限小生成作用素、$u(t)$ は Banach 空間 X 上の要素を表している。A は C^0-半群の生成素ではあるものの、解析的半群の生成素であるとは限らないものと仮定する。このような方程式は、双曲型発展方程式と呼ばれる [2, 3]。時間区間 I を $I = (a, b)$ で定義することにして、非斉次項 $f(\cdot)$ は時間的に強連続な X 値関数として $C(I; X)$ で与えられるものとする。A によって生成される発展作用素（作用素の半群）を $U(t)$ と表すことにすれば、現在の設定の下でこの方程式は一意な時間局所解を持つ。このような解で時間的に連続性を持つ解は、形式的に

$$u(t) = U(t)u_s + \int_s^t U(\tau)f(t-\tau)\, d\tau, \qquad t, s \in (a, b]. \tag{2}$$

と表現することができ、軟解 (mild solution) と呼ばれる。非斉次抽象発展方程式が研究され始めた初期の段階から軟解はよく研究されていて、解の存在や一意性に関する基本的な結果が既に得られている (例えば、[1] を参照)。

2.2　差分作用素を用いた Besov 空間の定義

Muramatsu[4] に基いて、Lebesque 空間、Sobolev 空間、Besov 空間の定義と表記を導入する。Lebesque 空間、Sobolev 空間、Besov 空間はいずれも、一般的に、Banach 空間としての性質を有している。

m、p、q、σ を整数とする。とくに p、q に対しては、$1 \le p, q \le \infty$ が成立するものとかする。有限差分 y に対する k 次の差分作用素を Δ_y^k で表す。1 次および 2 次の差分作用素は

$$\begin{aligned} &\Delta_y f(x) = f(x+y) - f(x), \\ &\Delta_y^2 f(x) = f(x+2y) - 2f(x+y) + f(x) \end{aligned}$$

のように表現できる。Ω を n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ 内の開集合とし、次数 k、有限領域 y に依存した領域 $\Omega_{k,y}$ を

$$\Omega_{k,y} = \bigcap_{j=0}^{k} (\Omega - jy) = \{x; \quad x + jy \in \Omega \text{ for } j = 0, \cdots, k\}$$

で与える。

$L_p(\Omega)$： Lebesgue 測度 dx についての L_p 空間。

$L_p^*(\Omega)$ ： 測度 $|x|^{-n}dx$ についての L_p 空間。

$L_p(\Omega; X)$： Ω 上で定義され、強可測な X 値関数の全体がなす空間。つまり、この空間に属する関数 f に対して $||f(t)||_X \in L_p(\Omega)$ が成立する。

$L_p^*(\Omega;X)$： $L_p(\Omega;X)$ について、L_p を L_p^* に置き換えて得られる空間。

次に Sobolev 空間を定義する。$m \geqq 0$ とすると、

$W_p^m(\Omega;X)$： m 次までのすべての導関数が $L_p(\Omega;X)$ に属しているような関数 f の全体からなる空間。この空間には $||f||_{W_p^m(\Omega,X)} = \sum_{|\alpha|\leqq m} ||\partial_x^\alpha f||_{L_p(\Omega,X)}$ の形のノルムが備えらえる。

一方で $m < 0$ とすると、$f_\alpha \in L_p(\Omega;X)$ であるとして、

$W_p^m(\Omega;X)$： $f_\alpha \in L_p(\Omega;X)$ として、$f(x) = \sum_{|\alpha|\leqq -m} \partial_x^\alpha f_\alpha(x)$ の形の導関数の全体から構成される空間。この空間には $\|f\|_{W_p^m(\Omega.X)} = \inf \sum_{|\alpha|\leqq -m} ||f_\alpha||_{L_p(\Omega,X)}$ の形のノルムが備えられる。ここで、下限 inf は上記の表現式を持つすべての関数に対して取られる。

最後に Besov 空間を定義する。$m \geqq 0$ とすると、$f \in W_p^m(\Omega;X)$ として、

$B_{p.q}^\sigma(\Omega;X)$：半ノルム

$$|f|_{B^\sigma_{p,q(\Omega,X)}} = \sum_{\rceil\alpha|=m} |||y|^{-\theta}\{||\Delta_y^k \partial_x^a f(x)||_{L_p(\Omega_{k,y},X)}\}||_{L^*_{p(R^n)}}$$

