グラフのガロア点について

山形大学・理学部　深澤 知
Satoru Fukasawa
Faculty of Science,
Yamagata University

本稿では, 三枝崎剛氏 (早稲田大学) との共同研究により得られた結果 [4] について報告する.

1. 代数幾何におけるガロア点

代数幾何において, 平面曲線に対するガロア点が次のように定義されている ([3, 8, 10]):

定義 1 (吉原, 1996)**.** $C \subset \mathbb{P}^2$ を代数閉体上定義された次数 $d \geq 4$ の既約な平面代数曲線とし, $P \in C$ を C の非特異点とする. 点 P からの射影 $\pi_P : C \to \mathbb{P}^1$ が誘導する関数体の拡大 $k(C)/\pi_P^* k(\mathbb{P}^1)$ がガロア拡大であるとき, P は C の**ガロア点**であるという.

ガロア点理論の重要な成果のひとつは, ガロア点の配置により, 代数多様体の分類結果が得られていることである (例えばサーベイ論文 [3] を参照). 本稿では, ガロア点のグラフ理論類似について考えたい.

2. グラフの因子理論, HARMONIC GROUP ACTION

Baker–Norine [1] により, グラフ上の因子とその線形系が導入され, 有限グラフのリーマン・ロッホの定理が証明されている. その後, 代数曲線に対する種々の結果のグラフ類似が得られている. 特に, 浦川 [9] により導入されたグラフの harmonic morphism (及びその一般化) は, グラフ間の被覆のフルヴィッツ公式を与えるのに用いられている. また, 代数曲線のガロア被覆に対応する概念として, harmonic group action が Corry [2] によって導入された.

ここで, グラフ上の因子とその線形系の定義 (ならびに関連する諸概念) を確認する. 以下, 本稿では, グラフ G は有限, 無向で単純であるとする. 頂点の集合を $V(G)$, 辺の集合を $E(G)$ と表す. G の頂点によって生成される自由アーベル群

$$\mathrm{Div}(G) := \bigoplus_{P \in V(G)} \mathbb{Z} \cdot P = \left\{ \sum_{P \in V(G)} a_P P \;\middle|\; a_P \in \mathbb{Z} \right\}$$

の元を因子 (divisor) という. 因子 $D = \sum_{P \in V(G)} a_P P \in \mathrm{Div}(G)$ に対して,

$$\deg(D) := \sum_{P \in V(G)} a_P, \ D(P) := a_P,$$

と定める．任意の $P \in V(G)$ に対して $D(P) \geq 0$ であるとき, D は有効因子 (effective divisor) であるといい, $D \geq 0$ と表す．写像 $f : V(G) \to \mathbb{Z}$ に対して

$$\Delta(f) := \sum_{P \in V(G)} \sum_{\overline{PQ} \in E(G)} (f(P) - f(Q))P$$

と定め, $\Delta(f)$ を主因子 (principal divisor) という．2 つの因子 D, D' に対して写像 $f : V(G) \to \mathbb{Z}$ が存在して

$$D - D' = \Delta(f)$$

と表されるとき, D と D' は線形同値 (linearly equivalent) であるといい, $D \sim D'$ と表す．因子 D に対して

$$|D| := \{E \in \mathrm{Div}(G) \mid E \geq 0, E \sim D\}$$

と定め, $|D|$ を線形系 (linear system) という．さらに,

$$\max\{s \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid \text{任意の } E \ (E \geq 0, \deg E = s) \text{ に対して } |D - E| \neq \emptyset\}$$

を $r(D)$ と定め, D のランクという．$|D| = \emptyset$ のときは, $r(D) = -1$ と定める．

harmonic group action については便利な言い換えがあるので, 定義を述べる代わりに, その言い換えを述べておく．

命題 1. $\Gamma < \mathrm{Aut}(G)$ をグラフ G の自己同型群の部分群とする．Γ が G に harmonically に作用することの必要十分条件は, 任意の頂点 $P \in V(G)$ に対して, 安定化群 Γ_P が P を通る辺集合に freely に作用することである．

3. グラフのガロア点

代数幾何における射影や関数体のガロア拡大についても, 因子の線形系や自己同型群の言葉を用いて言い換えが可能である．そのことと, グラフに対して因子の線形系と harmonic group action が導入されていることを鑑み, 我々は次の定義を与えた．

