

# On real zeros of the Hurwitz zeta function

九州大学 マス・フォア・イノベーション連携学府\*

池田 香凜

Karin Ikeda

Joint Graduate School of Mathematics for Innovation

Kyushu University

## 0 はじめに

本稿は 2023 年度 RIMS 共同研究（公開型）「解析的整数論とその周辺」における著者の講演に基づくものである。同様の講演を「第 16 回数論女性の集まり」（2023 年 10 月）で行い、その報告集に寄稿した [8]。以下 [8] と重複する部分も多いが証明の鍵となった多項式列の考察と今後の課題を今回新たに付け加えた。

## 1 主結果

**定義 1** (Hurwitz ゼータ関数). 実パラメータ  $a$  ( $0 < a \leq 1$ ) をもち半平面  $\Re(s) > 1$  で絶対収束する無限級数

$$\zeta(s, a) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+a)^s}$$

で定義される関数  $\zeta(s, a)$  を Hurwitz ゼータ関数という。

Hurwitz ゼータ関数  $\zeta(s, a)$  は  $s = 1$  での極を除いて全複素平面に解析接続される（例えば [1, Chapter 9] を見よ）。

この Hurwitz ゼータ関数  $\zeta(s, a)$  の実零点の一意性に関することが、以下に述べる主結果である。  $s = \sigma + it$  とする。

**定理 2.** (池田 [3]) 各整数  $1 \leq N \leq 4$  に対し、  $B_N(a)B_{N+1}(a) < 0$  であれば、区間  $(-N, -N+1)$  において  $\zeta(\sigma, a)$  の一位の零点が唯一つ存在する。

ただし、  $B_n(x)$  は以下で定義される  $n$  番目の Bernoulli 多項式とする。

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n(x) \frac{t^n}{n!} = \frac{te^{xt}}{e^t - 1}.$$

---

\* This work was supported by WISE program (MEXT) at Kyushu University.

これにより、Hurwitz ゼータ関数の実零点は Riemann ゼータ関数の場合と同様に全て一位の零点であることが示されたことになる。

次の節では、Hurwitz ゼータ関数の零点に関する先行研究について述べる。

## 2 先行研究

Hurwitz ゼータ関数  $\zeta(s, a)$  の実零点について述べる前にまず Spira [7] によって零点が存在しない場所が明らかにされているため以下にまとめる。

**定理 3** (Spira [7]). 任意の  $a$  ( $0 < a \leq 1$ ) に対し、次が成立。

- $\sigma \geq 1 + a \implies \zeta(s, a) \neq 0$ ,
- $|t| > 1, \sigma \leq -1 \implies \zeta(s, a) \neq 0$ .

この主張はある種の不等式評価をすることにより得ることができる。さらに、Rouché の定理を用いることで次も示している。

**定理 4** (Spira [7]). 領域

$$|t| < 1, \quad \sigma \leq \begin{cases} -4a - 1 & (0 < a < 1/2) \\ -4a + 1 & (1/2 < a < 1) \end{cases}$$

において次が成立：

任意の整数  $n \geq 1 - 2a$  に対して、 $\zeta(s, a)$  は幅 2 の各実区間  $(-2n - 4a - 1, -2n - 4a + 1)$  にちょうど一つずつ実零点を持ち、それを除いて  $\zeta(s, a) \neq 0$  である。

### 2.1 実零点の存在性

以降では実零点のみ扱うこととする。まず、Hurwitz ゼータ関数の定義から  $\sigma > 1$  の範囲には実零点は持たないことがわかる。

それでは、 $\sigma \leq 1$  においてどのような場合に実零点を持つのであろうか。例えば、 $a = 1$  の場合、 $\zeta(s, 1) = \zeta(s)$  となり、まさに Riemann ゼータ関数と一致する。従って、このとき、Hurwitz 関数  $\zeta(s, a)$  は負の偶数点を実零点に持つことがわかる。他にも  $a = 1/2$  の場合は  $\zeta(s, 1/2) = (2^s - 1)\zeta(s)$  であるため非正の偶数点を実零点にもつ。このように  $a$  のとる値によって実零点が現れる場所は変化する。以下では、 $a = 1/2, 1$  の場合を除いて考えることとする。