が有限値をとるような関数の全体からなる空間として $B_{p.q}^\sigma(\Omega;X)$ を定義する。ここで実数 θ は $0<\theta<1$ または $\theta=1$ を満たし、これにより k は 1 または 2 の値をとる。この空間にはノルム

$$|f||_{B^\sigma_{p.q(\Omega.X)}} = ||f||_{w^m_{p(\Omega,X)}} + |f|_{B^\sigma_{p,q}(\Omega.X)}$$

でが備えられる。

一方で $m < 0$ とすると、

$B_{p,q}^\sigma(\Omega;X)$： $f_\alpha \in B_{p.q}^\theta(\Omega;X)$ として、$f(x) = \sum_{|\alpha|\leqq -m} \partial_x^\alpha f_\alpha(x)$ の形の導関数の全体から構成される空間。この空間にはノルム

$$||f||_{B^\sigma_{p.q(\Omega,X)}} = \inf \sum_{I\alpha|\leqq -m} ||f_\alpha||_{B^\theta_{p,q}(\Omega,X)}$$

が備えられる。ここで、下限 inf は上記の表現式を持つすべての関数に対して取られる。

3 主要な補題

3.1 Besov 空間上の抽象放物型発展方程式論

これまでに設定したように、時間区間 I を $I=(a,b)$ で定義する。Crandall-Pazy[5] に基づいて、軟解に含まれる

$$F(t) = \int_s^t U(\tau) f(t-\tau)\ d\tau \tag{3}$$

の部分に着目する。実際、$U(t)u_s$ の部分は、$U(t)$ が C^0-半群であるという現在の設定を思い起こせば、u_s が X の要素として与えられさえすれば Banach 空間 X の値として定義できるので、問題にする必要はない。他方で、$F(t)$ で表される部分に着目するということが、Muramatsu[4] で放物型発展方程式に対して Besov 空間が導入されたことと関係している。実際、放物型発展方程式においては、非斉次項 $f(t)$ が変数 t に対して Hölder 連続な関数として与えられれば可解性が確立できるという既存の事実は、Besov 空間での可解性に関する結果につなげやすい。Crandall-Pazy[5] では

$$\int_0^\delta \sup\{||f(t)-f(s)||_X; t,s\in K, |t-s|\leqq h\}\frac{dh}{h}<\infty$$

が区間 I のいかなるコンパクトな区間 K においても F が強微分可能であることを証明した。とくに、f が Hölder 連続ならば、F は強連続微分可能となる。Muramatsu[4] では、この結果を改良した次の補題が証明された。

Lemma 3.1. F は式 (3) によって定義されるものとする。A が X 上、$t\geqq 0$ で解析的半群を生成すると仮定する。実数 σ、$1\leqq p,q\leqq\infty$ に対して、次が成立する。

$$f\in B^{\sigma}_{p.q}(I;X)_{1oc}\cap L_1(I;X) \quad\Rightarrow\quad F\in B^{\sigma+1}_{p.q}(I;X)_{1oc}$$

Muramatsu[4] では、これに基づいて、次の補題が証明された。

Lemma 3.2. F は式 (3) によって定義されるものとする。*Lemma3.1* と同様に、A が X 上、$t\geqq 0$ で解析的半群を生成すると仮定する。実数 σ、$1\leqq p,q\leqq\infty$ に対して、次が成立する。次を仮定する。$f\in B^{\sigma}_{p,q}(I;X)_{1oc}\cap L_1(I;X)$ また以下の条件のうちの一がを満たされるものとする。

(a) $\sigma>\frac{1}{p}$ *(b)* $\sigma=\frac{1}{p},\quad q=1$

このとき、$t\in I$ に対して $F(t)\in D(A)$ に対して、F は区間 I で強連続微分可能で、

$$\frac{dF}{dt}(t)+AF(t)=f(t),\qquad a<t<b,$$

が成立する。

3.2 Banach 空間上の非有界作用素に対する対数表現

I_c を $[a,b]$ で与え、$t,s\in I_c$ とする。Banach 空間 X 上で 2 パラメータの非有界作用素

$$U(t,s):D(U)\to X$$

を考える。ここで $D(U)\subset X$ は作用素 $U(t,s)$ の定義域を表しており、$U(t,s)$ は一般的には非有界作用素であるものの、空集合ではないレゾルベント集合を持っているものと仮定する。

