自己双対格子中を走行する非線形局在励起の実験

金沢大学 数物科学　佐藤政行，古澤拡己，曽我之泰
Masayuki Sato, Hiroki Furusawa and Yukihiro Soga
School of Mathematics and Physics, Kanazawa University

1.　はじめに

1988 年に Sievers と武野[1]によって非線形局在励起[2, 3](Intrinsic localized mode, ILM または discrete breather)が提唱されてから、30 年以上が経った。ソリトンが生成する可積分格子ではなく、非可積分な格子中に生成する局在励起を非線形局在励起と呼んでいる。非可積分格子なので、ソリトンのように自由に動けるわけではなく、普通には静止状態で安定である。局在の中心が、格子点にあるか、格子間にあるかでそれぞれ Sievers-Takeno (ST)モード、Page(P)モード[4]と呼ぶが、一般にはこれらの 2 つのモードの間に安定性の差があり、それゆえ静止安定で、走行しずらい。洗濯板のようなポテンシャルを考えると理解しやすいので Peierls-Nabaro(PN)ポテンシャルと呼ばれることもある。一方で無理やり走らせると、格子のノーマルモード（フォノン）を生成して次第にエネルギーを失い、やがて静止してしまうことも知られている。こちらは、尾の生成問題、あるいは共鳴現象と呼ばれる。非可積分格子についてのこれらの 2 つの問題が、興味の一つである。ソリトン格子にはこれら 2 つの問題は存在せず、自由に局在励起が運動できる。数学的に非常に限られたソリトン格子ではない、非可積分な非線形格子中で局在励起の比較的自由な運動を起こさせるための方法が興味を持たれている。このうちの共鳴問題が本研究のテーマである。

以下、2 章ではソリトンや非線形局在励起を例に共鳴の有無をフーリエ変換を用いて図示する。3 章では我々の行った電気回路での自己双対格子の実験を解説し、4 章でまとめる。

2.　走行する局在励起の例と相互作用の有無

まず初めに、共鳴が連続体中では起こらないことをサインゴルドン方程式のソリトン解を例に図示する。方程式

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}-c_0^2\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}+\omega_0^2\sin\theta=0 \qquad (1)$$

の移動するブリーザー解[5]は、静止ブリーザー解を変換して得られる。

$$\theta_B=4\arctan\left[\frac{\sin\dfrac{u\omega_0 t}{c_0}\dfrac{1}{\sqrt{1+u^2/c_0{}^2}}}{\dfrac{u}{c_0}\cosh\dfrac{\omega_0 x}{c_0}\dfrac{1}{\sqrt{1+u^2/c_0{}^2}}}\right]、\quad x\to\frac{x-vt}{\sqrt{1-v^2/c_0^2}},\quad t\to\frac{t-vx/c_0^2}{\sqrt{1-v^2/c_0^2}} \qquad (2)$$

式からコンピューター上で時間と空間について離散的ではあるが数値的に得られた 2 次元データー$\theta(t,x)$を、数値的に 2 次元フーリエ変換（FT）すると、図 1 のような結果が得られる。2 次元 FT は MATLAB や IGOR などの市販のソフトウエアで可能である。（または時間軸で 1 次元 FT

し、得られた複素データーを空間軸で FT しても同様な図が得られる。）図の濃淡でフーリエ振幅を表している。このように、一定速度で走行する局在状態は、波数空間で直線状のフーリエ強度を持つ。また、曲線は線形の分散関係であり $\omega=\sqrt{c_0^2k^2+\omega_0^2}$ である。局在状態が線形分散に沿うように生成するのも、一般的なことである。局在状態が分散線の下側にできているのは、方程式が負の非線形性を持つからである。

格子ソリトンの場合を図２に示す。走行する局在励起は同様に斜めの直線状であり、線形の分散関係に沿うように生成している。分散線は cos k の項を含む。また波数域は-π から π に限られる。（図は π ずらしてある。）そのため連続の場合と異なり、波数空間で局在励起は必ずどこかで分散線と交差する。ソリトンの場合、図に示すようにフーリエ強度はスムースに変化し、交点で特に異常はない、すなわち共鳴しない。

