# 熱音響境界層の外縁速度の計算法

## A computational method for evaluation of a velocity at the edge of a thermoacoustic boundary layer

大阪大学 · 大学院工学研究科　杉 本 信 正
Nobumasa SUGIMOTO
*Graduate School of Engineering, Osaka University*

福井工業大学・工学部　清 水　大
Dai SHIMIZU
*Faculty of Engineering, Fukui University of Technology*

### 1. はじめに

管の中を伝播する音[†]の減衰は音自身の拡散によるものではなく，管壁に生じる境界層によるところが大きい．境界層の厚さは高々1 mm 程度で極めて薄く，その外部のコア領域への影響は境界層外縁での壁に垂直な内向き速度成分 $v_b$ を通して現れる．コア領域の音圧を $p'$ とすれば，境界層は $p'v_b$ を通してコア領域に仕事をすることになる．通常は逆にコア領域が境界層に仕事をする（時間平均的に）ために音はエネルギーを失い減衰するが，管壁の温度が軸方向に一様でないときには増幅される場合がある．このようなアクティブに作用する境界層が多く広がっていると，気柱全体が不安定化し最終的に自励振動が発生する．これは熱音響現象として知られている．

境界層外縁速度 $v_b$ は，コア領域の軸方向の速度 $u'(x,t)$ の $-\frac{1}{2}$ 階微分で表される履歴積分によって与えられる [1]:

$$v_b = \sqrt{\nu_e}\frac{\partial^{-\frac{1}{2}}}{\partial t^{-\frac{1}{2}}}\Big(C\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{C_T}{T_e}\frac{\mathrm{d}T_e}{\mathrm{d}x}u'\Big). \tag{1}$$

ここで，$x$ と $t$ は軸方向の座標と時間であり，$u'(x,t)$ の $-\frac{1}{2}$ 階微分は以下のように定義される [2]：

$$\frac{\partial^{-\frac{1}{2}}u'}{\partial t^{-\frac{1}{2}}} \equiv \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{t}\frac{u'(x,\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\mathrm{d}\tau. \tag{2}$$

式 (1) の $\nu_e$ は温度 $T_e$ での動粘性率を表し，$C$ および $C_T$ は後に (3.12) で与える定数である．コア領域において $v_b$ を考慮すると音の伝播の波動方程式は微積分方程式になる．

この方程式の初期値問題を数値計算によって解くには，$u'$ の初期からの履歴を保存しておく必要ある．しかし，物理的には緩和関数である積分核 $1/\sqrt{t-\tau}$ が，$t-\tau$ が大きくなっても速やかに減衰しないので，保存するデータ量が時間とともに多くなる．このため周期の数千倍やそれ以上の長時間の振る舞いを求めるのは計算容量の面からから難しくなる．もし $u'$ が時間的に周期変動するときには，過去に $\tau$ ($\ll t$) 遡った時点での $1/\sqrt{t-\tau}$ の値を $1/\sqrt{t}$ と近似すると周期ごとの積分はゼロになり，遠い過去からの寄与は小さい．したがって，全てのデータを保存する方法は有用ではない．

ところで，外縁速度に履歴が現れるが，境界層内の音場では速度や温度の空間勾配による粘性拡散と温度拡散が起きているだけであり，履歴は表だっては何ら見えない．履歴はせん断応力や

[†]空気中の可聴周波数域の平面波を想定している

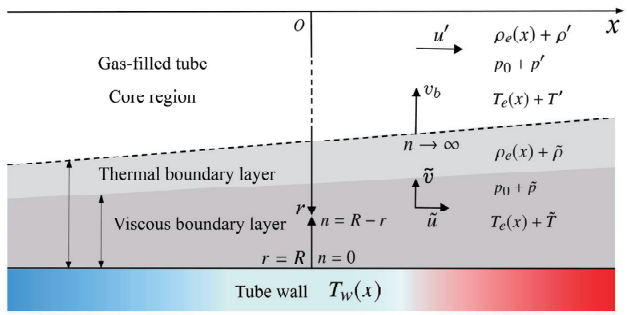


**図 1:** 壁面温度が軸方向に一様でない円形断面の管路中の気体内の音場．音場は壁面付近の境界層（拡大され描かれている）とその外部のコア領域とに分けられる．境界層は粘性境界層と温度境界層からなり，壁面に温度勾配があると温度境界層に粘性境界層が影響する．壁面温度 $T_w$ が軸 $x$ 方向に緩やかに変化しているときには，静止状態（一様な圧力を $p_0$ とする）の気体の温度 $T_e$ は断面内で一様であり，$T_w$ に等しくおける．記号 $\tilde{(\cdot)}$ と $(\cdot)'$ はそれぞれ境界層およびコア領域での密度，温度，圧力および速度の静止状態での値からの撹乱を表す．

熱流ベクトルの運動量やエネルギーのフラックスに内在している．境界層は薄いのでフラックスは主に厚さ方向にあり，外縁速度の履歴は，連続の式を境界層の厚さ方向に塗りつぶして次元を下げた結果，フラックスが表に現れたとも見ることができる．

外縁速度を得るには履歴積分を正面から評価することを避けて，むしろ境界層方程式を解いて求める方が計算時間を節約できる可能性がある．本報告ではその計算法を紹介し，有用性を確かめる．なお，本報告を含む内容は 2024 年 1 月に論文 [3] に掲載されているので，詳細はそちらを参照されたい．

## 2. 境界層外縁速度の導出

### 2.1 コア領域と境界層での方程式

円形断面の十分長い管の中に，一様な圧力 $p_0$ の下に静止した理想気体を考える．図 1 に示すように軸方向に $x$ 軸をとり，その方向にのみ壁の温度 $T_w(x)$ が一様でないとする．ただし，重力は無視する．管の半径 $R$ が温度変化の代表長さ $L$ に比して十分小さいとする “細管近似” を施すと，静止気体の温度 $T_e$ は壁面温度 $T_w$ に等しく，断面内で一様と見なせる [1]．このとき気体の密度 $\rho_e$ も断面内で一様とみなせ，一様な圧力下では $\rho_e(x)$ は $\rho_e T_e = \rho_0 T_0$ の関係より決まる．ただし，添字 0 はある基準状態での値とする．