非有界作用素 $U(t,s)$ に対して、レゾルベント作用素を次で定義する。

$$I_\eta(t,s)=(I-\eta^{-1}U(t,s))^{-1}$$

複素数 η は $U(t,s)$ のレゾルベント集合から選ばれた複素数を表している。複素数 η については $U(t,s)$ のレゾルベント集合から選ばれるということの他には特に大きさなどについて満たすべき条件はない。また $U(t,s)$ のレゾルベント集合から選ばれた η に対して、作用素 $I_\eta(t,s)$ は空間 X 上の有界な逆作用素 $I_\eta(t,s)^{-1}=I-\eta^{-1}U(t,s)$ の存在を許す有界作用素として定義できる (Riesz-Schauder 理論)。

次に Banach 空間 X において、非有界作用素 $U(t,s)$ と有界作用素 $I_\eta(t,s)$ を用いて、Banach 空間 X 上で 2 パラメータの非有界作用素

$$A(t,s):D(A)\to X$$

を考える。ここで $D(A) \subset X$ は作用素 A の定義域を表している。Iwata[6, 7] に基づいて、この作用素を対数関数で表現して

$$A(t,s) := (I_\eta(t,s)^2 - I_\eta(t,s))^{-1}(I_\eta(t,s)+\nu I)\partial_t \mathrm{Log}\,[I_\eta(t,s)+\nu I] \tag{4}$$

と定義しなおす。ここで ∂_t はある種の弱微分を表している [8]。一価関数として対数関数を定義するために "Log" は対数の主値を表すものとし、作用素の対数関数は Riesz-Dunford 積分によって定義されるものとする。特に Riesz-Dunford 積分の枠組みで議論を完結させるために、ν は十分な大きさを持った複素数を表しているものとする。このときに、実部、虚部ともに負値をとっても構わない。もし $A(t,s)$ が無限小生成作用素で $U(t,s)$ がそれによって生成される C^0-半群であった場合は、$A(t,s)$ と $U(t,s)$ が可換ならば、この表現式で表された関係は自然に満たされることに留意する [6, 7]。

結果をまとめると、次の補題のようになる。この補題は作用素 $A(t,s)$ が $U(t,s)$ を生成するということを必ずしも仮定しないという意味で、Iwata[7] で考えられた定理よりも一般的なものとなっている。とくに、Iwata[7] で仮定された、$U(t,s)$ に対する半群性を仮定する必要がなく、作用素 $U(t,s)$ と作用素 $A(t)$ の間に発展作用素と無限小生成作用素という関係性が成り立つ必要もない。基本的には表現式 (4) を持つ作用素が Banach 空間で成立すれば、次の補題の成立から展開される一連の議論が可能となる。

Lemma 3.3 (非有界作用素の対数表現)**.** $t,s \in I_c = [a,b]$ とし、Banach 空間 X 上で 2 パラメータの非有界作用素 $U(t,s)$ が与えられるものとする。ここで、$U(t,s)$ は空集合ではないレゾルベント集合を持っているものと仮定する。Banach 空間 X 上の非有界作用素 $A(t,s)$ を次のように定義することができる。

$$A(t,s) = \nu(\eta^{-1}+1)\left((I_\eta - \eta(\eta+1)^{-1}I\right)(I_\eta^2 - I_\eta)^{-1}\partial_t \mathrm{Log}[I_\eta + \mu I] \tag{5}$$

ここで η はある複素数で、ν、μ は十分な大きさを持った複素数を表す。$I_\eta(t,s)$ は $U(t,s)$ のレゾルベント作用素、∂_t はある種の弱微分、Log は対数関数の主値を表している。

Proof. Iwata[7] に基づいて表現式の成立を確認するが、作用素 $A(t,s)$ が $U(t,s)$ を生成するということを必ずしも仮定しないという意味でより一般的な設定を行っている。Iwata[7] の証明をそのまま用いたのでは適用できない点もあるので、変更点に留意して改めて証明を構成する。まず、Banach 空間 X で $U(t,s)$ が非有界作用素として与えられる。

(i) 仮定より、$U(t,s)$ のレゾルベント作用素 $I_\eta(t,s)$ は、適切に選ばれた複素数 λ に対して、Banach 空間 X 上の有界作用素であるから、必ず有限のスペクトル半径を持っている。

(ii) Gauss 平面上で $I_\eta(t,s)$ のスペクトル半径の外側にあるほど十分な大きさを持った複素数 ν を選んでくれば、ν は $I_\eta(t,s)$ のレゾルベント集合に属することになり、さらに Gauss 平面の原点は有界作用素 $I_\eta(t,s)+\nu I$ のレゾルベント集合に属することになる。

