

有限群の元の位数に関する和と deflation 写像について

近畿大学大学院 総合理工学研究科 小島 悠靖

Yuya Kojima

Faculty of Science and Engineering,
Graduate School of Science and Engineering,
Kindai University

概要

近年の研究により、有限群 G の元の位数に関する量の和と G の構造との間の関係性が明らかになってきている。また、有限群の Burnside 環の理論は、表現論における古典的な道具である。本稿では、元の位数に関する量の和の、係数拡大した Burnside 環を用いた表示を、Chigira 先生、Oda 先生との共同研究 [5] に基づいて紹介する。

1 先行研究との関わり

G を有限群とする。 G の位数を $|G|$, $g \in G$ の位数を $\text{o}(g)$ で表す。2009 年の Amiri と Jafarian Amiri, Isaacs の研究により、有限群の構造とその元の位数の和 $\psi(G) = \sum_{g \in G} \text{o}(g)$ との間の関連性が示唆された [1]。その後、様々な研究者によって、元の位数の和、もしくはこれに関連する量による有限群の特徴付けが調べられている。2 つ例を挙げよう。

- 任意の有限群 G に対して、

$$\psi(G) \leq \frac{211}{1617} \psi(C_{|G|})$$

が成り立ち、等号成立は $G \cong A_5 \times C_m$ ($\gcd(m, 30) = 1$) であるとき、かつそのときに限る [2, Main Theorem]。ここで、 C_m ($m \in \mathbb{N}$) は位数 m の巡回群を表す。

- 有限群 G と実数 r, s に対して、 $R_G(r, s) = \sum_{g \in G} \frac{\text{o}(g)^s}{\varphi(\text{o}(g))^r}$ とおく。このとき、任意の $r < 0$ に対して、

$$R_G(r, r) \leq R_{C_{|G|}}(r, r)$$

が成り立ち、等号成立は G が冪零であるとき、かつそのときに限る [6, Theorem 4]。

今回、我々は、 $\psi(G)$ などの有限群の元の位数に関する量の和を、係数拡大した Burnside 環の中で表示する方法を得た。しかし、先行研究にあるような有限群の構造を調べるような応用は見つかっておらず、あくまでも表示を得たのみであることは強調しておきたい。

2 準備

G を有限群, k を標数 0 の体とする. G の部分群全体の集合を $S(G)$ と書き, $S(G)$ 上の同値関係 $=_G$ を

$$H =_G K \iff \text{ある } g \in G \text{ が存在して } gHg^{-1} = K \quad (H, K \leq G)$$

で定める. さらに, 商集合 $S(G)/=_G$ を s_G で表し, s_G の完全代表系を (s_G) と表す.

G 集合 X の同型類を $[X]$ で表す. 推移的 G 集合の同型類全体を基底とする自由 $\mathbb{Z}$ 加群

$$B(G) = \langle [G/H] \mid H \in (s_G) \rangle_{\mathbb{Z}}$$

を考える. $H, K \leq G$ に対して, G/H と G/K の直和の同型類 $[(G/H) \sqcup (G/K)]$ を $[G/H] + [G/K]$ とみなすことにより, 任意の有限 G 集合の同型類は $B(G)$ の元だと思える. さらに, $B(G)$ における積 $\times$ を

$$[G/H] \times [G/K] = [G/H \times G/K]$$

と定めれば, $B(G)$ は $[G/G]$ を単位元とする可換環となる. この $B(G)$ を G の **Burnside 環** (Burnside ring of G) と呼ぶ. 本稿では, $k \otimes_{\mathbb{Z}} B(G)$ を $kB(G)$ で表す.

$H \leq G$ とする. 任意の G 集合 X に対して, その H における固定点集合 $\{x \in X \mid \forall h \in H (hx = x)\}$ を X^H で表す. 対応 $[G/K] \mapsto |(G/K)^H|$ ($K \leq G$) を線形に拡張して得られる $B(G)$ から $\mathbb{Z}$ への写像を Φ_H で表す. 本稿では, 任意の $u \in kB(G)$ に対して, $\left(k \otimes_{\mathbb{Z}} \Phi_H\right)(u)$ を $|u|$ で表す.