Ablowitz-Ladik ソリトンの場合、式を

$$i\frac{d\varphi_n}{dt}+K\left(\varphi_{n+1}+\varphi_{n-1}-2\varphi_n\right)=-\frac{1}{2}\lambda\left|\varphi_n\right|^2\left(\varphi_{n+1}+\varphi_{n-1}\right) \quad (3)$$

のように変形する。ここで左辺は分散を作る部分、右辺はそれを励起する可能性のある非線形力と考えて、右辺の２次元データーを数値的に作成し、それを２次元 FT して交点での強度を調べると、交点で強度が０になっていることがわかる。（図は[6]より。）つまり、非線形力が０なので分散線上のノーマルモードを励起しない。これは、Malomed[7]が embedded ソリトンで指摘したことでもある。

非可積分の非線形格子の場合、例えば

$$\frac{d^2x_n}{dt^2}+k_{2O}x_n+k_{2I}\left(2x_n-x_{n+1}-x_{n-1}\right)=-k_{4O}x_n^3 \quad (4)$$

で仮に走行状態が得られたとする。右辺のフーリエ強度は交点でも強度を持ち、そのため共鳴現象を起こす。

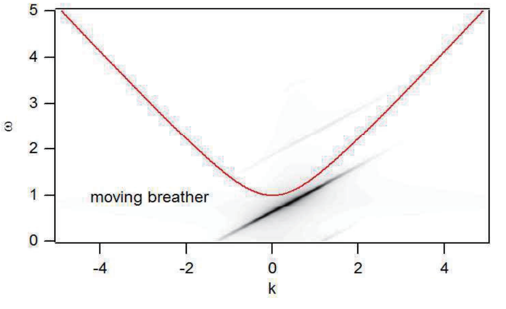

図１.サインゴルドンブリーザーを数値的に ２ 次元 FT して波数空間（k, ω）にそのフーリエ強度を濃淡で表示した例。曲線は線形の分散関係。

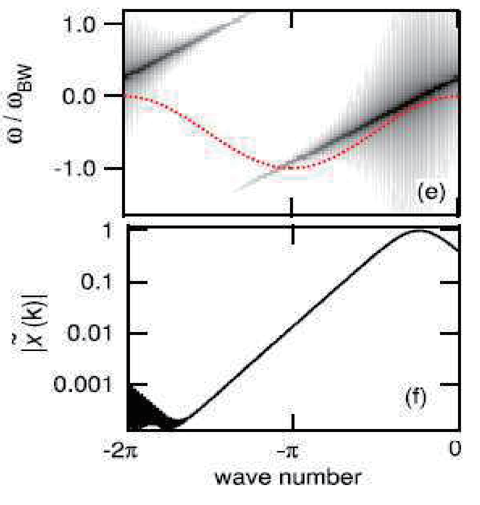

図２ Ablowitz-Ladik ソリトンの場合。正の非線形性のとき。上のパネルの点線は線形の分散関係。直線が分散関係と交わることに注意。下のパネルは直線上のフーリエ強度をプロットしている。交わっても強度はスムースに変化している。解はエンベロープ×キャリアのように書けるが、この直線上のフーリエ強度はエンベロープのフーリエ強度でもある。

この式を

$$\frac{d^2x_n}{dt^2}+k_{2O}x_n+k_{2I}\left(2x_n-x_{n+1}-x_{n-1}\right)=$$
$$-k_{4O}{x_n}^3-k_{4I}\left\{\left(x_n-x_{n+1}\right)^3+\left(x_n-x_{n+1}\right)^3\right\}$$

(5)

と２つの非線形項に変更する。２つは異なる波数依存性を持ち、交点では打ち消すようにできる。図 3 に調整結果の例を示す。[6]この方法の問題点は、固定された位置にのみ０点があることで、速度が変わって交点がずれると、共鳴が起こる。(同様な方法で PN をコントロールすることで ILM を移動させせることが木村らによりなされた。[8] このように PN 問題と共鳴問題は関係があるが同じ条件で両方満たすとは限らない。)

他の方法として、Melvin らは可飽和非線形性を用いている。[9]振幅が大きくなると非線形性が飽和するので、ILM の幅が広がる。このとき局在の中心が格子点と格子間で同等に安定になり、PN が消失し移動しやすくなる。Melvin らによれば連続走行状態で共鳴をなくすためには微調整が必要である。別の高度な方法として、土井‐吉村により対称性を考慮した長距離相互作用ポテンシャルを使う方法も考え出された。[10]2 次元 FT 図を見ると、直線状の強度そのものがブリルアンゾーンを超えては伸びていないようで、それゆえ分散上のノーマルモードを励起しない。微調整は不要でソリトンに近いといえる。