定義 2 ([4])**.** G を 2-edge-connected なグラフとし, D を $r(D) = 2$ をみたす因子とする．次の 3 つの条件がみたされるとき, 頂点 $P \in V(G)$ は線形系 $|D|$ に関する**ガロア点**であるという:

(1) $r(D - P) = 1$,
(2) 任意の $Q \in V(G)$ に対して ($Q = P$ の場合も含む), $r(D - P - Q) = 0$ が成り立つ,
(3) 位数 $\deg(D) - 1$ の部分群 $H < \mathrm{Aut}(G)$ と 2 つの因子 $E_1, E_2 \in |D - P|$ が存在して次をみたす:
  (i) $|V(G/H)| > 1$,
  (ii) H は G に harmonically に作用する,

(iii) 任意の $\sigma \in H$ に対し, $\sigma(E_1) = E_1$, $\sigma(E_2) = E_2$ が成り立つ.

注意 1. 各条件の, 代数幾何における意味について補足する. $r(D) = 2$ という条件は, 非特異射影代数曲線 X から射影平面 $\mathbb{P}^2$ への有理写像 $\varphi_{|D|} : X \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ が定まることと対応している. 条件 (1) は, $\varphi_{|D|}$ が点 P で定義されていることに対応し, 同時に X から射影直線 $\mathbb{P}^1$ への有理写像 $\varphi_{|D-P|} : X \dashrightarrow \mathbb{P}^1$ が定まることを意味する. 条件 (2) は, 点 $\varphi_{|D|}(P)$ が平面曲線 $\varphi_{|D|}(X)$ の非特異点であることに対応し, 同時に $\varphi_{|D-P|}$ が ($\varphi_{|D|}$ と射影 $\pi_{\varphi_{|D|}(P)}$ の) 合成写像 $\pi_{\varphi_{|D|}(P)} \circ \varphi_{|D|}$ と一致することを意味する. 条件 (3) は, 射影 $\pi_{\varphi_{|D|}(P)} : \varphi_{|D|}(X) \to \mathbb{P}^1$ がガロア拡大を呈することから来ている.

研究集会の発表においても述べたが, 条件 (1)(2)(3) は, 代数幾何においてはガロア点であるための必要条件であり, 必要十分条件とするにはやや弱い. 必要十分条件とするために条件を並べることは容易であるが「無駄なく簡潔に」条件を選び出すことにやや困難がある. いくつか選択肢があるが, どれかを選択し, 近日中に公開したいと考えている. 修正する予定のガロア点の定義では本稿のものより強い条件を課すことになる. 本稿で扱う例 (完全グラフ, 車輪グラフ) では強い意味でもガロア点となり, 本稿の主定理はそのまま成り立つ. いずれにせよ, 本稿ではこの弱い定義のままでガロア点を扱う.

尚, 日本数学会年会のアブストラクト [5] の注意 1 では「代数幾何において同値である」というつもりで書いていたので, ここには誤りが含まれている.

ガロア点が存在するグラフの例として, 完全グラフと車輪グラフがある. それらのグラフについては, 次のことがわかった.

命題 2. K_n を n 個の頂点からなる完全グラフとし, $n \geq 3$ とする. $V(K_n) = \{P_1, \ldots, P_n\}$, $D = P_1 + \cdots + P_n$ とする. このとき, 次が成り立つ:

(a) $r(D) = 2$,
(b) 任意の $P \in V(K_n)$ に対して, $r(D - P) = 1$ である,
(c) 任意の $P, Q \in V(K_n)$ に対して, $r(D - P - Q) = 0$ である,
(d) 任意の $P \in V(K_n)$ は $|D|$ に関するガロア点である.

命題 3. W_n を n 個の頂点からなる車輪グラフとし, $n \geq 5$ とする. つまり,

$$\begin{aligned} V(W_n) &= \{P_1, \ldots, P_n\}, \\ E(W_n) &= \{\overline{P_1 P_i} \mid i \in \{2, \ldots, n\}\} \cup \{\overline{P_i P_{i+1}} \mid i \in \{2, \ldots, n-1\}\} \\ &\quad \cup \{\overline{P_n P_2}\} \end{aligned}$$

とする. $D = P_1 + \cdots + P_n$ とするとき, 次が成り立つ:

(a) $r(D)=2$,
(b) 任意の $P \in V(W_n)$ に対して, $r(D-P)=1$ である,
(c) 任意の $P, Q \in V(W_n)$ に対して, $r(D-P-Q)=0$ である,
(d) 頂点 P_1 は $|D|$ に関するガロア点である,
(e) 頂点 $P_2, \ldots, P_n$ は $|D|$ に関してガロア点ではない.