N を G の正規部分群とする. 任意の G 集合 X に対して, その N 軌道全体の集合 $N \backslash X$ への G/N の作用が自然に定まる. 実際, $gN.Nx := N(gx)$ ($gN \in G/N, Nx \in N \backslash X$) とすればよい. したがって, $B(G)$ から $B(G/N)$ への **deflation 写像** $\text{Def}_{G/N}^G$ が

$$\text{Def}_N^G([X]) = [N \backslash X]$$

によって定まる. 本稿では, $k \otimes_{\mathbb{Z}} \text{Def}_{G/N}^G: kB(G) \rightarrow kB(G/N)$ を $k\text{Def}_{G/N}^G$ で表す.

Poset $(S(G), \leq)$ の Möbius 関数 $\mu: S(G) \times S(G) \rightarrow \mathbb{Z}$ は, 帰納的に

$$\mu(K, H) = \begin{cases} 1 & (K = H) \\ - \sum_{K \leq L < H} \mu(K, L) & (K < H) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

で定義される. この μ を用いることにより, $kB(G)$ の原始的冪等元を具体的に記述することができる.

補題 2.1 (Gluck [7], Yoshida [8]) $H \leq G$ に対して, $kB(G)$ の元 e_H^G を

$$e_H^G = \frac{1}{|N_G(H)|} \sum_{K \leq H} |K| \mu(K, H) [G/K]$$

で定める. このとき, $\{e_H^G \mid H \in (s_G)\}$ は $kB(G)$ の原始的冪等元全体の集合である.

これまでに定義した写像による e_H^G たちの像は以下のように計算される.

補題 2.2 $H, K \leq G$ に対して

$$(k \otimes \Phi_K)(e_H^G) = \begin{cases} 1 & (H =_G K) \\ 0 & (H \neq_G K) \end{cases}$$

である.

補題 2.3 (Bouc [3, Theorem 5.2.4.4]) $H \leq G$, $N \trianglelefteq G$ に対して,

$$\text{Def}_{G/N}^G(e_H^G) = \frac{(\text{N}_G(HN) : HN)}{(\text{N}_G(H) : H)} m_{H, H \cap N} e_{HN/N}^{G/N}$$

である. ここで, $N \trianglelefteq G$ に対して

$$m_{G,N} = \frac{1}{|G|} \sum_{\substack{X \leq G \\ XN=G}} |X| \mu(X, G)$$

である.

ここで, 補題 2.3 に現れた量 $m_{G,N}$ に関する話題をひとつ紹介したい. $m_{G,N} \neq 0$ となる最大の正規部分群 N を 1 つ取り, $\beta(G) = G/N$ と置く. この $\beta(G)$ は同型を除き一意に定まる. さらに, 任意の非自明な正規部分群 $M \trianglelefteq \beta(G)$ に対して $m_{\beta(G),M} = 0$ が成り立つが, これは $\beta(G)$ が B 群の定義を満たすことに他ならない [3, Theorem 5.4.11]. このとき, G が冪零であることと, $\beta(G)$ が冪零であることが同値ではないかと予想されている [4, Conjecture A]. この予想は, G が可解である場合は正しいことが Bouc により示されている [4, Theorem 3.1].

閑話休題, 本稿で扱う $m_{G,N}$ の性質を述べる.

補題 2.4 (Bouc [3, Proposition 5.6.1]) 任意の有限群 G に対して,

$$m_{G,G} = \begin{cases} \frac{\varphi(|G|)}{|G|} & (G: \text{cyclic}) \\ 0 & (G: \text{non-cyclic}) \end{cases}.$$

3 主結果

a を s_G から k への写像, $\mathcal{S}$ を s_G の部分集合とする. また, $[H]_G \in s_G$ の a による像を a_H と表すことにする. このとき, $\sigma_a^{\mathcal{S}} \in k\text{B}(G)$ を

$$\sigma_a^{\mathcal{S}} = \sum_{H \in (s_G)} a_H e_H^G$$

と定める. 特に, $\mathcal{S} = s_G$ のときは, $\sigma_a^{\mathcal{S}}$ を σ_a^G と表す.