(iii) X 上の有界作用素 $I_\eta(t,s)+\nu I$ に対しては、この作用素のレゾルベント集合にガウス平面の原点が含まれていることから、Riesz-Dunford 積分によって対数関数を定義することができる。

(iv) 作用素の対数関数に対して微分作用素を作用させる。作用素の微分においても合成関数の微分法則が成立することから、微分作用素を作用させることで微分可能性が問題となり得るのは、$\partial_t(I_\eta(t,s))$ が定義できるかどうかということに帰着される。

(v) Banach 空間 X で定義された一般的に非有界な作用素 $\partial_t(I_\eta(t,s)) = \partial_t(I-\eta^{-1}U(t,s))^{-1}$ についても、作用素の微分においても合成関数の微分法則を考えて、微分作用素を作用させることで微分可能性が問題となり得るのは、$\partial_t U(t,s)$ が定義できるかどうかということに帰着される。これは $U(t,s)$ が C^0-半群性を有した発展作用素として定義されていて、そこに ∂_t で表される弱微分作用素を作用させていることから、問題なく定義することができる（弱微分の定義については [8] を参照)。 □

この定理は η と ν という 2 つのパラメータが出てくることからわかるように二重にレゾルベント近似を行っている。定理の証明の詳細について二つの注意を列挙する。

Remark 3.4. 複素数 ν を選ぶ際には、Gauss 平面上で $I_\eta(t,s)$ のスペクトル半径の外側にあるほど十分な大きさを持った複素数 ν を選んでくる。ここで複素数 η は空でないレゾルベント集合をもつ非有界な発展作用素 $U(t,s)$ のレゾルベント集合から選ばれた複素数なので、複素数 η の属性としては有限の大きさを持つ複素数として扱うことができる。最終的に、複素数 ν と η とは独立に選ぶことができるので、この表現が十分に大きな ν に対していつでも成立させることができることは明らかである。

Remark 3.5. Iwata[7] では (5) の表現からさらに見易い表現を得るために、一部のパラメータ η がパラメータ ν で置き換えられた結果が示されている。実際に $\nu = \eta/(1-\eta)$ と取られたが、ここでは 3 つ目のパラメータ μ を導入するという方法で簡約な表現を得る。以下でその方法を説明する。(5) のもとになる表現式で、一切の η を ν に置き換える前の式

$$A(t,s) = (I + \nu\eta^{-1}(I_\eta - I)^{-1})\ \partial_t \mathrm{Log}\left[I_\eta + \frac{\nu-\eta}{\eta} I\right] - (I + \nu I_\eta^{-1})\partial_t \mathrm{Log}[I_\eta + \nu I]$$

からはじめて、まず 2 つの複素数 $(\nu-\eta)/\eta$ と ν のうちでより大きさの大きい、または同じ大きさのものを選んで μ とおく。これを使って、一部の ν を μ に置き換えることができる。

$$\begin{aligned}
A(t,s) &= (I + \nu\eta^{-1}(I_\eta - I)^{-1})\ \partial_t \mathrm{Log}\,[I_\eta + \mu I] - (I + \nu I_\eta^{-1})\partial_t \mathrm{Log}[I_\eta + \nu' I] \\
&= \left\{(I + \nu\eta^{-1}(I_\eta - I)^{-1}) - (I + \nu I_\eta^{-1})\right\} \partial_t \mathrm{Log}[I_\eta + \mu I] \\
&= \nu(\eta^{-1}+1)\left\{(I_\eta - \eta(\eta+1)^{-1} I\right\} I_\eta^{-1}(I_\eta - I)^{-1}\partial_t \mathrm{Log}[I_\eta + \nu' I] \\
&= \nu(\eta^{-1}+1)\left((I_\eta - \eta(\eta+1)^{-1} I\right) (I_\eta^2 - I_\eta)^{-1}\partial_t \mathrm{Log}[I_\eta + \mu I]
\end{aligned}$$