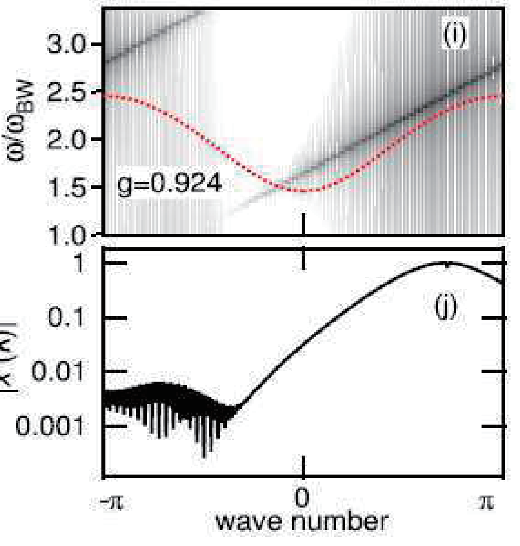

図 3. ２つの非線形項で交点での非線形力を打ち消すと、共鳴現象を抑えることができる。この方法では、交点の位置がずれると、再調整が必要になる。[6]

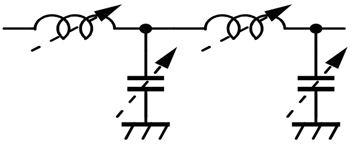

図 4 実験で使用した電気回路格子。各格子点は、容量の小さなキャパシタを通じて進行波励起される。

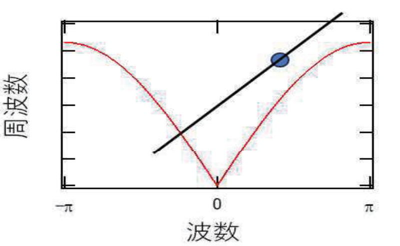

図 5 曲線は分散関係。●で示した位置を進行波励起する。その点を中心に、分散線に沿うように走行状態（直線）を作ることができる。

3A. 電気回路による格子と装置

MEMS 格子のような機械的な振動系でも、走行状態を作ることはできる。[11]速度の周波数変化からでも、かなりのことがわかる。走行状態での共鳴をコントロールすることに興味を持っていた我々は、フーリエ変換と相性の良い、リング形状の格子が容易に作成できる電気回路を用いることにした。非線形デバイスとしては対称的な MOS キャパシタを当初用いていたが、非線形

性が負で分散線の下側にしか局在状態を作れない。[12]正の非線形性の高誘電率系の積層セラミックキャパシタ（MLCC）が使えることがわかり、図 4 に示す回路で実験を行うことにした。F 特性(あるいは Y5V)というクラスの製品は強い非線形性を示す。分散線を図 5 に示す。実験ではエネルギーの散逸を伴う。定常的に走行状態を観察するには励起し続ける必要がある。進行波励起を行うことで、走行状態を作る。格子点の電圧を観察し、2 次元 FT を行うことで直接、共鳴を観察できる。

3B.　自己双対でない場合

図 4 の回路について、非線形素子として市販の MLCC と、(飽和しやすいことを念頭に）漏れ磁束の少ない小型のインダクタを用いた。両方とも、正の非線形性を持ち、振幅が大きくなるに従い共鳴周波数が上昇する。以下コンデンサーを C,インダクターを L と略す。用いたデバイスを LCR メーターで C の場合は DC バイアス電圧を加えながら、L の場合は DC バイアス電流を流しながら測定した。この方法で、それぞれ、微分容量と、微分インダクタンスが測定される。[13]

$$\frac{dQ}{dV}=C_e\left(V\right)=\frac{C_0}{\sqrt{1+V^2/V_0^2}}\ \text{(6A)}\qquad \frac{d\Phi}{dI}=L_e\left(I\right)=\frac{L_0}{1+I^2/I_0^2}\ \text{(6B)}$$

まず、C のみ非線形デバイス、L のみ非線形デバイスの場合の静止形状を図 6 に示す。非線形デバイスの位置に応じて、安定な局在が格子点を中心か、格子間を中心にできることを示している。C も L も非線形デバイスを用いて実験すると、図 7 の結果が得られた。

