

共鳴管内の音響流の数値解析

大阪大学・工学研究科 矢野 猛

Takeru Yano

Department of Mechanical Engineering, Osaka University

大振幅音波の伝播にともなう様々な非線形現象を、質量・運動量・エネルギー輸送の時間平均的な振る舞いという観点から探求する取り組みの歴史は長い。非線形現象の時間平均量は、その時空間発展を記述する方程式が平均量だけで閉じないという本質的な困難を抱える。それゆえ、その取り組みの長い歴史にもかかわらず、本稿で扱うような素朴な問題に対してさえ、十分な理解が得られていない。

時間平均的な質量輸送に主要な役割を果たす音響流は、媒質の攪拌・混合などと直接関わるものと考えられる。運動量輸送は音響放射圧あるいは音響放射力とよばれ、気泡力学や音響浮揚などの応用と関連して精力的な取り組みがなされている。エネルギー輸送は熱音響現象の核心的課題のひとつである。これらの時間平均的な非線形輸送現象は、音の非線形性を活用する信号伝達や計測・センシングなどと並んで、非線形音響学の重要な主題である。

音響流も音響放射圧もその研究の歴史は古いが、¹⁾ 理論的にはよくわかっていないことが多い。その理由として考えられることは、第一に、時間平均的な輸送が現れるそもその原因が非線形効果であるがゆえに、時間平均量を支配する方程式は時間平均された変数だけでは閉じないことが挙げられる。第二の理由として、基本となるべき音響流の数学的定義が確定していないことを挙げたい。音響流には次の二つの定義がある。^{1,2)}

1. One-period time-average of Eulerian mass flux vector

$$v_i^E(\mathbf{x}, t) = \frac{\overline{\rho v_i}}{\rho_0} = \frac{\omega}{2\pi\rho_0} \int_{t-(\omega/2\pi)}^t \rho(\mathbf{x}, t) v_i(\mathbf{x}, t) dt \quad (1)$$

2. One-period time-average of Lagrangian fluid velocity

$$v_i^L(\mathbf{a}, t) = \frac{\omega}{2\pi} \int_{t-(\omega/2\pi)}^t v_i(\mathbf{x}(\mathbf{a}, t), t) dt \quad (2)$$

ここで、(2) 式の $\mathbf{x}(\mathbf{a}, t)$ は、指定された流体粒子 \mathbf{a} の時刻 t における座標を表す。簡単のため、本稿では前者を Euler 平均質量流束とよび、後者を Lagrange 平均速度とよぶが、文献でもよびかたは定まっていない。上記の2つの音響流の定義において、 ω は注目する音響現象の代表的な角振動数であるが、実際の応用においては、代表的な(あるいは最適な)角振動数が一意に決まるかどうかはわからない。また、計測データに基づいてこれらを算出する際、1周期時間平均ではなく周期に比べて十分に長い時間平均が用いられることも多い。

Lagrange 平均速度と Euler 平均質量流束が、平面波のような特別な場合を除いて、一般に異なることは定義式から容易に確かめられる。しかしながら、どのように異なるのかは明らかでない。また、音響浮揚などの運動量輸送や熱音響現象のようなエネルギー輸送の問題に質量輸送として関与する音

響流は, Lagrange 平均速度なのか, Euler 平均質量流束なのかもわかっていない. Kundt 管内に撒かれた微粉末の縞模様の形成過程を理解するためには, どちらの音響流を調べるべきであろうか.

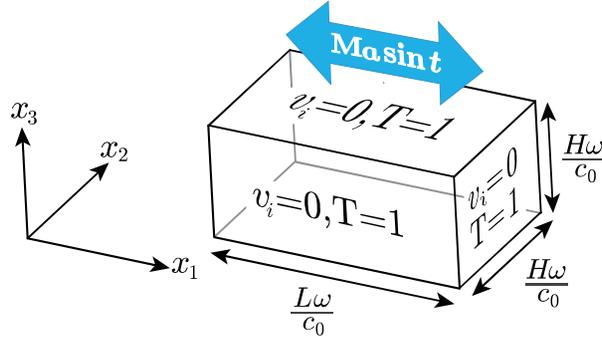


図 1: 共鳴管と座標系

以下では, 共鳴管内の非線形定在波について, 可能な範囲の精密な 3 次元数値解析を行い, Lagrange 平均速度と Euler 平均質量流束の特徴と差異を議論する. 具体的には, 剛体からなる長さ L の共鳴管を振幅 a , 角振動数 ω で正弦振動させることにより, 管内の気体中に定在音波を生じさせる問題を考える (図 1). 管の長さ L が

$$\frac{L\omega}{c_0} = (2n - 1)\pi \quad (n = 1, 2, \dots)$$

を満たすことが非粘性線形理論の共鳴条件である (c_0 は音速). 支配方程式は流体力学の質量・運動量・エネルギー保存則と理想気体の状態方程式からなり, 共鳴管の管壁の境界条件は速度のすべりなし条件と温度一定の等温条件を用いる. 共鳴管に固定した座標系において, 共鳴管に対する相対速度を流体の速度とする変数変換を行うと, 管が静止していて管内の気体に振動的外力が作用する問題に変換される. この問題に対して, 座標に関する微分を 4 次精度中心差分で近似し, 時間に関する微分を 4 次精度後退差分で近似して, 完全陰解法形式で差分方程式をつくる. この差分方程式の数値解を各時間ステップごとに反復法によって求めて, 時間発展させる. 十分な時間が経過した後, 時間周期解が得られる. 時間周期解の周期は共鳴管の振動の周期 $2\pi/\omega$ と等しい. また, 共鳴管内の気体の運動は 16 の対称な小領域に分割できる (図 2). 得られた数値解の時間周期性と空間対称性に関する誤差は 10^{-12} 程度である.