これによって、Lemma3.3 で示された式が得られる。

ここまではより一般的な枠組みで作用素の対数理論を紹介したが、本稿の設定では時間 t に依存しない無限小生成作用素 $-A$ を考える。これに即して上記の定理を書き換えると、これは (5) のもとになる表現式で、μ を導入する前の式に立ち返ると、

$$\begin{aligned}
-A &= (I + \nu\eta^{-1}(I_\eta - I)^{-1})\ \partial_t \mathrm{Log}\left[I_\eta + \tfrac{\nu-\eta}{\eta} I\right] - (I + \nu I_\eta^{-1})\partial_t \mathrm{Log}[I_\eta + \nu I] \\
&= \partial_t \mathrm{Log}[\eta(I_\eta - I)] - \partial_t \mathrm{Log}[I_\eta] \\
&= \partial_t \mathrm{Log}[\eta(I_\eta - I) I_\eta^{-1}]
\end{aligned}$$

ここで時間 t に依存しない無限小生成作用素によって生成される半群を e^{-tA} と表すと $I_\eta = (I - \eta^{-1}e^{-tA})^{-1}$ となることから、$\eta(I_\eta - I)I_\eta^{-1} = e^{-tA}$ が成立する。これはつまり、

$$\partial_t \mathrm{Log}[\eta(I_\eta - I)I_\eta^{-1}] = \partial_t \mathrm{Log}[\eta(I_\eta - I)] - \partial_t \mathrm{Log}[I_\eta]$$

の右辺によって、左辺の $\partial_t \mathrm{Log}[\eta(I_\eta - I)I_\eta^{-1}]$ が定義できてその存在が保証される限りにおいては、左辺は微分を単に $1/t$ で置き換えることで計算することができるということを意味する。

$$\partial_t \mathrm{Log}[\eta(I_\eta - I)I_\eta^{-1}] = t^{-1}\mathrm{Log}[\eta(I_\eta - I)I_\eta^{-1}]$$

最終的に

$$-A = t^{-1}\mathrm{Log}[\eta(I_\eta - I)I_\eta^{-1}]$$

これは時間 t に依存しない無限小生成作用素を考えた場合について可能な議論で、その他の議論では一般的には適用できない。以上をまとめると、

Lemma 3.6 (解析的半群の生成)**.** 先の補題 *3.3* と同じ設定をとる。Banach 空間 X において、時間変数 $t \in I = (a, b)$ に依存しない無限小生成作用素

$$-A = t^{-1}\left(\mathrm{Log}[\eta(I_\eta - I)] - \mathrm{Log}[I_\eta]\right) \tag{6}$$

と表される作用素を想定すれば、この作用素は C^0-半群を生成する。Banach 空間 X において半群 $U(t) = e^{-tA}$ が生成され、これは解析的半群となる。

Proof. 表現式は Lemma3.3 で示されたことを現在の状況に特化させることで得られる。表現式に含まれる

$$\mathrm{Log}[\eta(I_\eta - I)], \qquad \mathrm{Log}[I_\eta]$$

の部分はいずれも Banach 空間 X において有界作用素となる。有界作用素が C^0-半群を生成することはよく知られている。この事実は、対数の作用素関数を Riesz-Dunford 積分で定義していることと、$I_\eta - I)$ および I_η のスペクトルが Gauss 平面の原点を含まないことから従う。とくに、上記の有界性から e^{-tA} は、Baker-Campbell-Hausdorff の公式で知られるべき級数の形で表わすことができる。同時に、Riesz-Dunford 積分によって表すこともできる。このような事実から、A と e^{-tA} が可換であるという仮定は時間変数 t に依存しない無限小生成作用素を考えた場合には、可換性を仮定して得られる表現に行きつく以前に無限小生成作用素が有界作用素として定式化できるために不要となる。 □

4 主結果

主定理は次のようになる。この定理においては作用素 A が解析的半群の生成素であるという仮定を行う代わりに、対数表現を持つ連続半群（C^0 半群）の生成素であることを仮定している。

Theorem 4.1. X を Banach 空間とする。$F(t)$ が

$$F(t) = \int_s^t U(\tau) f(t-\tau)\, d\tau$$

によって定義されるものとする。実数 σ、$1 \leqq p, q \leqq \infty$ に対して、無限小生成作用素 $-A$ が

$$-A = t^{-1}\mathrm{Log}[\eta(I_\eta - I) I_\eta^{-1}] \tag{7}$$

によって定義されるものとする。次を仮定する。$f \in B^\sigma_{p,q}(I; X)_{1oc} \cap L_1(I; X)$ また以下の条件のうちの一つが満たされるものとする。

