過去の行動変容を考慮に入れた感染症の数理モデルに対する平衡点の安定性解析 *

お茶の水女子大学　人間文化創成科学研究科　小原奈未

1　序論

感染症の数理モデルは，Kermack と McKendric によって提唱されて以降，様々な状況に対応するモデルが提唱され，解析が行われてきた．それらの数理モデルの中で出生と死亡を考慮した感染症の数理モデルとして以下が知られている：

$$\begin{cases} \dfrac{dS(t)}{dt} = b - \beta S(t)I(t) - \mu S(t), \\ \dfrac{dI(t)}{dt} = \beta S(t)I(t) - (\mu+\gamma)I(t), \\ \dfrac{dR(t)}{dt} = \gamma I(t) - \mu R(t). \end{cases} \tag{SIR}$$

ここで, $S(t)$, $I(t)$, $R(t)$ はそれぞれ, ホスト人口集団の中の感受性（susceptible）, 感染性（infectious）, 回復・隔離または免疫状態（recovered/removed/immune）の 3 状態にある人口の密度を表している．また，β は伝達係数，$\beta I(t)$ は感染力で，感染性人口の単位時間・単位人口あたりの感染率を表し，このモデルでは感染は再感染しないと仮定している．γ は回復（免疫獲得）率ないし隔離率を表し，b は単位時間あたりの出生率，μ は自然死亡率で，単位時間・単位人口あたりの死亡率を表す．b, β, μ, γ はすべて正のパラメータである．このモデルでは，出生した人口は未感染で，免疫は獲得していないものとしている．

全人口 $N(t)$ を $N(t) = S(t) + I(t) + R(t)$ とおけば，(SIR) の各式より

$$\frac{dN(t)}{dt} = b - \mu N(t) \tag{1.1}$$

を得る．これより $N(t) \to b/\mu$（$t \to \infty$）とわかるので，N を一定とみなし，$N = b/\mu$ と定める．

この出生と死亡を考慮した感染症の数理モデルでは基本再生産数

$$R_0 = \frac{\beta b}{\mu(\mu+\gamma)} \tag{1.2}$$

の値により解の挙動が変わり，$R_0 < 1$ の場合には disease-free な平衡点が大域的漸近安定であり，$R_0 > 1$ の場合には enedmic な平衡点が局所漸近安定であることが示される．基本再生産数は，流行

* 本研究は，お茶の水女子大学の久保隆徹氏との共同研究に基づく．

初期段階では $S(t) \approx N$ であると考えて $I(t)$ についての微分方程式を考えれば，

$$\frac{d}{dt}I(t) = (\mu+\gamma)\left(\frac{\beta b}{\mu(\mu+\gamma)} - 1\right) I(t) \tag{1.3}$$

となり，$I(t)$ が増大する条件：$\dfrac{\beta b}{\mu(\mu+\gamma)} > 1$ から得られ，「一人の感染者が起こす 2 次感染の総数」を表す．しかし，現実の感染症は再帰的な流行の波が確認されることが多く，周期性をもたらす要因として，時間遅れや非線形な接触項，年齢構造が提唱されている（Hethcote[1]）．時間遅れに関する研究では，國谷 [2] により，(SIR) の感染力 $\beta I(t)$ に該当する項を

$$\frac{\beta I(t)}{1 + \alpha \int_0^\infty f(\sigma,\tau) I(t-\sigma) d\sigma}$$

に変えたモデルが解析され，再帰的な流行の波が起こることが数学的に示されている．ここで α は行動変容の感度，$f(\sigma,\tau)$ は行動変容の σ だけ過去の $I(t)$ の影響の分布を表し，τ は分岐パラメータである．また，$f(\sigma,\tau)$ は

(A1) 任意の $\tau > 0$ に対して $\displaystyle\int_0^\infty f(\sigma,\tau)d\sigma = 1.$

(A2) ある $r > 0$ が存在して，任意の $\tau > 0$ に対して $\displaystyle\int_0^\infty |f(\sigma,\tau)e^{r\sigma}|^2 d\sigma < \infty.$