最初に、よく知られている Hurwitz ゼータ関数と Bernoulli 多項式の関係について述べる。

**命題 5.** (cf. [1, Proposition 9.3]) 任意の整数  $n \geq 0$  に対し、

$$\zeta(-n, a) = -\frac{B_{n+1}(a)}{n+1}.$$

これにより  $\sigma \leq 1$  において Hurwitz ゼータ関数  $\zeta(s, a)$  が実零点を持つための条件として

Bernoulli 多項式が現れることがわかる. Bernoulli 多項式の符号に注目することで Hurwitz ゼータ関数  $\zeta(s, a)$  が実零点を持つための必要十分条件をまず, 区間  $(0, 1)$  において中村 [5, 6] が研究し, その後, 松坂 [4] によって実零点が存在する全ての区間に対して示された. その結果を以下に述べる.

**定理 6** (松坂 [4]). 整数  $N \geq 0$  に対し, Hurwitz ゼータ関数  $\zeta(\sigma, a)$  が区間  $(-N, -N + 1)$  において実零点を持つための必要十分条件は  $B_N(a)B_{N+1}(a) < 0$  を満たすことである.

実零点が存在するような範囲においてどのような場合に実零点を持つかを明らかにしたい. 次の小節では実零点の一意性に関する先行研究をまとめる.

## 2.2 実零点の一意性

実零点の一意性に関しては, 2つの先行研究がある. そこで残された場合を解決したということが, 我々の主結果である. 主結果を得るために先行研究にある手法を用いた. 2つの先行研究それぞれの主張及び証明の概略について述べる.

**定理 7** (遠藤-鈴木 [2]). 条件  $0 < a < 1/2$  を満たすとき, Hurwitz ゼータ関数  $\zeta(\sigma, a)$  は区間  $(0, 1)$  においてちょうど一つの実零点を持つ.

ここで, 定理 6 より  $a$  の条件は区間  $(0, 1)$  において実零点を持つための必要十分条件であることに注意しておく. この定理の証明を行うために遠藤-鈴木 [2] は, 以下の補題を準備している.

**補題 8.** (cf. [2, Lemma 2.1]) 条件  $0 < \sigma < 1$  を仮定する. このとき,

$$\Gamma(s)\zeta(s, a) = \int_0^\infty H(a, x)x^{s-1}dx, \quad H(a, x) := \frac{e^{(1-a)x}}{e^x - 1} - \frac{1}{x}.$$

**補題 9.** [2, Lemma 2.2, Lemma 2.3] 任意の  $0 < a < 1/2$  に対して次が成り立つような, ある  $x_0 > 0$  が存在する.

$$H(a, x_0) = 0, \quad H(a, x) > 0 \quad (0 < x < x_0), \quad H(a, x) < 0 \quad (x_0 < x).$$

さらに, 関数  $x_0^{-\sigma}\Gamma(\sigma)\zeta(\sigma, a)$  は  $\sigma \in (0, 1)$  において単調減少する.

この二つの補題を用いることで関数  $x_0^{-\sigma}\Gamma(\sigma)\zeta(\sigma, a)$  の振る舞いを考察することにより定理 7 の証明を完了させている.

最後に, もう一つの先行研究について述べる.

**定理 10** (松坂 [4]). 任意の整数  $M \geq 2$  に対し, Hurwitz ゼータ関数  $\zeta(\sigma, a)$  は各区間  $[-2M - 2, -2M)$  においてちょうど一つの実零点を持つ.

この定理は  $a \neq 1/2, 1$  のとき, 不等式  $B_{2M+1}(a)B_{2M+3}(a) < 0$  と定理 4 を用いることで簡単に示すことができる.