このような温度勾配のある管の中を伝播する平面波を考える．コア領域では粘性や熱伝導性による音の拡散が無視できるとする．これは音響レイノルズ数 $a^2/\nu\omega$ が十分大きいことから保証される．ここで，$a, \nu, \omega$ はそれぞれ音速，動粘性率，代表角周波数である．

連続の式，軸方向の運動方程式，エネルギー式および状態方程式をコア領域の断面にわたり平均すると，次の方程式が導かれる [4]：

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_e u') = \frac{2}{R}\rho_e v_b, \tag{2.1a}$$

$$\rho_e \frac{\partial u'}{\partial t} = -\frac{\partial p'}{\partial x}, \tag{2.1b}$$

$$\rho_e c_p\Big(\frac{\partial T'}{\partial t}+u'\frac{\mathrm{d}T_e}{\mathrm{d}x}\Big)=\frac{\partial p'}{\partial t}, \tag{2.1c}$$

$$\frac{p'}{p_0}=\frac{\rho'}{\rho_e}+\frac{T'}{T_e}. \tag{2.1d}$$

ここで，$\rho'$, $u'$, $p'$, $T'$ はそれぞれ，コア領域の断面にわたり平均した密度，$x$ 方向の速度，圧力，温度の撹乱を表し，$v_b$ は境界層外縁での半径方向内向きの速度成分を表す．この大きさは $|u'|$ に比べては十分小さい．また，$c_p$ は定圧比熱である．

コア領域の平面波は壁面での粘着条件や等温条件を満足できないため，壁面近傍では拡散が無視できない薄い境界層が出現する．境界層内でも撹乱が小さいとして線形近似できるとし，境界層近似を導入すると，連続の式，運動方程式，エネルギー式および気体の状態方程式はそれぞれ以下のようになる [5]：

$$\frac{\partial\tilde{\rho}}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\rho_e\tilde{u})+\frac{\partial}{\partial n}(\rho_e\tilde{v})=0, \tag{2.2a}$$

$$\rho_e\frac{\partial\tilde{u}}{\partial t}=-\frac{\partial\tilde{p}}{\partial x}+\mu_e\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial n^2}, \tag{2.2b}$$

$$0=-\frac{\partial\tilde{p}}{\partial n}, \tag{2.2c}$$

$$\rho_e c_p\Big(\frac{\partial\tilde{T}}{\partial t}+\tilde{u}\frac{\mathrm{d}T_e}{\mathrm{d}x}\Big)=\frac{\partial\tilde{p}}{\partial t}+k_e\frac{\partial^2\tilde{T}}{\partial n^2}, \tag{2.2d}$$

$$\frac{\tilde{p}}{p_0}=\frac{\tilde{\rho}}{\rho_e}+\frac{\tilde{T}}{T_e}. \tag{2.2e}$$

ここで，$n$ $(=R-r)$（$r$ は管の半径方向座標) は壁面から垂直に境界層内にとった座標であり，境界層近似により $|\partial/\partial x|\ll|\partial/\partial n|$ とみなす．変数 $\tilde{\rho}$, $\tilde{u}$, $\tilde{v}$, $\tilde{p}$, $\tilde{T}$ はそれぞれ，境界層内での密度，軸方向速度，$n$ 方向速度，圧力，温度の撹乱を表し，$x$, $t$, $n$ の関数である．式 (2.2c) より $\tilde{p}$ は境界層内では変化せず，境界層外縁でコア領域での圧力に等しいことから，$\tilde{p}=p'$ となる．これは境界層近似のよく知られた結果である．また，$\mu_e$, $k_e$ はそれぞれ温度 $T_e$ でのせん断粘性率および熱伝導率であり，これらの温度依存性は次の指数則に従うものとする：

$$\frac{\mu_e}{\mu_0}=\frac{k_e}{k_0}=\Big(\frac{T_e}{T_0}\Big)^{\beta}. \tag{2.3}$$

ここで，$\beta$ は 0.5 から 0.7 の間の定数とする．

### 2.2. 境界層内の欠損量に対する方程式と外縁速度

境界層の方程式を解くのに，境界層内の各変数をコア領域での値 $(\cdot)'$ とそれらからの欠損量 $\check{(\cdot)}$ との和の形で求める．そこで以下の置き換えを行う：

$$(\tilde{\rho},\tilde{u},\tilde{v},\tilde{p},\tilde{T})=(\rho'+\check{\rho},u'+\check{u},\check{v},p'+\check{p},T'+\check{T}). \tag{2.4}$$

ここで，欠損量は粘性や熱伝導性による渦度やエントロピーの生成によるものである．コア領域では境界層の影響は小さくほぼ平面波を仮定し，断面平均量を考えているので半径方向速度は最低次ではゼロである[‡]．また圧力 $p'$ は境界層内にも侵入するので $\check{p}$ はゼロである．以上の置き換え

[‡] コア領域の半径方向速度 $v'$ は $v_b$ と同程度に小さく，$v_b$ が求まった後に決定される．

を方程式 (2.2) に導入し，コア領域の方程式 (2.1) を考慮すると，欠損量に対して次の方程式が導かれる：

$$\frac{\partial \check{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_e \check{u}) + \frac{\partial}{\partial n}(\rho_e \check{v}) = 0, \tag{2.5a}$$

$$\rho_e \frac{\partial \check{u}}{\partial t} = \mu_e \frac{\partial^2 \check{u}}{\partial n^2}, \tag{2.5b}$$

$$\rho_e c_p \Big( \frac{\partial \check{T}}{\partial t} + \check{u} \frac{\mathrm{d}T_e}{\mathrm{d}x} \Big) = k_e \frac{\partial^2 \check{T}}{\partial n^2}, \tag{2.5c}$$

$$\frac{\check{\rho}}{\rho_e} + \frac{\check{T}}{T_e} = 0. \tag{2.5d}$$

方程式 (2.5b) と (2.5c) は $\check{u}$ と $\check{T}$ について閉じており，一方 $\check{\rho}$ は，欠損量に対する等圧変化を示す (2.5d) より，$\check{T}$ によって直ぐに求まる．また，$\check{v}$ は (2.5a) を $n$ について積分すれば求めることができる．

