

成層流体における小スケール不安定の 非線形シミュレーション

九州大学・応用力学研究所[†] 大貫 陽平

Yohei Onuki

Research Institute for Applied Mechanics,
Kyushu University

2024 年 4 月 11 日

概要

2023 年 10 月 11 日から 13 日に開催されました RIMS 研究集会「非線形波動現象の数理とその応用」で講演した標題の研究について、本稿では線形解析の理論的基礎と非線形計算の技法をまとめます。シミュレーションの具体的な結果は、原著論文 [1, 2] をご参照ください。

1 はじめに

流れの安定性の問題は流体力学における最も基本的な研究対象の一つであり、極めて広範な学術分野に関わる。一般に、流体方程式の厳密解として基本流が与えられたとき、その安定性は、基本流に重ね合わされた擾乱の時間発展を調べることで明らかになる。特に、時間に依存しない基本流に対する微小擾乱の振る舞いは、線形の微分作用素によって指定され、指数関数的に成長するような不安定成分の有無については、作用素の固有値解析で判定が可能である。ただし、通常、連続体における擾乱の時間発展方程式は空間座標に関する偏微分を含むため、その時間積分や固有値解析は多大な計算量を伴う。さらに、基本場の選び方によって無数の問題設定が存在するため、網羅的に流れの安定性を調べることは難しい。

そこで、より簡便に流れの安定性を調べるやり方として、局所安定性解析 (local stability

[†] 〒816-8580 福岡県春日市春日公園 6-1

analysis) がある. この方法では, 基本流に比べて十分に小さな空間構造をもつ擾乱を想定し, 局所的に指数関数型の波動解を仮定 (WKBJ 近似) することで, 擾乱の時間発展を振幅と波数についての常微分方程式で記述する. 成長する擾乱成分の有無が基本流の大域的な構造に依存せず, 解くべき方程式が空間微分を含まないため, 前述の厳密な解析に比べて少ない計算量で安定性の判別が可能となる.

流体の局所安定性解析は, 古くは一様流体の楕円渦に対して試みられ, その後多様な流体系に対して応用がなされてきた [3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]. とりわけ, 密度成層流体への応用は, 海洋や大気をはじめとした地球科学における流体现象の理解において重要である. ただし, 既往研究はほとんどが線形解析の範囲に留まっている. それに対し本研究では, 不安定成長した擾乱の非線形的な発展を確かめる方法として, WKBJ 近似を拡張したフーリエ・スペクトル法による数値シミュレーションを導入する.

2 局所安定性解析

基本となる支配方程式として, Boussinesq 近似を施した回転系における Navier-Stokes 方程式を考える:

$$D_t \mathbf{u} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} = -\nabla p + b\mathbf{e}_z + \nu^* \nabla^2 \mathbf{u} \quad (1a)$$

$$D_t b = \kappa^* \nabla^2 b \quad (1b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (1c)$$

ここで, $\mathbf{u} = (u, v, w)$ は流速ベクトル, b は浮力, p は基準密度で除した圧力である. これらの変数はいずれも空間座標 $\mathbf{x} = (x, y, z)$ および時刻 t の関数である. 空間座標に関する微分は $\nabla = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)$ とし, 流れに乗った時間微分を $D_t = \partial_t + \mathbf{u} \cdot \nabla$ で表記した. 運動方程式において浮力は常に一方向に作用するものとし, 鉛直上方の単位ベクトル $\mathbf{e}_z = (0, 0, 1)$ を用いて表現している. 系の回転角速度 $\boldsymbol{\Omega}$, 動粘性係数 ν^* , 浮力拡散係数 κ^* はいずれも定数である.

今, 基本場として方程式系 (1) の厳密解を $(\mathbf{u}, b, p) = (\mathbf{U}, B, P)$ と定める. ここでは解の定常性や空間対称性は仮定せず, 基本場の変数はいずれも $\mathbf{x}$ と t の関数とする. 次に, 基本場に重ね合わされた擾乱の振る舞いを調べる. 方程式系 (1) に $(\mathbf{u}, b, p) = (\mathbf{U}, B, P) + (\mathbf{u}', b', p')$ という形式の解を代入し, 大文字記号で表記された変数が方程式の