定理 3.1 (C-K-O [5, Theorem 1.1]) 上述の設定の下, 任意の $N \trianglelefteq G$ に対して

$$\left| k\text{Def}_{G/N}^G \sigma_a^{\mathcal{S}} \right| = \frac{1}{|N|} \sum_{g \in \mathcal{S}'} a_{\langle g \rangle}$$

が成り立つ. ここで, $\mathcal{S}' = \{g \in N \mid [\langle g \rangle]_G \in \mathcal{S}\}$ である.

証明 補題 2.3 より,

$$\begin{aligned} k\text{Def}_{G/N}^G \sigma_a^{\mathcal{S}} &= \sum_{H \in (\mathcal{S})} a_H k\text{Def}_{G/N}^G e_H^G \\ &= \sum_{H \in (\mathcal{S})} a_H \frac{(\text{N}_G(HN) : HN)}{(\text{N}_G(H) : H)} m_{H, H \cap N} e_{HN/N}^{G/N} \\ &= \sum_{\substack{H \in (\mathcal{S}) \\ H \leq N}} a_H \frac{(G : N)}{(\text{N}_G(H) : H)} m_{H, H} e_{N/N}^{G/N} \\ &\quad + \sum_{\substack{H \in (\mathcal{S}) \\ H \not\leq N}} a_H \frac{(\text{N}_G(HN) : HN)}{(\text{N}_G(H) : H)} m_{H, H \cap N} e_{HN/N}^{G/N} \end{aligned} \quad (3.1)$$

が成り立つ. ここで, 任意の $H \leq G$ に対して

$$HN/N =_G N/N \iff H \leq N$$

が成り立つから, 補題 2.2 より, 式 (3.1) の第 2 項目は $\Phi_{N/N}$ を作用させると 0 になる. したがって, 補題 2.4 より

$$\begin{aligned} \left| k\text{Def}_H^G \sigma_a^{\mathcal{S}} \right| &= \sum_{\substack{H \in (\mathcal{S}) \\ H \leq N}} a_H \frac{(G : N)}{(\text{N}_G(H) : H)} m_{H, H} \\ &= \frac{1}{|N|} \sum_{\substack{H \in (\mathcal{S}) \\ H \leq N \\ H: \text{cyclic}}} (G : \text{N}_G(H)) \varphi(|H|) a_H \end{aligned}$$

となる. 任意の $H \leq G$ に対して $|[H]_G| = (G : \text{N}_G(H))$ だから,

$$\begin{aligned} \frac{1}{|N|} \sum_{\substack{H \in (\mathcal{S}) \\ H \leq N \\ H: \text{cyclic}}} (G : \text{N}_G(H)) \varphi(|H|) a_H &= \frac{1}{|N|} \sum_{\substack{H \in \cup \mathcal{S} \\ H \leq N \\ H: \text{cyclic}}} \varphi(|H|) a_H \\ &= \frac{1}{|N|} \sum_{\substack{\langle g \rangle \in \cup \mathcal{S} \\ g \in N}} a_{\langle g \rangle} \\ &= \frac{1}{|N|} \sum_{g \in \mathcal{S}'} a_{\langle g \rangle} \end{aligned}$$

を得る. ここで, $\cup \mathcal{S} = \bigcup_{[H]_G \in \mathcal{S}} [H]_G$ である. ■

特に, $\mathcal{S} = s_G$ のときは $\mathcal{S}' = N$ なので,

$$\left| k\text{Def}_{G/N}^G \sigma_a^G \right| = \frac{1}{|N|} \sum_{g \in N} a_{\langle g \rangle}$$

が分かる.