速度と温度は壁面 ($n = 0$) での粘着および等温の境界条件を満たさなければならない：

$$u' + \check{u} = 0,\ \check{v} = 0,\quad T' + \check{T} = 0 \quad \text{at } n = 0. \tag{2.6}$$

一方，境界層外縁 ($n \to \infty$) では，速度と温度はコア領域での値にそれぞれ繋がらなければならない．よって接続条件として次の条件を課す：

$$\check{u} \to 0 \quad \check{T} \to 0 \quad \text{as } n \to \infty. \tag{2.7}$$

以上より，境界層内の撹乱を求めるには，方程式 (2.5b) と (2.5c) をまず解く必要がある．最初に次の無次元化を行う：

$$\begin{aligned} (n,\, x,\, t) &= (\sqrt{\nu_e/\omega}\,\eta,\ LX,\ \tau/\omega), \\ (u',\, T';\, \check{u},\, \check{T}) &= (\varepsilon a_0 U,\, \varepsilon T_e \Theta;\, \varepsilon a_0 \check{U},\, \varepsilon T_e \check{\Theta}). \end{aligned} \tag{2.8}$$

ここで，$\eta$, $X$, $\tau$ をそれぞれ，粘性境界層の代表厚さ $\sqrt{\nu_e/\omega}$，$x$ 方向の代表長さ $L$ および代表時間 $\omega^{-1}$ で無次元化された境界層内の半径方向座標，軸座標および時間とする．また，$a_0$ は基準状態での音速を表し，微小パラメータ $\varepsilon$ は速度の音速に対する比の程度を表す．しかし，線形近似をしているので，$\varepsilon$ は任意のスケールファクターの意味しかなく，今後は無視して進める．

無次元化により方程式 (2.5b) と (2.5c) はそれぞれ

$$\frac{\partial \check{U}}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \check{U}}{\partial \eta^2}, \tag{2.9}$$

$$\frac{\partial \check{\Theta}}{\partial \tau} + \frac{\check{U}}{T_e} \frac{\mathrm{d}T_e}{\mathrm{d}X} = \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 \check{\Theta}}{\partial \eta^2} \tag{2.10}$$

($0 < \eta < \infty$) となる．ここで，$Pr$ はプラントル数 $\nu_e/\kappa_e$ を表す．境界条件および接続条件は，

$$\check{U} = -U,\quad \check{\Theta} = -\Theta \quad \text{at } \eta = 0, \tag{2.11}$$

$$\check{U} \to 0,\quad \check{\Theta} \to 0 \quad \text{as } \eta \to \infty \tag{2.12}$$

となる．

速度の欠損量 $\check{U}$ は粘性拡散による通常の熱伝導方程式 (2.9) に支配される一方，温度の欠損量 $\check{\Theta}$ は温度勾配による移流を伴った熱伝導方程式 (2.10) に支配される．このため温度境界層には温度拡散に加え粘性拡散が関与する．このような二層構造の境界層を熱音響境界層と呼んでいる．

境界層外縁速度 $v_b$ は式 (2.5a) を $n$ について壁面 $(n=0)$ から外縁 $(n\to\infty)$ まで積分することによって求まる:

$$v_b = -\sqrt{\frac{\nu_e}{\omega}}\int_0^\infty \frac{\partial \check{u}}{\partial x}\mathrm{d}\eta - \kappa_e\sqrt{\frac{\omega}{\nu_e}}\frac{\partial}{\partial\eta}\Big(\frac{\check{T}}{T_e}\Big)\Big|_{\eta=0}. \tag{2.13}$$

ここで，$\check{u}(n,x,t)$ を $a_0\check{U}(\eta,X,\tau)$ で置き換えると，$\eta$ は $\sqrt{\nu_e}$ を含んでいるので $x$ とは独立でないことに注意する．よって $\partial\check{u}/\partial x$ は以下のように計算される：

$$\frac{\partial\check{u}}{\partial x} = a_0\frac{\partial\check{U}}{\partial\eta}\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{n}{\sqrt{\nu_e/\omega}}\Big)+a_0\frac{\partial\check{U}}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{a_0}{L}\Big(-\frac{1+\beta}{2T_e}\frac{\mathrm{d}T_e}{\mathrm{d}X}\eta\frac{\partial\check{U}}{\partial\eta}+\frac{\partial\check{U}}{\partial X}\Big). \tag{2.14}$$

ここで，$\sqrt{\nu_e}\,\mathrm{d}(\sqrt{\nu_e}^{-1})/\mathrm{d}x = -[(1+\beta)/2T_e]\mathrm{d}T_e/\mathrm{d}x$ である．

この式を用い，$\check{U}$ が遠方で $\eta^{-1}$ より速くゼロになるとして（後に確認できる）

$$\int_0^\infty \eta\frac{\partial\check{U}}{\partial\eta}\mathrm{d}\eta = -\int_0^\infty \check{U}\mathrm{d}\eta \tag{2.15}$$

の関係を用いると，$v_b$ は $\check{U}$ と $\check{\Theta}$ とによって次のように与えられる：

$$v_b = -\sqrt{\frac{\nu_e a_0}{L}}\Big[\frac{1+\beta}{2T_e}\frac{\mathrm{d}T_e}{\mathrm{d}X}\int_0^\infty\check{U}\mathrm{d}\eta+\int_0^\infty\frac{\partial\check{U}}{\partial X}\mathrm{d}\eta+\frac{1}{Pr}\frac{\partial\check{\Theta}}{\partial\eta}\Big|_{\eta=0}\Big]. \tag{2.16}$$