厳密解であることを用いると、プライム記号を付された擾乱の支配方程式が

$$D_U \mathbf{u}' + \mathbf{u}' \cdot \nabla \mathbf{U} + \mathbf{u}' \cdot \nabla \mathbf{u}' + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}' = -\nabla p' + b' \mathbf{e}_z + \nu^* \nabla^2 \mathbf{u}' \quad (2a)$$

$$D_U b' + \mathbf{u}' \cdot \nabla B + \mathbf{u}' \cdot \nabla b' = \kappa^* \nabla^2 b' \quad (2b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}' = 0 \quad (2c)$$

と得られる。ただし、基本流に乗った時間微分を $D_U = \partial_t + \mathbf{U} \cdot \nabla$ と表記した。なお、ここでは擾乱の振幅は有限の大きさをもつと考え、非線形項まで方程式に含めている。

今、擾乱の具体的な形式として、WKBJ 近似解を

$$(\mathbf{u}', b', p') = \left\{ (\hat{\mathbf{u}}, \hat{b}, \hat{p}) + \epsilon (\hat{\mathbf{u}}_\epsilon, \hat{b}_\epsilon, \hat{p}_\epsilon) + \dots \right\} e^{i\Theta/\epsilon} \quad (3)$$

と設定する。ここで、ハット記号を付した振幅変数と、位相変数 Θ は、いずれも $\mathbf{x}$ と t の関数である。擾乱の空間スケールは ϵ によって指定され、以降はこのパラメータが微小であると見なす。式 (3) を (2) に代入して、 ϵ についての冪級数展開の各係数が両辺で等しいとして一連の方程式系を導く。その際、粘性係数と拡散係数を ϵ に依存させて $(\nu^*, \kappa^*) = \epsilon^2(\nu, \kappa)$ と定め直すことにする。これはつまり、粘性や拡散効果は、基本流の空間スケールにおいては実質的に無視できる強さであり、擾乱スケールにおいてのみ有効的に作用することを意味する。

まず、非圧縮条件 (2c) における ϵ^{-1} に比例した項から $\hat{\mathbf{u}} \cdot \nabla \Theta = 0$ を得る。一般に、WKBJ 近似解において、位相変数の空間微分は擾乱成分の波数ベクトルに対応する。それを $\mathbf{k} \equiv \nabla \Theta$ と表記すると、非圧縮流体で広く成立する流速ベクトルと波数ベクトルの直交関係式

$$\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{u}} = 0 \quad (4)$$

を得る。次に、運動方程式 (2a) および浮力の式 (2b) における ϵ^{-1} に比例した項に注目する。この時、条件式 (4) により、非線形項が恒等的に 0 となることが分かり、それぞれの方程式は

$$(D_U \Theta) \hat{\mathbf{u}} = -\mathbf{k} \hat{p} \quad (5a)$$

$$(D_U \Theta) \hat{b} = 0 \quad (5b)$$

となる。このうち、1つ目の式と $\mathbf{k}$ の内積を取ると、条件式 (4) により左辺が消えることから、 $\hat{p} = 0$ が導かれる。よって、最低次の振幅変数が有限の値をもつために、 $D_U \Theta = 0$ が要請される。さらにこの式の空間微分を取ると、波数ベクトル $\mathbf{k}$ の満たすべき式として、

$$D_U \mathbf{k} + \nabla \mathbf{U} \cdot \mathbf{k} = 0 \quad (6)$$

が導かれる。ここで、左辺第二項の内積は $\mathbf{U}$ と $\mathbf{k}$ の成分について計算する。この式により、波数ベクトルはその初期条件が与えられれば、振幅の値に依らずに独立して計算することが可能である。

振幅変数の時間発展は、(2a) と (2b) の ϵ^0 に比例した項から

$$D_U \hat{\mathbf{u}} + \hat{\mathbf{u}} \cdot \nabla \mathbf{U} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \hat{\mathbf{u}} = -\mathbf{k} \hat{p}_\epsilon + \hat{b} \mathbf{e}_z - \nu |\mathbf{k}|^2 \hat{\mathbf{u}} \quad (7a)$$

$$D_U \hat{b} + \hat{\mathbf{u}} \cdot \nabla B = -\kappa |\mathbf{k}|^2 \hat{b} \quad (7b)$$

が導かれる。これらのうち、(7a) と $\mathbf{k}$ の内積を取り、(4) と (6) を用いると、時間微分を含まない方程式が得られる。その結果、圧力変数 $\hat{p}_\epsilon$ が他の変数の関数として

$$\hat{p}_\epsilon = \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|^2} \cdot \left(-2\hat{\mathbf{u}} \cdot \nabla \mathbf{U} - 2\boldsymbol{\Omega} \times \hat{\mathbf{u}} + \hat{b} \mathbf{e}_z \right) \quad (8)$$