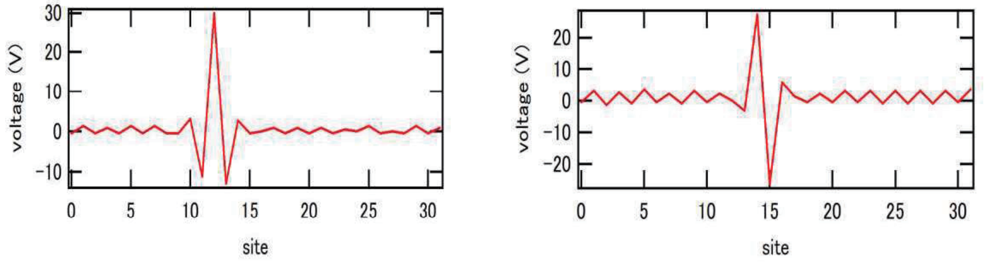

図 6.左　C のみ非線形、右 L のみ非線形の場合の静止形状。格子点での電圧を表示している。

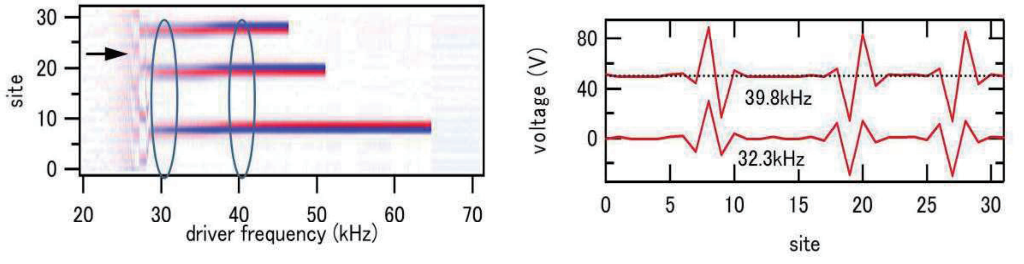

図 7.　左周波数の関数としての静止局在励起の様子。右　途中での振動形状。安定性交代が起こっている。

これらの結果から、用いた非線形デバイスはほぼ同等の非線形性であるけれどもその電流依存性、電圧依存性の関数の違いから安定性交代が起こっていると思われる。また、走行実験から L だけ、C だけ、L-C 両方非線形のどの場合でも、L-C 両方非線形の場合のある一つの周波数を除き共鳴が観察された。この周波数で、L と C のの非線形性が釣り合い、共鳴が観測されなかったと考えられる。このことから、もしも同じ関数形で同じ大きさの非線形性をもつ L,C からなる格子なら共鳴がないことが予想された。

3C. 自己双対の場合

同じ非線形性、すなわち自己双対格子なら、可積分でなくとも共鳴はないことが予想される。電圧の運動方程式は格子点、電流の運動方程式は格子間の運動方程式とみなすことができる。

$$C\left(V_n\right)\frac{d}{dt}V_n = I_{n-1} - I_n \quad \text{(7A)} \qquad L\left(I_n\right)\frac{d}{dt}I_n = V_n - V_{n+1} \quad \text{(7B)}$$

すなわち格子点と格子間の運動方程式が同じとなる。C と L の関数は、後の実験を考えて

$$C\left(V\right) = \frac{C_0}{\sqrt{1+V^2/V_0^{\,2}}} \quad \text{(8A)} \qquad L\left(I\right) = \frac{L_0}{\sqrt{1+I^2/I_0^{\,2}}} \quad \text{(8B)}$$

について調べた。(分母の平方根がない場合、Hirota のソリトン格子[14]になる。また、そのブリーザー解は Bogdan らによって調べられている。[15]) 釣り合いの条件は$C_0V_0^{\,2} = L_0I_0^{\,2}$である。シミュレーションで調べると、非線形性だけでなく、ダンピング項や励起項まですべてが釣り合っているときに共鳴が観察されなかった。[16]