### 3 主結果の証明

この主定理の証明の概略について述べる．証明の方法は2つある．1つ目は遠藤-鈴木 [2] が定理7を示す際に用いた手法である．それを用いることにより証明を全ての場合 ( $1 \leq N \leq 4$ ) において完了することができた．別解として2つ目の手法がある．2つ目の手法は松坂 [4] が定理10を示す際に用いた定理4を使う．定理4を使うことで  $N = 4$  の場合のみ示すことができる．それぞれの手法について少し詳しく述べる．

#### 3.1 方法1

遠藤-鈴木 [2] と同様の手法で行うために，以下の主張を準備する．

**命題 11.** (cf. [4, Proposition 2.3]) 領域  $-N < \sigma < -N + 1$  ( $N \geq 0$ ) に対し，以下が成立．

$$\Gamma(s)\zeta(s, a) = \int_0^\infty H_N(a, x)x^{s-1}dx, \quad H_N(a, x) := \frac{e^{(1-a)x}}{e^x - 1} - \sum_{n=0}^N \frac{B_n(1-a)}{n!} x^{n-1}.$$

さらに，

$$\begin{aligned} h_N(a, x) &:= x(e^x - 1)H_N(a, x), \\ f_N(a, x) &:= e^{(a-1)x} \frac{\partial^{N+1}}{\partial x^{N+1}} h_N(a, x) \end{aligned}$$

とする．これを用いることで次が成り立つ．

**補題 12.** ([2, Lemma 2.2, Lemma 2.3] の一般化) 条件  $B_N(a)B_{N+1}(a) < 0$  と関数  $\partial/\partial x f_N(a, x)$  が  $x > 0$  の範囲にちょうど一つの零点しか持たないことを仮定する．このとき，次を満たす  $x_0 = x_0(a) > 0$  が存在する．

$$H_N(a, x_0) = 0, \quad H_N(a, x) < 0 (0 < x < x_0), \quad H_N(a, x) > 0 (x_0 < x),$$

または

$$H_N(a, x_0) = 0, \quad H_N(a, x) > 0 (0 < x < x_0), \quad H_N(a, x) < 0 (x_0 < x).$$

さらに，関数  $x_0^{-\sigma} \Gamma(\sigma)\zeta(\sigma, a)$  は  $\sigma \in (-N, -N + 1)$  において単調増加または単調減少する．

これらを用いることで次のことが容易に示せる．

**命題 13.** 関数  $\partial/\partial x f_N(a, x)$  が  $x > 0$  の範囲にちょうど一つの零点しか持たないことを仮定する．このとき，Hurwitz ゼータ関数  $\zeta(s, a)$  は区間  $(-N, -N + 1)$  において一位の実零点を唯一もつ．

従って，主結果を得るためには各整数  $1 \leq N \leq 4$  に対して「関数  $\partial/\partial x f_N(a, x)$  が  $x > 0$  の範囲にちょうど一つの零点しか持たないこと」を示せば良い．すると関数  $\partial/\partial x f_N(a, x)$  のグ

ラフの概形を考察してみようとする。まず、関数  $\partial/\partial x f_N(a, x)$  は計算すると次のことがわかる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} f_N(a, 0) &= (N+2)B_{N+1}(1-a), \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\partial}{\partial x} f_N(a, x) &= \begin{cases} \infty & (B_N(1-a) < 0), \\ -\infty & (B_N(1-a) > 0). \end{cases} \end{aligned}$$