と書ける。この式を再び (7a) に代入することで、閉じた方程式系が構成される。

ここまで、振幅変数と波数ベクトルはいずれも空間座標 $\mathbf{x}$ および時刻 t の関数であるとしてきた。他方、導かれた方程式系 (7) は形式的にこれら未知変数に関する空間微分を含んでいない。唯一、基本流に乗った時間微分作用素 D_U をもつのみである。よって、基本流とともに移動する観測者にとっては、擾乱の時間発展は局所的な情報のみから定まるように見なせる。すなわち、一連の方程式系において物質微分 D_U を常微分に置き換えた問題

$$\frac{d\mathbf{k}}{dt} + \nabla \mathbf{U} \cdot \mathbf{k} = 0 \quad (9a)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\mathbf{u}}}{dt} + \hat{\mathbf{u}} \cdot \nabla \mathbf{U} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \hat{\mathbf{u}} = & -\mathbf{k} \left[\frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|^2} \cdot \left(-2\hat{\mathbf{u}} \cdot \nabla \mathbf{U} - 2\boldsymbol{\Omega} \times \hat{\mathbf{u}} + \hat{b} \mathbf{e}_z \right) \right] \\ & + \hat{b} \mathbf{e}_z - \nu |\mathbf{k}|^2 \hat{\mathbf{u}} \end{aligned} \quad (9b)$$

$$\frac{d\hat{b}}{dt} + \hat{\mathbf{u}} \cdot \nabla B = -\kappa |\mathbf{k}|^2 \hat{b} \quad (9c)$$

を考えれば十分と言える。これが局所安定性解析の基本的な考え方である。

簡約化された方程式系 (9) は一般の基本流に対して有効であるが、特殊な場合として、 $\mathbf{k}$ および方程式の係数 ($\nabla \mathbf{U}, \nabla B$) が時刻 t の周期関数である状況を考える。これは、例として基本流が振動していたり楕円型の流線構造をもつ場合に成立する。この時、振幅の時間発展を定める方程式 (9b) および (9c) は、未知ベクトルを $\boldsymbol{\psi} = (\hat{\mathbf{u}}, \hat{b})$ として、形式的に

$$\frac{d\boldsymbol{\psi}}{dt} = \mathbf{A}(t)\boldsymbol{\psi} \quad (10)$$

と表現される。時間に依存した係数行列 $\mathbf{A}$ は、基本流および波数ベクトルの変動周期 T に対し、 $\mathbf{A}(t+T) = \mathbf{A}(t)$ を満たす。すると、Floquet の定理により時間に依存

しない行列 M (モノドロミー行列) が存在して、任意の解 $\psi(t)$ および整数 n に対して $\psi(nT) = M^n \psi(0)$ が成立する。よって、擾乱の長期的な時間発展、すなわち流れの安定性は、 4×4 の行列 M の性質を調べることで明らかとなる。

今、 M の固有値を $\mu_1, \mu_2, \dots$ と書くことにする。指数関数的な成長モードは、 $\{\mu_j\}$ のうち絶対値が 1 を越えるものがある場合に存在する。その成長率の大きさ、すなわち擾乱の振幅が e 倍になるまでの時間の逆数は、 $(1/T) \log |\mu_j|$ と書かれる。成長モードの有無とその成長率の大きさを数値的に求めるにあたっては、時刻 $t = 0$ に単位行列を用意し、その各列を独立したベクトルと見て (10) に従い時間 T にわたって積分を行い、得られた 4 つのベクトルを再び並べることによって行列 M を構成する方法が簡便である。