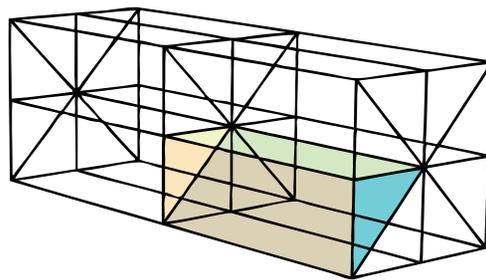


図 2: 16 の対称な小領域

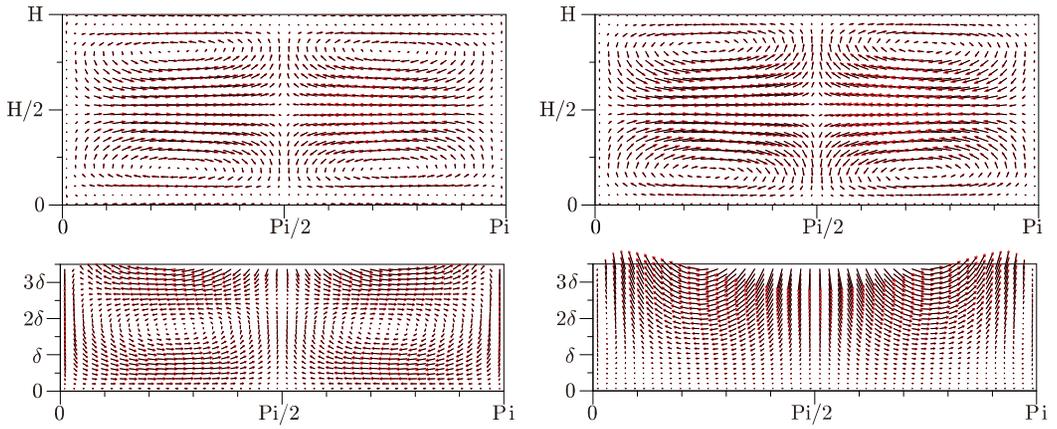


図3: 定常振動状態における管壁に平行で管の中心軸を含む面内の音響流.

$$Ma = a\omega/c_0 = 0.001, \delta^2 = \mu_0\omega/\rho_0c_0^2 = 0.0005.$$

共鳴管内の気体の振動の様子は別の機会に詳述することとして概略のみを記すと, (i) 共鳴の効果によって大振幅振動が生じ, (ii) 大振幅振動の非線形効果によって管内を往復する衝撃波が形成されて, (iii) 管壁に温度と速度の振動境界層が発達する.

以下では音響流に注目して議論する. 代表的な音響流の管内対称面上の速度分布を図3に示す. 気体の振動が時間周期解であるので, その時間平均として得られる音響流の速度は時間不変である. 図3左側が Euler 平均質量流束, 図3右側が Lagrange 平均速度を示し, 左側下図が管壁近傍の Euler 平均質量流束の拡大図, 右側下図が管壁近傍の Lagrange 平均速度の拡大図である. 図中の H は管断面の1辺の長さであり, δ は振動境界層の無次元厚さの目安で, 図に示した例では $H\omega/c_0 \approx 36\delta$ である. 左側の Euler 平均質量流束では境界層内部の音響流^{3,4)} が表現できているが, 右側の Lagrange 平均速度では境界層内の音響流の循環流の特徴を表現できない. 一方, 境界層外側のいわゆる Rayleigh 型音響流⁵⁾ は, この図で示される範囲に限れば, どちらの定義を用いても定性的には大きな差がない.

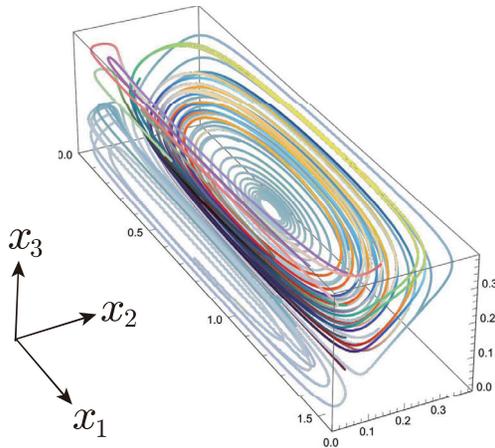


図4: 音響流の流線

図4は Euler 平均質量流束の流線である。図には適当に選ばれた4つの始点から始まる4本の流線が示されている。この例では、個々の流線は、図2に示した16の対称小領域の内部を周回する閉曲線となっている。また、図4の図中左寄りの領域に集中する流線が境界層内の音響流に対応し、それ以外の流線が Rayleigh 型音響流に対応し、両者は互いに分離されている。

現在、本稿で示した例よりさらに強い非線形効果を示す場合の解析に取り組んでいる。非線形効果が強くなるにしたがって、流線が準周期的となり、ついにはカオス化するものと予想されるからである。そのような研究をとおして、音響流の流線のカオス化と音響流の乱流化の関係について明らかにできるものと期待される。

- 1) L. K. Zarembo, Acoustic streaming, in High-Intensity Ultrasonic Fields (ed. L. D. Rozenberg, Plenum, New York, 1971) Part III.
- 2) M. J. Lighthill, Acoustic streaming, J. Sound Vib. **61** (1978) 391–418.
- 3) P. I. Westervelt, The theory of steady rotational flow generated by a sound field, J. Acoust. Soc. Am. **25** (1953) 60–67.
- 4) W. L. Nyborg, Acoustic streaming near a boundary, J. Acoust. Soc. Am. **30** (1958) 329–339.
- 5) Lord Rayleigh: Theory of Sound (Dover, New York, 1945).