式 (2.13) の $\eta$ を $n$ に戻し，$v_b$ を時間 $t$ で微分すると，第 1 項の $\partial\check{u}/\partial t$ は式 (2.5b) より $n$ の微分で置き換えられ積分できる．これは気体が壁面からうけるせん断応力 $\sigma_x$ $(=-\mu_e\partial\check{u}/\partial n|_{n=0})$ であり，第 2 項は壁面からの熱流 $q$ $(=-k_e\partial\check{T}/\partial n|_{n=0})$ である．よって

$$\frac{\partial v_b}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\sigma_x}{\rho_e}\Big)+\frac{1}{\rho_e c_p T_e}\frac{\partial q}{\partial t} \tag{2.17}$$

と書ける．せん断応力や熱流は速度や温度の $+\frac{1}{2}$ 階微分（$-\frac{1}{2}$ 階微分をもう一度微分した量）で表されるので，$v_b$ はフラックスと関係していることが分かる．

## 3. ベンチマーク問題と解析解

数値計算法の有効性を確かめるために，解が解析的に求まるベンチマーク問題を解いて，解析解に照らして方法や結果の精度を検討する．静止している気体が $\tau=0$ で軸方向にインパルスを受け，突然動き出す問題を想定する．コア領域では速度が

$$U = A(X)\cos(\Omega\tau)h(\tau) \tag{3.1}$$

で与えられるとする．ここで，$h(\tau)$ はステップ関数である．このとき温度は (2.1c) より

$$\Theta = -\frac{A}{\Omega}c_1\sin(\Omega\tau)h(\tau) \tag{3.2}$$

によって与えられる．ただし，$v_b$ の影響は無視している．ここで，$c_1$ は

$$c_1 = \frac{\gamma-1}{A}\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}X}+\frac{1}{T_e}\frac{\mathrm{d}T_e}{\mathrm{d}X} \tag{3.3}$$

である．仮定した解が (2.1) の方程式を満たさなければならないことから，振幅 $A$ は次式を満たす必要がある：

$$\Omega^2 A + \frac{a_e^2}{a_0^2}\frac{\mathrm{d}^2 A}{\mathrm{d}X^2} = 0. \tag{3.4}$$

ここで，$a_e(X)$ は温度 $T_e$ での音速であり，$a_e = \sqrt{\gamma p_0/\rho_e}$ で与えられ，$a_0$ は基準状態での音速である．よって $a_e^2/a_0^2 = T_e/T_0$ の関係が成り立つ．式 (3.4) は速度に対する波動方程式に他ならない．

コア領域での速度と温度を指定したことにより，欠損量 $\check{U}$ および $\check{\Theta}$ に対する初期値・境界値問題が設定される．解法の詳細 [3] は省くが，初期値問題であるのでラプラス変換・逆変換を用いると，$\check{U}$ は次のように求まる：

$$\check{U} = -A\big[\Psi_c(Y,\eta)\cos(\Omega\tau) + \Psi_s(Y,\eta)\sin(\Omega\tau)\big]. \tag{3.5}$$

ここで，$\Psi_c$ および $\Psi_s$ は次のように定義される $Y$ $(= \eta/\sqrt{4\tau})$ と $\eta$ との関数である：

$$\Psi_c(Y,\eta) \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_Y^\infty \mathrm{e}^{-z^2}\cos\Big(\frac{\Omega\eta^2}{4z^2}\Big)\mathrm{d}z, \tag{3.6a}$$

$$\Psi_s(Y,\eta) \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_Y^\infty \mathrm{e}^{-z^2}\sin\Big(\frac{\Omega\eta^2}{4z^2}\Big)\mathrm{d}z. \tag{3.6b}$$

この関数は誤差関数とフレネル積分のハイブリッドの関数である．

一方，$\check{\Theta}$ は移流項があるので計算は少し面倒になるが，$\check{U}$ と同じく $\Psi_c$ および $\Psi_s$ を用いて $Y_P$ $(= \sqrt{Pr}\eta/\sqrt{4\tau})$ と $\eta$ により次のように求まる：

$$\begin{aligned}\check{\Theta} = \frac{A}{\Omega}\Big\{&c_2\big[\Psi_c(Y_P,\eta_P)\sin(\Omega\tau) - \Psi_s(Y_P,\eta_P)\cos(\Omega\tau)\big]\\ &-c_3\big[\Psi_c(Y,\eta)\sin(\Omega\tau) - \Psi_s(Y,\eta)\cos(\Omega\tau)\big]\Big\}.\end{aligned} \tag{3.7}$$

ここで，$c_2$ と $c_3$ はそれぞれ以下のように定義される：

$$c_2 = \frac{(\gamma-1)}{A}\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}X} + \frac{1}{(1-Pr)T_e}\frac{\mathrm{d}T_e}{\mathrm{d}X}, \tag{3.8a}$$

$$c_3 = \frac{Pr}{(1-Pr)T_e}\frac{\mathrm{d}T_e}{\mathrm{d}X}. \tag{3.8b}$$

これら解の $\tau \to \infty$ での漸近解を示す．ただし，$\eta$ を固定して，$Y$ および $Y_P$ がゼロに漸近する場合を考える．このとき，$\eta \ll \sqrt{4\tau}$ に対して，

$$\check{U} = -A\mathrm{e}^{-\sqrt{\Omega/2}\,\eta}\cos\phi + \ldots \tag{3.9}$$

となる，ただし，$\phi = \Omega\tau - \sqrt{\Omega/2}\,\eta$ である．一方，$\check{\Theta}$ も $\eta \ll \sqrt{4\tau/Pr}$ に対して

$$\check{\Theta} = \frac{A}{\Omega}\Big(c_2\mathrm{e}^{-\sqrt{Pr\Omega/2}\,\eta}\sin\phi_P - c_3\mathrm{e}^{-\sqrt{\Omega/2}\,\eta}\sin\phi\Big) + \ldots \tag{3.10}$$

となる．ただし，$\phi_P = \Omega\tau - \sqrt{Pr\Omega/2}\,\eta$ である．これらより，欠損量は壁からコア領域に向かって減衰振動しながら伝播することが分かる．