大気海洋科学の分野では、大抵の問題において Reynolds 数が極めて大きく、粘性や拡散項を無視して安定性の議論を進めることが多い。このとき、 M の固有値 $\{\mu_j\}$ は常に 1 を含む。というのも、方程式系 (9) で $\nu = \kappa = 0$ とおいた式が $\mathbf{k} \cdot \mathbf{u} = \delta$ を不変に保つためである^{*1}。この量は非圧縮条件を用いて圧力変数を消去したことで必然的に生じる不変量であり、物理的に意味のある解では常に $\delta = 0$ となる。さらに、非圧縮条件を満たす解においては、渦位保存に基づき $q = \mathbf{i}(\mathbf{k} \times \hat{\mathbf{u}}) \cdot \nabla B + \mathbf{i}(2\boldsymbol{\Omega} + \nabla \times \mathbf{U}) \cdot \mathbf{k} \hat{\mathbf{b}}$ が不変に保たれる。基本場を静止状態 ($\mathbf{U} = 0$) とした場合、 $q \neq 0$ となる固有解は地衡流バランスを保った渦運動を表し、 $q = 0$ で振動する固有解が慣性重力波に対応する。基本流が存在する状況においても、 $dq/dt = 0$ の条件により、渦運動成分は長時間で成長することができない。すなわち、散逸のない回転成層流体の局所安定性解析において得られる指数的成長モードは、慣性重力波成分によって構成される。同様の理由により、不安定固有解に対しては必ず $\delta = 0$ が成立する。よって、モノドロミー行列の構成にあたっては、初期値の設定に非圧縮条件を考慮せずとも、物理的に意味のある不安定固有解を算出することができる。

行列 M の固有値に基づく解析にはいくつかの注意点がある。まず、上述のように、散逸効果は無視した場合には、系は慣性重力波に対応する振動性の固有解と、渦運動に対応する中立安定の固有解を有するが、その合計の自由度は 3 であり、行列の次数と一致しない。すなわち M は対角化が不可能となる。このことは、 $\delta \neq 0$ となる初期条件に対して、解が線形に増大しうることを意味する^{*2}。数値解析においては、本来は対角化できない行列に対しても 4 つの固有ベクトルが出力されてしまうため、非物理的な成分が見掛け上の固有モードとして含まれてしまう^{*3}。次に、 M の固有値解析で得られる不安定モードは系の周

^{*1} より具体的に、 $(\mathbf{k}, 0)$ が M の固有値 1 に属する左固有ベクトルであることが確かめられる。

^{*2} 実際、 $\nu = \kappa = 0$ かつ $\delta \neq 0$ では、(9) に従う解において、渦位が $dq/dt = -\mathbf{i}\delta(2\boldsymbol{\Omega} + \nabla \times \mathbf{U}) \cdot \nabla B$ と線形に変化する。

^{*3} 指数関数に比例して成長する解では本来 $\delta = 0$ が保証されるため、十分な精度の時間積分を用いれば不安

期 T よりも長い時間スケールにおいて成長する．固有値解析では安定な解であっても，短時間で見れば振幅が急成長するような成分を含んでいる可能性がある．特に，基本流の勾配が強かったり，波数ベクトルの変動の周期が極めて長かったりする状況では，有限時間での擾乱振幅の変化が流れの安定性に重大な影響を与える．

3 非線形シミュレーション

前節で紹介した局所安定性解析に用いる方程式系 (9) は，擾乱振幅について線形である．これは非圧縮条件により非線形項が漸近展開の低次において消失するためである．非線形性を議論に含めるやり方として，展開式の高次の項に着目する方法が考えられるが，その場合は弱い非線形性による波の変調を考察することとなる．地球科学的にはむしろ，不安定によって成長した重力波擾乱が砕波して乱流状態に遷移する過程に興味があることが多い．強い非線形性を伴う砕波現象を調べるためには，WKBJ 近似解 (3) を用いるよりも，無数の波数成分を含む数値シミュレーションの実施が適している．本節では，そうしたシミュレーションの一技法を紹介する．

局所安定性解析の導出にあたっては，基本流成分 (U, B) について，元の方程式系 (1) の厳密解であること以外には制約を設けなかった．一方，導かれた方程式系 (9) を眺めると，そこには基本流成分は空間についての一階微分のみが含まれていると気付く．そこで，基本流成分が空間についての一次関数であるとみなし，以下のように記述する．

$$U = D\mathbf{x}, \quad B = \mathbf{G} \cdot \mathbf{x}. \quad (11)$$

ここで， D は基本流の勾配テンソル， G は基本場の浮力の勾配ベクトルであり，いずれも時間のみの関数である．概念的には，基本流のある流線に乗った座標系において，物理量を空間座標についてテイラー展開し，一次の項までを取り出したことになる．こうして定義された空間線形の基本場は，元の方程式の解として矛盾しない．というのも，Boussinesq 近似をした Navier-Stokes 方程式 (1) は，流速と浮力について空間座標の一次関数，圧力については空間座標の二次関数であるような解を厳密解として含む^{*4}[11, 12]．本稿は，そうした種類の基本流に重ねられた有限振幅擾乱の振る舞いを数値的に検証する手段を提供する．