実験を行うためには、式(8B)に従う L を作成する必要がある。手持ちの L は全て式(6B)のような関数形であった。そこで漏れ磁束の少ないトロイダルコアを購入し、作成した複数のインダクタを組合わせて目的の L を作成することを目指した。初めに、エネルギーの関係式$C_0V_0^{\,2} = L_0I_0^{\,2}$からコアのサイズを算出し、妥当と思われる複数の市販コアについて 20 回巻の L を作成し式(6B)の L_0 と I_0 を測定した。これからコア別に巻き数の関数としての L_0 と I_0 を予測する式を作った。L_0 は巻き数の 2 乗に比例し、I_0 は巻き数に逆比例する。この関数を用い、2 から 3 の直列トロイダルインダクターについてそれぞれのコアの巻き数をフィッティングパラメーターとして C の関数から作られた目標の関数に数値フィッティングを行った。結果、2 つの非線形トロイダルインダクタと、1 つの線形固定インダクタの組み合わせで、ドライバーキャパシタを含む非線形コンデンサーと釣り合いが取れることが分かった。[17]式で表現すると

$$\frac{L_{01}}{1+I^2/I_{01}^{\,2}} + \frac{L_{02}}{1+I^2/I_{02}^{\,2}} + L_f \Leftrightarrow \frac{C_0}{\sqrt{1+V^2/V_0^{\,2}}} + C_d \qquad (9)$$

のようになり、数学的には、全く違う関数に見えるけれども、限られた範囲ではあるが実測してみると非常に近いものが作れた。

図８に走行している非線形局在励起の実測例を示す。ドライブ周波数をバンドの周波数頂上に近い 30 k Hz からゆっくり上げていくと、ダンピングが大きい場合に特徴的な複数の走行状態が得られる。[18]周波数を上下させる、あるいはもっと直接的に瞬間的に１点を GND にショートさせると、１つだけ残すことができる。図 9 にその２次元 FT 図を示す。直線状態が観察される。直線を含むある周波数範囲で積算した FT 強度を図 10 に示す。全体的なスペクトルはガウス関数に近い。頂上のへこみは、局在励起がない格子部分の応答（平面波）の影響である。丸で囲まれた部分に共鳴応答が観測されている。共鳴応答と局在励起の（複素）スペクトルの和が反共鳴のような形状をしている。

当初作成した L は、暫定的なドライブコンデンサーの容量を用いていたので、完全にバランスされていなかった。固定インダクターを直列に追加し微調整を行った。図 11 に微調整の結果を示す。(a)は未調整、(b)は 47 μ H の追加、(c)は 100 μ H 追加のスペクトルである。(b)の場合で共鳴信号が少なくなっていることがわかる。また、ドライブ周波数を変えると、速度が変化し、交点がずれるが、にもかかわらず共鳴が少なくなっていることがわかる。このことから、C と L がバランスされた場合（すなわち自己双対）ならば、共鳴がなくなることを実験で確認できた。

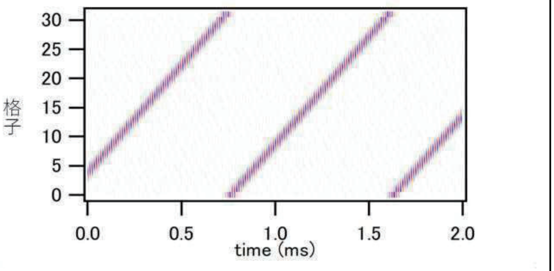

図 8.走行する局在励起の実測例。FT してみなければ共鳴の有無はわかりにくい。

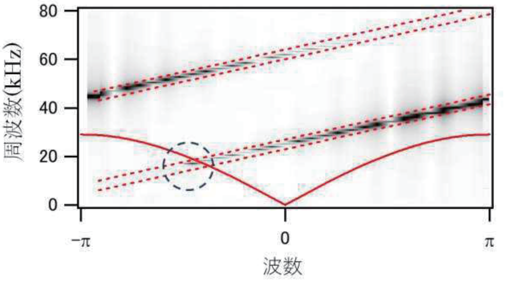

図 9　2 次元 FT の例。丸で示した部分で共鳴がおこる。直線状の状態の上下の点線の間で FT 強度を積算した。（速度一定で安定走行しているので、スペクトルは非常に狭い。）