特に, $|D|$ に関するガロア点はちょうど 1 個である.

4. 主定理

代数幾何と同じようにして, ガロア点が「グラフの分類」に利用できると期待される. その方向性の第一歩として, 次のような完全グラフの特徴づけを与えることに成功した:

定理 ([4])**.** G を 2-edge-connected なグラフとし, $V(G)=\{P_1, \ldots, P_n\}$, $D=P_1+\cdots+P_n$ とする. $n \geq 3$ とするとき, 次は同値である:
(1) グラフ G は完全グラフ K_n と一致する,
(2) $r(D)=2$ であり, $|D|$ に関する 2 つのガロア点が存在する.

特にこのとき, すべての頂点がガロア点である.

ガロア点の個数に注目すれば, 次が得られる.

系. G を 2-edge-connected なグラフとし, $n \geq 3$, $V(G)=\{P_1, \ldots, P_n\}$, $D=P_1+\cdots+P_n$ とする. $r(D)=2$ を仮定する. このとき, $|D|$ に関するガロア点の個数は 0, 1 または n のいずれかである. さらに, 個数が n であるための必要十分条件は $G=K_n$ であることである.

注意 2. $D=P_1+\cdots+P_n$, $r(D)=2$ であって, $|D|$ に関するガロア点がひとつもないグラフも存在する. $n=4$ であって「完全グラフからひとつの辺を取り除いたグラフ」がその例となる.

5. 補足, 今後の展開

定義 2 にある “$r(D)=2$” という条件は「平面曲線」のグラフ理論での対応物を想定するのに必要で, 代数幾何では “sublinear system” の概念があるのでこの条件をつける必要がない. グラフ理論では (線形系 $|D|$ の構造が複雑なため?) sublinear system の概念は導入されていないと思われる. したがって, 次が課題として残っている.

問題. 定義 2 を一般化し, “$r(D)=2$” という仮定を外すことは可能か? 定義 1 に相当するグラフでの表現は何か?

Baker–Norine [1] が出版されてすぐにトロピカル曲線に対するリーマン・ロッホの定理が証明された ([6, 7]). それと同じような流れで, 「トロピカル曲線に対するガロア点」も同様に定義することができる. 有限グラフ, トロピカル曲線の他にも, リーマン・ロッホの定理は様々な対象に対して証明されている. 因子の線形系とガロア被覆が適切に定

義された対象であればガロア点も定義されるであろう, と著者は考えている.

References

[1] M. Baker and S. Norine, Riemann–Roch and Abel–Jacobi theory on a finite graph, *Adv. Math.* **215** (2007), 766–788.

[2] S. Corry, Genus bounds for harmonic group actions on finite graphs, *IMRN* **19** (2011), 4515–4533.

[3] S. Fukasawa, Galois points for a plane curve in arbitrary characteristic, *Geom. Dedicata* **139** (2009), 211–218.

[4] S. Fukasawa and T. Miezaki, Galois points for a finite graph, preprint, arXiv:2308.05293.

[5] 深澤知・三枝崎剛, グラフのガロア点について, 日本数学会 2024 年度年会応用数学分科会講演アブストラクト, pp.103–106.

[6] A. Gathmann and M. Kerber, A Riemann–Roch theorem in tropical geometry, *Math. Z.* **259** (2008), 217–230.

[7] G. Mikhalkin and I. Zharkov, Tropical curves, their Jacobians and theta functions, Curves and abelian varieties, pp.203–230, *Contemp. Math.* **465**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008.

[8] K. Miura and H. Yoshihara, Field theory for function fields of plane quartic curves, *J. Algebra* **226** (2000), 283–294.

[9] H. Urakawa, A discrete analogue of the harmonic morphism and Green kernel comparison theorems, *Glasg. Math. J.* **42**, no. 3 (2000), 319–334.

[10] H. Yoshihara, Function field theory of plane curves by dual curves, *J. Algebra* **239** (2001), 340–355.