4 主結果の応用

定理 3.1 の応用例として, 元の位数の逆数の和と部分群の個数との間の関係式を導き, 本稿の終わりとする.

まず, 次の命題が従う.

命題 4.1 (C-K-O [5, Proposition 3.5]) 任意の $N \trianglelefteq G$ に対して,

$$\sum_{g \in G} a_{\langle g \rangle} = \sum_{H \leq G} |N \cap H| a_H + \sum_{H \leq G} \sum_{K < H} |N \cap K| \mu(K, H) a_H$$

が成り立つ.

証明 補題 2.1 より,

$$\begin{aligned} \left| k \text{Def}_{G/N}^G \sigma_a^G \right| &= \left| \sum_{H \in (\mathfrak{s}_G)} a_H \frac{1}{|\text{N}_G(H)|} \sum_{K \leq H} |K| \mu(K, H) [G/NK] \right| \\ &= \sum_{H \in (\mathfrak{s}_G)} a_H \frac{1}{|\text{N}_G(H)|} \sum_{K \leq H} |K| \mu(K, H) (G : NK) \\ &= \sum_{H \leq G} \left(\sum_{K \leq H} \frac{|N \cap K| \mu(K, H)}{|N|} \right) a_H \\ &= \frac{1}{|N|} \left(\sum_{H \leq G} |N \cap H| a_H + \sum_{H \leq G} \sum_{K < H} |N \cap K| \mu(K, H) a_H \right) \end{aligned}$$

が分かる. したがって, 定理 3.1 より

$$\sum_{g \in G} a_{\langle g \rangle} = \sum_{H \leq G} |N \cap H| a_H + \sum_{H \leq G} \sum_{K < H} |N \cap K| \mu(K, H) a_H$$

を得る. ■

命題 4.1 を $N = G$, $a_H = |H|^{-1}$ の場合に適用することで, 部分群の個数と元の位数の逆数の和との間の関係式を得ることができる.

定理 4.2 (C-K-O [5, Corollary 3.6]) 任意の有限群 G に対して

$$\sum_{g \in G} \frac{1}{o(g)} = |\mathfrak{S}(G)| + \sum_{H \leq G} \sum_{K < H} \frac{\mu(K, H)}{(H : K)}$$

が成り立つ.

謝辞

今回の研究集会で講演の機会を頂いたことに感謝申し上げます。また、研究代表者である中空氏におきましては、研究集会を開催して頂きありがとうございました。

参考文献

- [1] Habib Amiri, S. M. Jafarian Amiri, and I. M. Isaacs, *Sums of element orders in finite groups*, Communications in Algebra **37** (2009), no. 9, 2978–2980. MR 2554185
- [2] Afsane Bahri, Behrooz Khosravi, and Zeinab Akhlaghi, *A result on the sum of element orders of a finite group*, Archiv der Mathematik **114** (2020), no. 1, 3–12. MR 4047654
- [3] Serge Bouc, *Biset functors for finite groups*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1990, Springer-Verlag, Berlin, 2010. MR 2598185
- [4] ———, *A conjecture on B -groups*, Mathematische Zeitschrift **274** (2013), no. 1-2, 367–372. MR 3054334
- [5] Naoki Chigira, Yuya Kojima, and Fumihito Oda, *An expression for values on element orders of finite groups*, unpublished.
- [6] Martino Garonzi and Massimiliano Patassini, *Inequalities detecting structural properties of a finite group*, Communications in Algebra **45** (2017), no. 2, 677–687. MR 3562530
- [7] David Gluck, *Idempotent formula for the Burnside algebra with applications to the p -subgroup simplicial complex*, Illinois Journal of Mathematics **25** (1981), no. 1, 63–67. MR 602896
- [8] Tomoyuki Yoshida, *Idempotents of Burnside rings and Dress induction theorem*, Journal of Algebra **80** (1983), no. 1, 90–105. MR 690705