従って、条件  $B_N(a)B_{N+1}(a) < 0$  を仮定しているため  $x = 0$  と  $x \rightarrow \infty$  では関数  $\partial/\partial x f_N(a, x)$  は異符号になることがわかる。もう少し詳しくグラフの概形を見てみよう。そのために関数  $\partial/\partial x f_N(a, x)$  を  $x$  についてさらにもう一回微分したものについて考える。ここで、簡単のため  $e^{-ax} \partial^2/\partial x^2 f_N(a, x)$  を考察する。  $P_N(a, x) := e^{-ax} \partial^2/\partial x^2 f_N(a, x)$  とすると、計算することにより次が得られる。

$$P_N(a, x) = \sum_{m=0}^N C_{N,m}(a) x^m.$$

ここで、 $C_{N,m}(a)$  は以下のような係数である。

$$\begin{aligned} C_{N,m}(a) &= - \left( \sum_{k=0}^{N-2-m} \binom{N+1}{k} B_{m+2+k}(1-a) + 2a \sum_{k=0}^{N-1-m} \binom{N+1}{k} B_{m+1+k}(1-a) \right. \\ &\quad \left. + a^2 \sum_{k=0}^{N-m} \binom{N+1}{k} B_{m+k}(1-a) \right) \frac{1}{m!} \quad (0 \leq m \leq N). \end{aligned}$$

特に、多項式  $P_N(a, x)$  は  $x$  について  $N$  次多項式であることに注意する。多項式  $P_N(a, x)$  と関数  $\partial/\partial x f_N(a, x)$  のグラフの関係を考えることで、「多項式  $P_N(a, x)$  が  $x > 0$  の範囲に実零点を高々 1 つしか持たない」ならば「関数  $\partial/\partial x f_N(a, x)$  が  $x > 0$  の範囲にちょうど一つの零点しか持たない」ことがわかるため、これを用いることで主定理を示すことができる。

最後に、各整数  $1 \leq N \leq 4$  に対して「多項式  $P_N(a, x)$  が  $x > 0$  の範囲に実零点を高々 1 つしか持たない」ことを確認すれば証明が完了する。

$N = 1$  のときは簡単に確認でき、 $N = 2, 3$  のときは多項式  $P_i(a, x)$  ( $i = 2, 3$ ) の係数のグラフの概形に着目し、解と係数の関係を用いることで示すことができる。 $N = 4$  のときは、もう少し議論が必要であるため以下に詳しく述べる。

$N = 4$  のとき、多項式  $P_4(a, x)$  は  $x$  について四次関数となる。これもまた、 $N = 2$  のときと同様に解と係数の関係を用いる。しかし、この場合は解と係数の関係を用いるだけで全ての  $a$  ( $0 < a \leq 1$ ) に対して解の正負を特定することはできない（部分的には正の解を持たないことを示すことができる）。そこで、多項式  $P_4(a, x)$  を  $x$  について微分することで得られる三次多項式  $\partial/\partial x P_4(a, x)$  に対して再度解と係数の関係を用いて解析することで、証明を完了させることができる。これは、多項式の係数  $C_{4,m}(a)$  ( $0 \leq m \leq 4$ ) の実零点の位置が特徴的だったために証明ができた。その特徴は、以下の表を見ることで確認することができる。具体的には、多項式  $C_{4,m}(a)$  ( $0 \leq m \leq 4$ ) の  $0 < a < 1$  における零点を  $c_{4,0,i}, c_{4,1,i}, c_{4,2,i}, c_{4,3,i}, c_{4,4,i}$  ( $i = 1, 2$ )

とする。すると、

$$0 < c_{4,4,1} < c_{4,3,1} < c_{4,2,1} < c_{4,1,1} < c_{4,0,1} < c_{4,4,2} \\ < c_{4,3,2} < c_{4,2,2} < c_{4,1,2} < c_{4,0,2} < 1$$

というように、多項式の添え字の番号順に零点が並び、零点付近での増減が  $c_{4,m,1}$ ,  $c_{4,m,2}$  ( $0 \leq m \leq 4$ ) ごとに同じである。ということである。