解が求まったので境界層外縁速度は (2.16) から求まる．ラプラス変換を $\hat{(\cdot)}$ で表すと，$\hat{v_b}$ は $\hat{U}$ によって

$$\hat{v_b} = \sqrt{\frac{\nu_e a_0}{L}}\Big[C\frac{\partial}{\partial X}(s^{-\frac{1}{2}}\hat{U}) + \frac{C_T}{T_e}\frac{\mathrm{d}T_e}{\mathrm{d}X}s^{-\frac{1}{2}}\hat{U}\Big] \tag{3.11}$$

で与えられる [3]．ただし，$s$ は変換パラメータで，$C$ および $C_T$ は次式で与えられる定数である：

$$C = 1 + \frac{\gamma - 1}{\sqrt{Pr}},\quad C_T = \frac{1+\beta}{2} + \frac{1}{\sqrt{Pr} + Pr}. \tag{3.12}$$

式 (3.11) の $s^{-\frac{1}{2}}$ の逆変換が $1/\sqrt{\pi\tau}$ であることを用いると，畳み込みの定理より，$v_b$ は

$$v_b = \sqrt{\frac{\nu_e a_0}{L}}\Big(C\frac{\partial}{\partial X} + \frac{C_T}{T_e}\frac{\mathrm{d}T_e}{\mathrm{d}X}\Big)\frac{\partial^{-\frac{1}{2}}U}{\partial\tau^{-\frac{1}{2}}} \tag{3.13}$$

と表せ，有次元に戻せば式 (1) となる．ここで，$\partial^{-\frac{1}{2}}U/\partial\tau^{-\frac{1}{2}}$ は $U$ の $-\frac{1}{2}$ 階微分であり，

$$\begin{aligned}\frac{\partial^{-\frac{1}{2}}}{\partial\tau^{-\frac{1}{2}}}\cos(\Omega\tau)h(\tau) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\tau \sigma^{-\frac{1}{2}}\cos[\Omega(\tau-\sigma)]\mathrm{d}\sigma \\ &= \sqrt{\frac{2}{\Omega}}\Big[C(\psi)\cos(\Omega\tau) + S(\psi)\sin(\Omega\tau)\Big]\end{aligned} \tag{3.14}$$

である．ここで，$\psi = \sqrt{2\Omega\tau/\pi}$ であり，$C(\psi)$ および $S(\psi)$ はフレネル積分を表し，$\psi\to\infty$ で $\frac{1}{2}$ に漸近する．そこで，式 (3.14) の右辺を

$$\mathrm{RHS} = \frac{1}{\sqrt{\Omega}}\cos\big(\Omega\tau - \tfrac{\pi}{4}\big) - \sqrt{\frac{2}{\Omega}}\Big\{\big[\tfrac{1}{2} - C(\psi)\big]\cos(\Omega\tau) + \big[\tfrac{1}{2} - S(\psi)\big]\sin(\Omega\tau)\Big]\Big\} \tag{3.15}$$

と表すと，時間が経過すると第 1 項だけが残る．これは位相が $\pi/4$ だけ遅れた定常応答である．第 2 項の過渡応答は $\tau^{-\frac{3}{2}}$ で小さくなる．初期値の影響は $\pi/4$ の位相遅れにのみ残る．

## 4. 数値計算法と計算結果

### 4.1. チェビシェフ多項式による級数展開

ベンチマーク問題は $\eta$ の半無限領域で与えられているので，次の変換によりまず有限領域に変換する [6]：

$$\xi = 1 - 2\mathrm{e}^{-\alpha\eta}. \tag{4.1}$$

ここで，$\alpha$ は適当な正の定数である．以下においては，$\eta\to\infty$ での漸近解 (3.9) および (3.10) を参考に，$\alpha$ を $\sqrt{Pr\Omega/2}$ と選ぶ．

変換 (4.1) により，壁面 $\eta = 0$ と無限遠方 $\eta\to\infty$ の半無限区間が $-1 < \xi < +1$ の有限区間に変換される．一方，方程式 (2.9), (2.10) はそれぞれ以下のように変換される：

$$\frac{\partial\check{U}}{\partial\tau} = \alpha^2\Big[(1-\xi)^2\frac{\partial^2\check{U}}{\partial\xi^2} - (1-\xi)\frac{\partial\check{U}}{\partial\xi}\Big], \tag{4.2}$$

$$\frac{\partial\check{\Theta}}{\partial\tau} + \frac{\check{U}}{T_e}\frac{\mathrm{d}T_e}{\mathrm{d}X} = \frac{\alpha^2}{Pr}\Big[(1-\xi)^2\frac{\partial^2\check{\Theta}}{\partial\xi^2} - (1-\xi)\frac{\partial\check{\Theta}}{\partial\xi}\Big]. \tag{4.3}$$

次に $\check{U}$, $\Theta$ を $n$ 次の第 1 種チェビシェフ多項式 $T_n(\xi)$ による級数に展開する：

$$\check{U} = \sum_{j=0}^{N} a_j(\tau, X)\, T_j(\xi), \tag{4.4}$$

$$\check{\Theta} = \sum_{j=0}^{N} b_j(\tau, X)\, T_j(\xi). \tag{4.5}$$

ここで，$N$ は正の整数であり，係数 $a_j$ と $b_j$ は $\check{U}$ と $\check{\Theta}$ が (4.2) および (4.3) を近似的に満たすようにチェビシェフ多項式の直交性

$$\int_{-1}^{1} T_i(\xi)T_j(\xi)\frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} = \begin{cases} 0 & \text{if } i \neq j, \\ \pi & \text{if } i = j = 0, \\ \pi/2 & \text{if } i = j \neq 0, \end{cases} \tag{4.6}$$

$(i, j = 0, 1, 2, \ldots N)$ を用いて決定する．これより $a_j$, $b_j$ は次の微分方程式を満たさなければならない：

$$\frac{\partial a_0}{\partial \tau} = -\alpha^2 \sum_{j=0}^{N} f_{0,j} a_j, \tag{4.7a}$$

$$\frac{\partial a_i}{\partial \tau} = -2\alpha^2 \sum_{j=0}^{N} f_{i,j} a_j, \tag{4.7b}$$