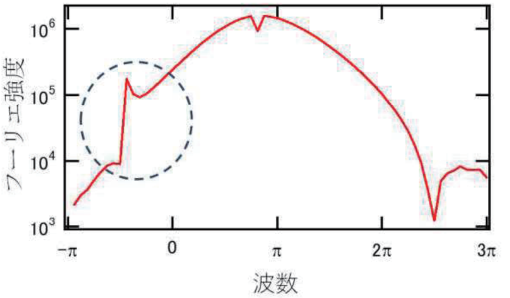

図 10　バランスされていない例。頂上のへこみの位置がドライブ波数。丸で示された部分に共鳴が見える。2 つの信号の和による反共鳴のような非対称スペクトルをしている。

3D.　共鳴について

当初は、共鳴が存在しない理由は自己双対であるので電流の式と電圧の式が同等であり、格子点と格子間に差がないからであると考えてきた。しかしながらシミュレーションを詳しく調べると、２回目の交差で共鳴がある場合が確認された。図 12 にそのような例を示す。

共鳴の有無については、２章で説明したように、２階の微分方程式の非線形力で議論すること

もできる。長い計算の後、１回目の交差は無共鳴、２回目は共鳴するという結論が得られる。しかしここでは、一階の微分方程式２つで議論する方がより自然と思われる。（計算不要、はるかに説明が短く、楽になる。）その場合、右辺はベクトルのように２成分となるので

$$L_0 \frac{d}{dt} I_n - V_n + V_{n+1} = \left(L_0 - L\left(I_n\right)\right)\frac{d}{dt} I_n$$

$$C_0 \frac{d}{dt} V_n - I_{n-1} + I_n = \left(C_0 - C\left(V_n\right)\right)\frac{d}{dt} V_n$$

(10)

とする。右辺が非線形力に相当する。前進する局在励起の場合、右辺の比は電圧：電流×Z_0は 1:1 となる。(Z_0は特性インピーダンス$\sqrt{L_0 / C_0}$）左辺は分散を形作る部分であるが、前進波のブランチは比が 1:1、後進波のブランチは比が 1:-1 となる。

今まで用いてきた２次元 FT は電圧情報でのみ計算されてきており、電流の情報を用いていないので、この２つのブランチを正確には分離できない。電圧と電流両方を込みに入れて、電圧、電流、電圧、電流のようにデーターを作り FT 変換を行うことを考える。格子間隔が半分になるのでブリルアンゾーンは２倍すなわち、（-π，π)から(-2π，2π)に広がり、(-2π，0)が後進波、(0, 2π)が前進波ブランチになる。１回目の交差は、後進波との交差であり、ベクトルは直交しノーマルモードを励起できない。さらに、図 12 の２回目の交差は、前進波ブランチとの交差であることがわかった。前進する局在励起の振動パターンは、前進波のノーマルモードのパターンと直交せず、励起が観測されたと理解できる。

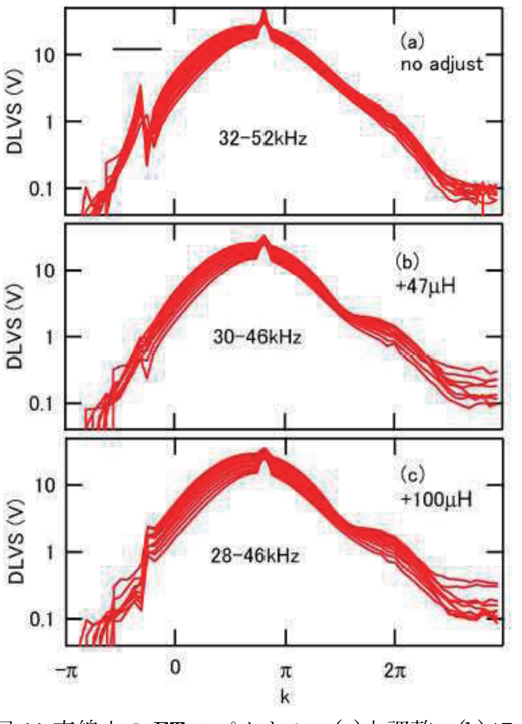

図 11.直線上の FT スペクトル。(a)未調整、(b)47μH 追加、(c)100μH 追加。(a)と(c)では反共鳴の様子が反転している。(b)ではドライブ周波数がかわっても、共鳴が非常に減っていることがわかる。