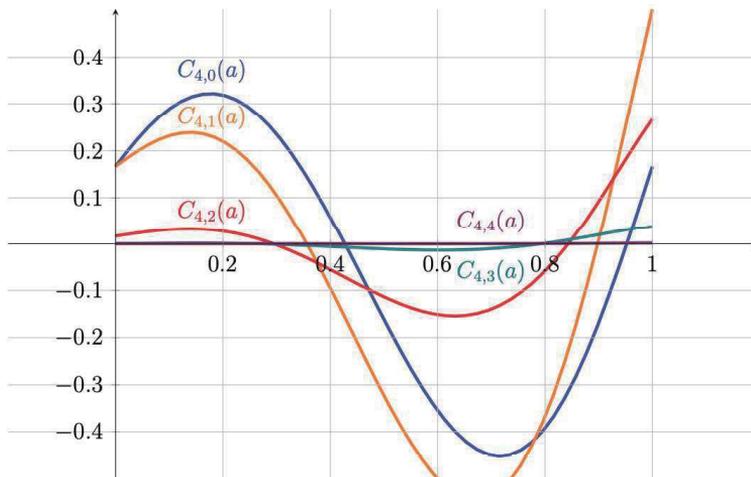
|               |     |     |          |     |          |     |          |     |          |     |   |
|---------------|-----|-----|----------|-----|----------|-----|----------|-----|----------|-----|---|
| $a$           | 0   | ... | 0.176... | ... | 0.427... | ... | 0.715... | ... | 0.952... | ... | 1 |
| $C'_{4,0}(a)$ | +   | +   | 0        | -   | -        | -   | 0        | +   | +        | +   | + |
| $C_{4,0}(a)$  | 1/6 | ↗   |          | ↘   | 0        | ↘   |          | ↗   | 0        | ↗   |   |

|               |     |     |          |     |          |     |          |     |          |     |   |
|---------------|-----|-----|----------|-----|----------|-----|----------|-----|----------|-----|---|
| $a$           | 0   | ... | 0.138... | ... | 0.356... | ... | 0.757... | ... | 0.898... | ... | 1 |
| $C'_{4,1}(a)$ | +   | +   | 0        | -   | -        | -   | 0        | +   | +        | +   | + |
| $C_{4,1}(a)$  | 1/6 | ↗   |          | ↘   | 0        | ↘   |          | ↗   | 0        | ↗   |   |

|               |      |     |          |     |          |     |          |     |          |     |   |
|---------------|------|-----|----------|-----|----------|-----|----------|-----|----------|-----|---|
| $a$           | 0    | ... | 0.138... | ... | 0.294... | ... | 0.632... | ... | 0.843... | ... | 1 |
| $C'_{4,2}(a)$ | +    | +   | 0        | -   | -        | -   | 0        | +   | +        | +   | + |
| $C_{4,2}(a)$  | 1/60 | ↗   |          | ↘   | 0        | ↘   |          | ↗   | 0        | ↗   |   |

|               |   |     |          |     |          |     |          |     |          |     |   |
|---------------|---|-----|----------|-----|----------|-----|----------|-----|----------|-----|---|
| $a$           | 0 | ... | 0.151... | ... | 0.259... | ... | 0.603... | ... | 0.793... | ... | 1 |
| $C'_{4,3}(a)$ | + | +   | 0        | -   | -        | -   | 0        | +   | +        | +   | + |
| $C_{4,3}(a)$  | 0 | ↗   |          | ↘   | 0        | ↘   |          | ↗   | 0        | ↗   |   |

|               |   |     |          |     |          |     |          |     |          |     |   |
|---------------|---|-----|----------|-----|----------|-----|----------|-----|----------|-----|---|
| $a$           | 0 | ... | 0.162... | ... | 0.240... | ... | 0.588... | ... | 0.759... | ... | 1 |
| $C'_{4,4}(a)$ | + | +   | 0        | -   | -        | -   | 0        | +   | +        | +   | + |
| $C_{4,4}(a)$  | 0 | ↗   |          | ↘   | 0        | ↘   |          | ↗   | 0        | ↗   |   |



## 3.2 方法 2

区間  $(-4, -3)$  に対する Hurwitz ゼータ関数  $\zeta(s, a)$  の実零点の一意性を, 定理 4 を用いて示す.