$(i = 1, 2, \ldots, N)$, および

$$\frac{\partial b_0}{\partial \tau} = -\frac{a_0}{T_e}\frac{\mathrm{d}T_e}{\mathrm{d}X} - \frac{\alpha^2}{Pr}\sum_{j=0}^{N} f_{0,j} b_j, \tag{4.8a}$$

$$\frac{\partial b_i}{\partial \tau} = -\frac{a_i}{T_e}\frac{\mathrm{d}T_e}{\mathrm{d}X} - \frac{2\alpha^2}{Pr}\sum_{j=0}^{N} f_{i,j} b_j, \tag{4.8b}$$

$(i = 0, 1, 2, \ldots, N)$. ここで，$f_{i,j}$ $(i, j = 0, 1, 2, \ldots N)$ は方程式 (4.2), (4.3) の右辺の積分より生じ，$f_{i,j}$ は次式で与えられる：

$$f_{i,j} = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{1-\xi}{1+\xi}\left(\frac{\mathrm{d}T_j}{\mathrm{d}\xi} + j^2 T_j\right)\frac{T_i}{\sqrt{1-\xi^2}}\mathrm{d}\xi. \tag{4.9}$$

変数変換 $\xi = \cos\theta$ を行うと，$T_j = \cos(j\theta)$ となるので, $f_{i,j}$ は

$$f_{i,j} = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\left[\frac{j\sin(j\theta)}{\sin\theta} + j^2\cos(j\theta)\right]\cos(i\theta)\mathrm{d}\theta \tag{4.10}$$

とも表せる．被積分関数は下限ではゼロになる一方，上限では有限値 $(-1)^{i+j+1}(2j^2 + 4j^4)/3\pi$ をとるが，$j$ と共に急激に増加する．

表 1 は $f_{i,j}$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, 10,\ j = 1, 2, 3, \ldots, 10)$ の値を示す．式 (4.10) より $j = 0$ では $f_{i,0} = 0$ である．これより $f_{i,j}$ は上三角行列であることが分かる．また，$f_{i,j}$ の間には

$$f_{0,j} + 2\sum_{i=1}^{N} f_{i,j} = 0 \tag{4.11}$$

**表 1:** 係数 $f_{i,j}$ の値を $i = 0, 1, 2, \ldots, 10$，$j = 1, 2, 3, \ldots, 10$ に対して示す．ここで .5 は $\frac{1}{2}$ を意味する．

| | $j=1$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $i=0$ | 1 | −8 | 27 | −64 | 125 | −216 | 343 | −512 | 729 | −1000 |
| 1 | −0.5 | 6 | −24 | 60 | −120 | 210 | −336 | 504 | −720 | 990 |
| 2 | 0 | −2 | 15 | −48 | 105 | −192 | 315 | −480 | 693 | −960 |
| 3 | 0 | 0 | −4.5 | 28 | −80 | 162 | −280 | 440 | −648 | 910 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | −8 | 45 | −120 | 231 | −384 | 585 | −840 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | −12.5 | 66 | −168 | 312 | −504 | 750 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | −18 | 91 | −224 | 405 | −640 |
| 7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | −24.5 | 120 | −288 | 510 |
| 8 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | −32 | 153 | −360 |
| 9 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | −40.5 | 190 |
| 10 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | −50 |

が成り立つ．以上の関係は $N > 10$ の任意の場合においても成り立つことが予想され，そのとき $f_{i,j}$ は上三角行列になる．式 (4.11) を (4.7), (4.8) に用いると

$$\frac{\partial}{\partial t}\sum_{i=0}^{N} a_i = 0 \quad \text{および} \quad \frac{\partial}{\partial t}\sum_{i=0}^{N} b_i = 0 \tag{4.12}$$

が成り立つ．

次に境界条件および接続条件を考える．壁面での条件は $T_j(-1) = (-1)^j$ より

$$\sum_{j=0}^{N}(-1)^j a_j = -U \quad \text{at} \quad \xi = -1, \tag{4.13a}$$

$$\sum_{j=0}^{N}(-1)^j b_j = -\Theta \quad \text{at} \quad \xi = -1 \tag{4.13b}$$

となる．接続条件は $T_j(1) = 1$ より

$$\sum_{j=0}^{N} a_j = 0 \quad \text{at} \quad \xi = 1, \tag{4.14a}$$

$$\sum_{j=0}^{N} b_j = 0 \quad \text{at} \quad \xi = 1 \tag{4.14b}$$

となる．方程式 (4.7), (4.8) に対してこれらの条件を課すと条件過多になるので，$j = N-1$ と $j = N$ の方程式を無視し，$a_j$, $b_j$ $(j = N-1, N)$ の値は (4.13) および (4.14) より求める．微分方程式の解法には刻み幅自動調整機能付きの Runge-Kutta-Fehlberg 法 [7] を用いる．なお，初期に (4.14) であれば，(4.12) によって以後成り立つはずであるが，計算では誤差の影響が考えられるので (4.14）を常に課す．

### 4.2. 数値計算結果

ベンチマーク問題を $N$ を $N = 8$ から変化させて解いて，収束の様子を調べる．ここでは $N = 16$ の場合を述べる．変数 $X$ の影響はパラメータとして現れ，係数は $X$ の関数である．そこで一般性