(a) $\sigma > \frac{1}{p}$ 　　*(b)* $\sigma = \frac{1}{p}, \quad q = 1$

このとき、$t \in I$ に対して $F(t) \in D(A)$ に対して、F は区間 I で強連続微分可能で、

$$\frac{dF}{dt}(t) + AF(t) = f(t), \qquad a < t < b,$$

が成立する。

5 主結果の証明

5.1 証明の要約

Lemma3.1 及び Lemma3.2 で示されているように、放物型発展方程式を考えた場合には、既に、Besov 空間における結果が得られている。現在の双曲型発展方程式の枠組み (8) で同様の結果を得

るためには、双曲型方程式の無限小生成作用素である $-A$ が、作用素の対数表現を考えることで、解析的半群を生成することができるということを示せばよい。これについては既に Lemma3.6 でその成立を見た。上記三つの補題によって、双曲型発展方程式においても、放物型発展方程式と同様に Besov 空間上での抽象論が構成できる。

5.2 主結果に関する注意

主結果を得る上で重要な役割を果たした

$$-A \rightsquigarrow t^{-1}\mathrm{Log}[\eta(I_\eta - I)I_\eta^{-1}]$$

という対応関係は実際には等式ではない。その意味でここでは $\rightsquigarrow$ という記号を用いた。実際に、左辺は一般的には Banach 空間 X の非有界作用素で、右辺は必然的に Banach 空間 X の有界作用素となる。これが成立する理由は、Lemma3.3 を得る際に、指数関数とその逆関数である対数関数の関係を用いて、形式的に概念を示せば、作用素 $-A$ を表現するために、

$$-A \rightsquigarrow \log\left[\exp(-A)\right]$$

を考えている。このときに、右辺の $\exp(-A)$ は、もし定義可能であれば、Hille-Yosida の定理でよく知られているように、A は Banach 空間 X 上の有界作用素となる。これは既存の理論でも、一般的に非有界な作用素の A に対して、作用素 $\exp(-A)$ は有界作用素になる。ここに Riesz-Dunford 積分で対数関数を設定すれば、$\exp(-A)$ は有界作用素になる。このようにして、左辺と右辺とで有界作用素であるか非有界作用素であるかというように、決定的な差異が生じる。違う言い方をすれば、指数関数と対数関数の違いを利用するために、exp と log を続けて適用するとして、全単射的 (bijective) になる部分にスペクトル集合を集約するような形を作り出している。

スペクトル写像の定理を複数回適用すれば明らかなように、上記の一連の操作の中で、時間発展を表現する $\exp(-A)$ の側には一切の情報ロスが起こらない。その意味で、作用素 $-A$ はそもそも非有界作用素として捉えるのではなく、$t^{-1}\mathrm{Log}[\eta(I_\eta - I)I_\eta^{-1}]$ である捉えて、支配方程式 (8) が

$$\begin{aligned} &du/dt - t^{-1}\mathrm{Log}[\eta(I_\eta - I)I_\eta^{-1}]u = f(t), \qquad t \in (a,b], \\ &u(a) = u_a \end{aligned} \tag{8}$$

として解くことは有用である。同様の考え方は、これまでに、代替的生成素 (alternative infinitesimal generator) という考え方で、Iwata[9] において展開されている。

6 謝辞

この研究は京都大学の補助を得て行われた.

References

[1] H. Tanabe, Equations of evolution, Pitman, 1979.

[2] T. Kato, Linear evolution equation of "hyperbolic" type, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo **17** (1970) 241-258.

[3] T. Kato, Linear evolution equation of "hyperbolic" type II, J. Math. Soc. Japan **25** 4 (1973) 648-666.

[4] T. Muramatsu, Besov spaces and analytic semigroups of linear operators, J. Math. Soc. Japan Vol. 42, No. 1, 1990

[5] M. G. Crandall and A. Pazy, On the differentiability of weak solutions of a differential equation in Banach spaces, J. Math. Mech., 18 (1969), 1007-1016.

[6] Y. Iwata, Theory of B(X)-module: algebraic module structure of generally-unbounded infinitesimal generators, Adv. Math. Phys. Vol. 2020, Article ID 3989572.

[7] Y. Iwata, Unbounded generalization of logarithmic representation of infinitesimal generators, Math. Meth. Appl. Sci. 9002, 2023.

[8] Y. Iwata, Operator topology, A chapter of a book "Topology", IntechOpen, 2020 (DOI:10.5772/intechopen.92226).

[9] Y. Iwata, Alternative infinitesimal generator of invertible evolution families, Journal of Applied Mathematics and Physics **5** (2017) 822-830.