条件  $B_4(a)B_5(a) < 0$  を仮定する. このとき, Hurwitz ゼータ関数  $\zeta(s, a)$  は区間  $(-4, -3)$  において奇数個の実零点をもつ. ここで, 区間  $(0, 1)$  における  $B_4(a)$  の 2 つの根を  $b_{4,1}, b_{4,2}$  とおく ( $b_{4,1} = 0.2403\dots < b_{4,2} = 0.796\dots$ ). すると, 条件  $B_4(a)B_5(a) < 0$  は  $b_{4,1} < a < 1/2, b_{4,2} < a < 1$  であることがわかる.

まず,  $1/4 \leq a < 1/2, b_{4,2} < a < 1$  の場合について考える. このとき, Spira の定理 (定理 4) より区間  $(-4, -3)$  を含むような幅 2 の区間において Hurwitz ゼータ関数の実零点はただ一つであることがわかる. 従ってこの場合, 区間  $(-4, -3)$  において実零点はただ一つである.

次に,  $b_{4,1} < a < 1/4$  の場合について考える. Spira の定理より Hurwitz ゼータ関数の実零点は区間  $(-4, -3)$  において高々 2 個の実零点を持つことがわかる. しかし, 条件  $B_4(a)B_5(a) < 0$  より奇数個の実零点を持つことがわかっていたため, 区間  $(-4, -3)$  において実零点はただ一つであることが示された.

## 4 今後の課題

3.1 節において考察した多項式列  $C_{N,m}(a)$  の零点の位置について以下のような問題が考えられる. 多項式  $C_{N,m}(a)$  ( $N \in \mathbb{Z}_{\geq 1}, 0 \leq m \leq N$ ) の  $0 < a < 1$  における零点を  $c_{N,m,j}$  とする. このとき  $N, j$  を決めるごとに,  $c_{N,i,j} < c_{N,i+1,j}$  ( $\forall i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ) が成り立つか. という問題である.

これについて, Mathematica を用いて零点を求めることで, その位置関係を確認したところ  $N = 20$  まで成り立つことが確認できた. さらに,  $0 < a < 1$  と  $a$  の範囲を限定せずに,  $0 < a$  としても零点の位置は同様の並び方をしていることが  $N = 20$  まで確認できた. しかし, 一般の  $N$  に対して成り立つかどうかは未だ証明できていない.

## 謝辞

2023 年度 RIMS 共同研究 (公開型) 「解析的整数論とその周辺」での講演の機会を与えて下さった, 安福 悠先生 (日本大学), 中筋 麻貴先生 (上智大学/東北大学) に感謝申し上げます.

## 参考文献

- [1] T. Arakawa, T. Ibukiyama, and M. Kaneko, Bernoulli numbers and zeta functions, Springer Monogr. Math., Springer, Tokyo, 2014.
- [2] K. Endo and Y. Suzuki, Real zeros of Hurwitz zeta-functions and their asymptotic behavior in the interval  $(0, 1)$ , J. Math. Anal. Appl., **473** (2019), no.2, 624–635.

- [3] K. Ikeda, On real zeros of the Hurwitz zeta function, *J. Number Theory*, **258** (2024), 269–280.
- [4] T. Matsusaka, Real zeros of the Hurwitz zeta function, *Acta Arith.*, **183** (2018), no.1, 53–62.
- [5] T. Nakamura, Real zeros of Hurwitz-Lerch zeta and Hurwitz-Lerch type of Euler-Zagier double zeta functions, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **160** (2016), no.1, 39–50.
- [6] T. Nakamura, Real zeros of Hurwitz-Lerch zeta functions in the interval  $(-1, 0)$ , *J. Math. Anal. Appl.*, **438** (2016), 42–52.
- [7] R. Spira, Zeros of Hurwitz zeta functions, *Math. Comp.*, **30** (1976), no.136, 863–866.
- [8] 池田香凜, On real zeros of the Hurwitz zeta function, 「第 16 回数論女性の集まり」報告集, 2023 年 10 月.