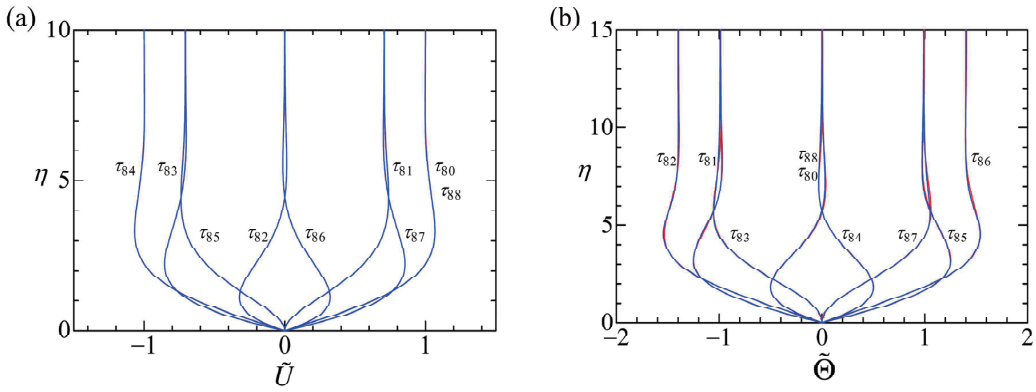


**図 2:** 速度および温度の撹乱 $\tilde{U}$ と $\tilde{\Theta}$ の $\eta$ 方向の分布をそれぞれ (a) および (b) に示す．曲線は時刻 $\tau$ が 10 周期目から 11 周期目まで 1/8 周期ごと ($\tau_k = 2\pi k/8, k = 80, 81, 82, \ldots, 88$) の波形を示し，赤と青の線はそれぞれ解析解と数値解を示す．

を失うことなく $A = 1$ とおき，振幅や温度勾配が 1 になる位置を選ぶ：

$$\frac{1}{A}\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}X} = 1, \quad \frac{1}{T_e}\frac{\mathrm{d}T_e}{\mathrm{d}X} = 1. \tag{4.15}$$

また無次元角各周波数 $\Omega$ も 1 とする．

速度の $\tau = 0$ での初期値は領域内 $\eta > 0$ ではゼロであるが，壁面上 $\eta = 0$ では $U$ の不連続のため不定である．なお，温度は壁面上でもゼロである．このため解析解 (3.5) は $\tau \to 0$ かつ $\eta \to 0$ の極限の取り方によって様々な値をとる．一方，数値計算では壁面上の初期値を与えざるを得ない．そこでまず，壁面上も含めて $\check{U} = 0$ として，$a_i$ と $b_i$ の初期値を全てゼロにとる場合が考えられる．これは初期時刻を $\tau = 0-$ にとることである．一方，$\tau = 0+$ にとると $\check{U} = -A$ から，$a_{N-1} = -a_N = (-1)^{N+1}A/2$ の他は $a_j = 0$ にとることも考えられる．ここでは前者の条件を用いて計算を行うが，後者の条件を用いると初期値が $\eta$ について急激に変動する．しかし，$\tau > 0$ になるとすぐに振動は収まり，解は前者の解に近づくことが分かる．

初期から 10 周期 ($\tau = 20\pi$) 後の速度 $\tilde{U}$ ($= U + \check{U}$) と温度 $\Theta$ ($= \Theta + \check{\Theta}$) の波形を，1/8 周期毎に 11 周期 ($\tau = 22\pi$) まで図 2 に青で示す．ここで，$\tau = \tau_k = 2\pi k/8$ ($k = 80, 81, 82, \ldots, 88$) である．赤は解析解を示す．速度の分布では両者は完全に一致しており，赤は青の後ろで見えないが，温度分布では僅かな違いが見られる．時刻 $\tau_{80}$ と $\tau_{88}$ の波形が一致していることから初期値からの過渡現象が消えて，振動は周期的である．なお，漸近解 (3.9), (3.10) を描くと赤の解析解に一致して見える．

温度勾配による移流の影響について述べる．コア領域の温度変化 (3.3) は $c_1$ によって決まる．いまの場合 $c_1 = 1.4$ で正であるので $\Theta = -1.4 \sin\tau$ となり，この変化は図 2(b) の $\eta = 15$ で見られる．温度勾配 $\mathrm{d}T_e/\mathrm{d}x$ が正の位置では，速度が正であると低い温度の気体が運び込まれるので温度は低下し，逆に速度が負であると高い温度の気体が運び込まれるので温度は増加する．図 2(a) 中の時刻 $\tau_{80}, \tau_{81}$ では速度が正であるので，(b) の温度は 0 より減少する．時刻 $\tau_{81}$ と $\tau_{82}$ の間では速度は正であるが，一部で負に切り替わ箇所が現れ始めるので温度が次第に増加する．同様の考え方により，以後の温度の変化の様子が分かる．

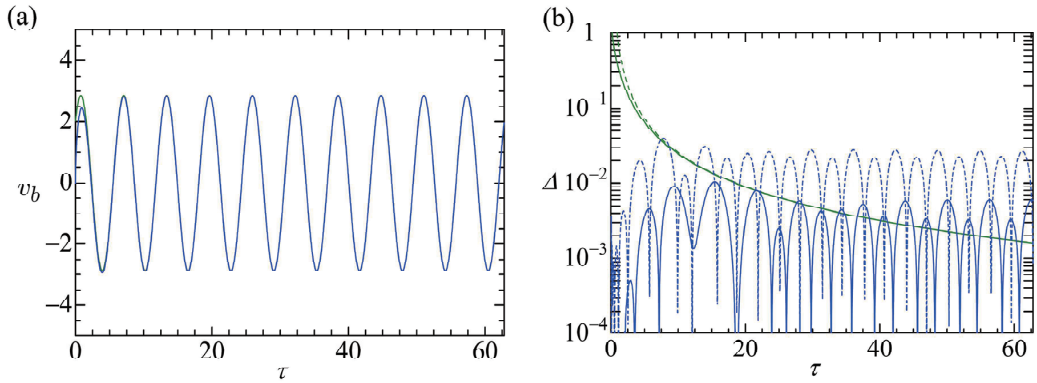


**図 3:** 境界層外縁速度 $v_b$ の解析解 (3.15) と数値解 (4.22)($N = 16$) との比較を (a) に示す．赤で示す解析解は青の数値解の後ろにあり全く見えない．なお，係数 $\sqrt{\nu_e a_0/L}$ は省かれている．緑の線は定常応答 $(C + C_T)\cos(\tau - \pi/4)$ を表す．解析解と数値解の差の絶対値 $\Delta$ を (b) に示す．青の実線は $N = 16$ の場合であり，破線は $N = 8$ の場合である．緑の実線は定常応答との差を示し，破線は (3.15) の第 2 項目の $\tau^{-\frac{3}{2}}$ の減衰を表す．