以降の議論では擾乱の空間スケールに制約を設けない．すなわち， $\epsilon = 1$ とし， ν^* と

定成長率の算出に対して非物理的な成分は影響をしない．

^{*4} 式 (11) で定義された解に対しては，粘性項および拡散項は恒等的に 0 となる．よって， (D, G) を具体的に定めるにあたり，Euler 方程式の解を採用すれば十分である．

κ^* を ν と κ にそれぞれ置き換える. 今, 基本場 (11) に重ねられた擾乱の方程式系 (2) に対し, 時刻 $t = 0$ での解の値がフーリエ積分として $\mathbf{u}' = 1/(2\pi)^{3/2} \int \hat{\mathbf{u}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{k}$ といった形^{*5}で与えられているとし, その展開係数の時間発展を考える. この種の問題は, スペクトル法による流体方程式の解析で広く現れる. ただし, ここでは特別な扱い方として, 波数ベクトルが時間の関数であって (9a) に従い変化するものと見なす. つまり, 波数ベクトルの初期値を $\tilde{\mathbf{k}}$ として, 時刻 t での値を $\mathbf{k} = \mathbf{k}(\tilde{\mathbf{k}}, t)$ と表現し, 時間に依存したフーリエ積分

$$\mathbf{u}'(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \hat{\mathbf{u}}(\tilde{\mathbf{k}}, t) e^{i\mathbf{k}(\tilde{\mathbf{k}}, t)\cdot\mathbf{x}} d\tilde{\mathbf{k}} \quad (12)$$

を定義して, その展開係数 $(\hat{\mathbf{u}}, \hat{b}, \hat{p})$ の発展を計算する. 波数を時間に依存させることの利点は, 基本流に乗った時間微分が $D_U(\hat{\mathbf{u}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}) = (\partial_t \hat{\mathbf{u}}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$ と, 単なる偏微分に置き換えることにある. 座標系 $(\tilde{\mathbf{k}}, t)$ での擾乱の支配方程式は, (2) から

$$\partial_t \hat{\mathbf{u}} + \mathbf{D} \hat{\mathbf{u}} + \mathcal{F}[\mathbf{u}' \cdot \nabla \mathbf{u}'] + 2\boldsymbol{\Omega} \times \hat{\mathbf{u}} = -i\mathbf{k} \hat{p} + \hat{b} \mathbf{e}_z - \nu |\mathbf{k}|^2 \hat{\mathbf{u}} \quad (13a)$$

$$\partial_t \hat{b} + \mathbf{G} \cdot \hat{\mathbf{u}} + \mathcal{F}[\mathbf{u}' \cdot \nabla b'] = -\kappa |\mathbf{k}|^2 \hat{b} \quad (13b)$$

$$\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{u}} = 0 \quad (13c)$$

と導かれる. ただし, フーリエ変換を $\mathcal{F}[\bullet] \equiv 1/(2\pi)^{3/2} \int \bullet e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{x}$ で表記した. もし, 初期条件が単一の波数成分 $\tilde{\mathbf{k}} = \mathbf{k}_0$ によって構成される場合, すなわち $\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{u}_0 \delta(\tilde{\mathbf{k}} - \mathbf{k}_0)$ といった形であるとする, 非線形項は恒等的に 0 となり, 方程式系 (13) は前節での問題 (9) に帰着する. それゆえ, (13) は局所安定性解析の自然な拡張モデルと呼べる.

数値解析においては, フーリエ積分をフーリエ級数展開に置き換える. これは系に周期境界条件を課すことに相当する. もし, 系の初期状態が統計的に空間一様であれば, 並進対称性が保たれ続ける. すなわち, 一種の一様乱流の問題と見なして擬スペクトル法のアルゴリズムを採用し, 高速フーリエ変換を用いて, 効率的かつ高い精度での数値解析が可能である.