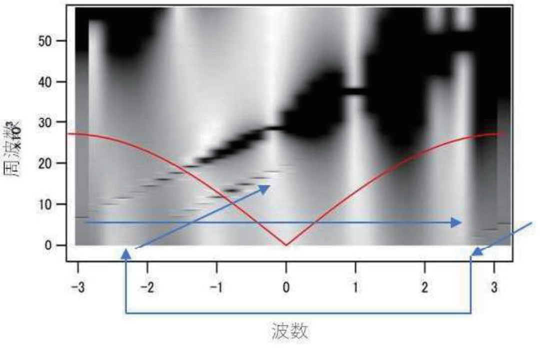

図 12　シミュレーションによる２回目の交差の検証。直線状の状態が、k=-πの右端から、πの左端へ矢印のようにつながっている。周波数が負の領域へ入ると、波数も反転するので左側へつながり、右上へ延長されてゆく。そこで再び分散線と交差する。この場合は共鳴が起こっているようだ。

4. まとめ

まとめると、以下のようなことが達成され、また分かった。

1. 自己双対格子を実際に作ることができた。
2. 速度によらず共鳴が著しく減少する様子が確認できた。
3. 前進する非線形局在励起の電圧と電流×Z_0の比が 1:1 で、交差する分散線の後進波ブランチのノーマルモードの比は 1:-1 であるので共鳴しないのではないかと考えられる。

謝辞　この研究は、コーネル大の A. J. Sievers 教授との共同研究です。

参考文献

[1] A. J. Sievers and S. Takeno, Phys. Rev. Lett. **61**, 970 (1988); その少し前には A. S. Dolgov, Fiz. Tverd. Tela (Leningrard)**28**, 1641(1986) [Sov. Phys. Solid State **28**, 907 (1986)]
[2] D. K. Campbell, S. Flach, and Y. S. Kivshar, Phys. Today **57(1)**, 43 (2004).
[3] S. Flach and C. R. Willis, Phys. Rep. **295**, 181 (1998); S. Flach and A. V. Gorbach, Phys. Rep. **467**, 1 (2008).
[4] J. B. Page, Physical Rev. B**41**, 7835 (1990); K. W. Sandusky and J. B. Page, Phys. Rev. B**50**, 866(1994).
[5] たとえば、"Physics of Solitons", T. Dauxois and M. Peyrard, Cambridge Univ. Press. (2006)
[6] M. Sato, T. Nakaguchi, T. Ishikawa and A. J. Sievers, Chaos **25**, 103122 (2015)
[7] B. A. Malomed, J. Fujioka, A. Espinosa-Ceron, R. F. Rodriguez, and S. Gonzalez, Chaos **16**, 013112 (2006).
[8] M. Kimura and T. Hikihara, Phys. Lett. A 372, 4592(2008); M. Kimura and T. Hikihara, Chaos **19**, 013138 (2009).
[9] T. R. O. Melvin, A. R. Champneys, P. G. Kevrekidis, and J. Cuevas, Phys. Rev. Lett. **97**, 124101 (2006).
[10] Y. Doi and K. Yoshimura, J. Phys. Soc. Jpn. 78, 034401(2009); Y. Doi and K. Yoshimura, Phys. Rev. Lett. **117**, 014101 (2016)
[11] M. Sato, N. Fujita, Y. Takao, S. Nishimura, W. Shi, Y Sada, Y. Soga and A. J. Sievers, NOLTA, **3**, pp87-102 (2012).
[12] 佐藤政行, 坂井正斗, 西崎茜, 宮坂風輝, 数理解析研究所講究録 **2153**, 132-142(2020).
[13] M. Sato, H. Furusawa, M. Sakai, Y. Soga, and A. J. Sievers, Chaos **32**, 033118 (2022).
[14] R. Hirota, J. Phys. Soc. Jpn. **35**, 289 (1973).
[15] M. M. Bogdan and D. V. Laptev, J. Phys. Soc. Jpn. **83**, 064007 (2014).
[16] M. Sato,H. Furusawa, Y. Soga, and A. J. Sievers, Phys. Rev. E **107**, 034202 (2023)
[17] M. Sato, H. Furusawa, M. Sakai, Y. Soga and A. J. Sievers, Chaos **33**,073149(2023)
[18] M. Sato, M. Sakai, and A. J. Sievers, in 13th Chaotic Modeling and Simulation, Springer Proceedings in Complexity, edited by C. H. Skiadas and Y. Dimotikalis (Springer, 2021), pp. 783-796.