次に境界層外縁速度を求める．速度欠損の積分は次のように表わせる：

$$\int_0^\infty \check{U}\mathrm{d}\eta = \int_{-1}^1 \frac{\check{U}}{\alpha(1-\xi)}\mathrm{d}\xi = \frac{1}{\alpha}\int_0^\pi \check{U}\cot\Big(\frac{\theta}{2}\Big)\mathrm{d}\theta. \tag{4.16}$$

ここで $\check{U}$ は

$$\check{U} = \sum_{j=0}^{N} a_j \cos(j\theta) \tag{4.17}$$

である．被積分関数は $\theta \ll 1$ において $-\sum_{j=0}^N j^2 a_j \theta^2/2 + \ldots$ であるので，積分は $\check{U}$ を $j$ について和をとった後に積分する．よって (4.17) は次のように書ける：

$$\int_0^\infty \check{U}\mathrm{d}\eta = \frac{1}{\alpha}\sum_{j=0}^{N} a_j e_j. \tag{4.18}$$

ここで $e_j$ は次のように定義される：

$$e_j = \int_0^\pi [\cos(j\theta) - 1]\cot\Big(\frac{\theta}{2}\Big)\mathrm{d}\theta. \tag{4.19}$$

一方，$\partial\check{U}/\partial X$ は (4.18) を $X$ で微分して次のように計算される：

$$\int_0^\infty \frac{\partial\check{U}}{\partial X}\mathrm{d}\eta = \frac{1}{\alpha}\sum_{j=0}^{N} \frac{\partial a_j}{\partial X} e_j. \tag{4.20}$$

また，$\partial\check{\Theta}/\partial\eta$ は

$$\frac{1}{Pr}\frac{\partial\check{\Theta}}{\partial\eta}\Big|_{\eta=0} = \frac{2\alpha}{Pr}\sum_{j=0}^{N}(-1)^{j-1} j^2 b_j \tag{4.21}$$

となる．よって $v_b$ は $a_i$, $b_i$ によって次式で与えられる：

$$v_b = -\sqrt{\frac{\nu_e a_0}{L}} \sum_{j=0}^{N} \Big[ \frac{1}{\alpha} \Big( \frac{1+\beta}{2T_e} \frac{\mathrm{d}T_e}{\mathrm{d}X} a_j e_j + \frac{\partial a_j}{\partial X} e_j \Big) + \frac{2\alpha}{Pr} (-1)^{j-1} j^2 b_j \Big]. \tag{4.22}$$

こうして求めた $v_b$ を図 3(a) に示す．式 (4.22) により求めた $v_b$ を青で示し，解析解 (3.13) を赤で示すが，青の後ろに隠れて見えないほどに一致をしている．ただし，係数 $\sqrt{\nu_e a_0/L}$ は省いてある．また．$(C\partial/\partial X + C_T T_e^{-1} \mathrm{d}T_e/\mathrm{d}X)U$ は $(CA^{-1}\mathrm{d}A/\mathrm{d}X + C_T T_e^{-1}\mathrm{d}T_e/\mathrm{d}X)A\cos(\Omega\tau)$ であり，ここでは $(C + C_T)\cos\tau$ である．

図 3(b) には両者の差の絶対値 $\Delta$ を青の実線で示す．これより $v_b$ の誤差は高々小数点以下二桁目に現れることがわかる．参考のために，$N = 8$ の場合の誤差を青の破線で示す．これより $\Delta$ は $N = 16$ のときに比べて約 4 倍大きいことが分かる．また，$N = 32$ の場合には $\Delta$ は約 1/4 に小さくなる．これより誤差は $N^{-2}$ で小さくなることが予想される．

最後に，図 3(a), (b) の緑の実線は定常応答 $(C + C_T)\cos(\tau - \pi/4)$ を表す．図 3(b) の緑の破線は，定常応答との差，すなわち過渡応答の大きさが $A/\sqrt{4\pi\tau^3}$ で減衰することを示す．

## 5. おわりに

熱音響境界層の外縁速度 $v_b$ を境界層方程式をチェビシェフ多項式による級数展開することにより数値的に求める計算方法を示した．級数を少ない項数で打ち切っても，$v_b$ はかなり精度良く求まることが分かった．

履歴積分を避けるこの方法は，遠い過去のデータを必要とせず，長時間の挙動を調べるのに有用と思われるが，外縁速度に履歴が現れることには変わりない．しかし，この方法により $v_b$ を求める計算量が減るので，境界層理論を用いた熱音響システムのシミュレーションへの適用が期待される．

本研究は科学研究費補助金 (No.18H01375 No.21K03863) の援助の下に行われたものであり，ここに記し謝意を表す．

## 参考文献

[1] Sugimoto, N. and Shimizu, D., “Linear and Nonlinear Theories for Thermoacoustic Waves in a Gas Filled Tube Subject to a Temperature Gradient,” in *Applied Wave Mathematics II* (eds. Berezovski, A. and Soomere, T.), Springer Nature (2019), Chap. 9, pp.187–204.

[2] 杉本 信正, “整数階でない微積分法について,” 数学通信, **21**(4), (2017), pp.5–22.

[3] Sugimoto, N. and Shimizu, D., “A computational method for a thermoacoustic boundary layer in a gas-filled tube,” J. Acoust. Soc. Am., **155**, pp.98–113 (2024).

[4] Sugimoto, N. and Shimizu, D., “Boundary-layer theory for Taconis oscillations in a helium-filled tube,” Phys. Fluids, **20**(10) (2008), 104102 pp.1-11.

[5] Sugimoto, N. and Tsujimoto, K., “Amplification of energy flux of nonlinear acoustic waves in a gas-filled tube under an axial temperature gradient,” J. Fluid Mech., **456**, (2002), pp.377–409.

[6] Grosch, C. E. and Orszag, S. A., “Numerical solution of problem in unbounded regions: Coordinate transforms,” J. Comput. Phys., **25**, 273–296 (1977).

[7] Hairer, E., Nørsett, S. P. and Wanner, G., Solving Ordinary Differential Equations I Nonstiff Problems, Springer-Verlag (1897).