本稿では, 空間座標系を固定して波数が時間に依存するものとして議論を進めてきたが, これと等価な解釈として, 時間とともに空間座標が変形するものと見ることもできる. 変形座標系における擬スペクトル法のアルゴリズムは, 文献 [13] が有名であり, 剪断流の問題に対して広く用いられてきた. 定常剪断流においては, 座標系の変化が時間周期的でないため, 計算領域の過度の変形を避けるために, 時間積分の途中で格子点の再構成 (リメッシュ) が必要となる. それに対し, 著者がこれまでの研究で対象とした楕円渦や振動流の

^{*5} 紙面の節約のためフーリエ積分を流速成分についてのみ表記するが, その定義式は浮力 $\hat{b}$ と圧力 $\hat{p}$ についても同様である.

問題では、計算領域の形状が一定時間ごとに初期状態に復元するため、初期の格子点配置から構成を変更することなく長時間の計算ができる。ただし、計算の過程で格子点幅が狭まることにより、安定に時間積分を行うための CFL 条件の制約が厳しくなることもある。過渡的な変形が大きい場合は、リメッシュの使用を検討した方が良いかもしれない。

4 結びに

本稿で紹介した、局所安定性解析とその非線形シミュレーションへの拡張は、広範な流体現象に応用が可能である。とりわけ回転成層流体においては、系の角速度 Ω と式 (11) で指定される基本場の種類だけ問題設定が考えられる。流れの不安定と乱流遷移に興味のある、意欲的な大学院生の研究テーマに適しているかもしれない。著者が研究 [2] で使用した、海洋を想定した楕円渦の不安定をシミュレーションする Fortran のコードは、<https://github.com/yonuki-models/numerical-simulation-aai> からダウンロードできる。東京大学情報基盤センターの Wisteria/BDEC-01 で実行するプログラムであるが、高速フーリエ変換のライブラリとコンパイラ設定を修正すれば、他の計算機環境でも利用が可能である。

将来研究として、地球の外核や超高層大気、あるいは宇宙空間プラズマへの応用を念頭に、磁気流体方程式に対象を広げても面白い。地球惑星科学分野における流体現象は未解明のことが多く、数値解析技術のさらなる進歩が今後の研究の発展に貢献することを期待する。

謝辞

本研究の実施にあたり、JSPS 科研費 JP20K14556 並びに海外特別研究員制度の助成を受けました。本研究は、九州大学応用力学研究所の共同利用研究の助成を受けたものです。

参考文献

- [1] Y. Onuki, S. Joubaud, and T. Dauxois. Simulating turbulent mixing caused by local instability of internal gravity waves. *Journal of Fluid Mechanics*, 915:A77, 2021.
- [2] Y. Onuki, S. Joubaud, and T. Dauxois. Breaking of internal waves parametrically excited by ageostrophic anticyclonic instability. *Journal of Physical Oceanogra-*

- phy*, 53(6):1591–1613, 2023.
- [3] B. J. Bayly. Three-dimensional instability of elliptical flow. *Physical Review Letters*, 57(17):2160, 1986.
 - [4] F. Waleffe. On the three-dimensional instability of strained vortices. *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics*, 2(1):76–80, 1990.
 - [5] A. Lifschitz and E. Hameiri. Local stability conditions in fluid dynamics. *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics*, 3(11):2644–2651, 1991.
 - [6] T. Miyazaki and Y. Fukumoto. Three-dimensional instability of strained vortices in a stably stratified fluid. *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics*, 4(11):2515–2522, 1992.
 - [7] T. Miyazaki. Elliptical instability in a stably stratified rotating fluid. *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics*, 5(11):2702–2709, 1993.
 - [8] J. C. McWilliams and I. Yavneh. Fluctuation growth and instability associated with a singularity of the balance equations. *Physics of Fluids*, 10(10):2587–2596, 1998.
 - [9] S. J. Ghaemsaidi and M. Mathur. Three-dimensional small-scale instabilities of plane internal gravity waves. *Journal of Fluid Mechanics*, 863:702–729, 2019.
 - [10] D. S. Abhiram and M. Mathur. Short-wavelength instabilities in a finite-amplitude plane inertial wave. *Journal of Fluid Mechanics*, 982:A22, 2024.
 - [11] A. D. D. Craik and W. O. Criminale. Evolution of wavelike disturbances in shear flows: a class of exact solutions of the Navier-Stokes equations. *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*, 406(1830):13–26, 1986.
 - [12] A. D. D. Craik. A class of exact solutions in viscous incompressible magnetohydrodynamics. *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*, 417(1852):235–244, 1988.
 - [13] R. S. Rogallo. *Numerical experiments in homogeneous turbulence*, volume 81315. National Aeronautics and Space Administration, 1981.