の 2 つの条件を満たす非負関数を仮定する．[2] では $f(\sigma)$ の 1 つの例として次の切断指数分布について解析がされている．

$$f(\sigma,\tau) = \begin{cases} 0 & \sigma < \tau, \\ k e^{-k(\sigma-\tau)} & \sigma \geq \tau. \end{cases}$$

本研究では，過去の行動変容に対する項を τ だけ過去の感染性の状態にある人口密度で表した以下の数理モデルを考える：

$$\begin{cases} \dfrac{dS(t)}{dt} = b - \dfrac{\beta S(t) I(t)}{1 + \alpha I(t-\tau)} - \mu S(t), & \text{(1.4a)} \\ \dfrac{dI(t)}{dt} = \dfrac{\beta S(t) I(t)}{1 + \alpha I(t-\tau)} - (\mu+\gamma) I(t), & \text{(1.4b)} \\ \dfrac{dR(t)}{dt} = \gamma I(t) - \mu R(t). & \text{(1.4c)} \end{cases}$$

このモデルでも α は行動変容の感度，τ は時間遅れのパラメータを表す．行動変容の感度 α が大きければ，(SIR) モデルの感染力が小さくなり，α が小さければ，(SIR) モデルの感染力が大きくなることになる．また，新型コロナウイルス感染拡大の状況下で，感染者数は瞬時に把握できるわけではなく，タイムラグがあって発表されていたことを踏まえて，感染力を表す項の分母に $I(t-\tau)$ と時間遅れの項を入れている．

このモデルでも (SIR) のときと同様に，(1.4a)，(1.4b)，(1.4c) より，(1.1) を満たすことがわかる．よって，$N = b/\mu$ であるから，(1.4a) と (1.4b) の 2 式を考えればよい．また，このモデルにおいては，流行初期侵入時には $I(t-\tau) \approx 0$, $S(t) = N$ と考えられ，このときは I の微分方程式は (1.3) と同じになるので，基本再生産数 R_0 も (SIR) と同じ (1.2) と定める．

2　過去の行動変容を考慮した感染症の数理モデルの解析

2.1　平衡点

ここでは，平衡点を求める．平衡点 (S^*, I^*) は，(1.4a), (1.4b) の右辺 $=0$ を満たす．平衡点は t に無関係であるため，$I(t-\tau)=I(t)=I^*$ とみなせるので，平衡点は以下の連立方程式を満たす：

$$\begin{cases} b - \dfrac{\beta S^* I^*}{1+\alpha I^*} - \mu S^* = 0, & \text{(2.1a)} \\ \dfrac{\beta S^* I^*}{1+\alpha I^*} - (\mu+\gamma) I^* = 0. & \text{(2.1b)} \end{cases}$$

よって，disease-free な平衡点 E^0 と endemic な平衡点 E^* が 1 つずつ存在することがわかる：

$$E^0 := (S^0, 0) = \left(\frac{b}{\mu}, 0\right), \tag{2.2}$$

$$E^* := (S^*, I^*) = \left(\frac{(\mu+\gamma)(1+\alpha I^*)}{\beta}, \frac{(R_0-1)\mu}{\alpha\mu+\beta}\right) = \left(\frac{\mu+\gamma+\alpha b}{\alpha\mu+\beta}, \frac{\beta b - \mu(\mu+\gamma)}{(\alpha\mu+\beta)(\mu+\gamma)}\right) \tag{2.3}$$

であることがわかる．

2.2　disease-free な平衡点 $E^0 = (S^0, 0)$ の安定性解析

2.2.1　disease-free な平衡点 E^0 の局所漸近安定性

disease-free な平衡点 E^0 の局所漸近安定性について調べる．ここで，$K(t) := S(t) - S^0$ とおくと，

$$\begin{aligned} \frac{dK(t)}{dt} &= b - \mu(K(t)+S^0) - \frac{\beta(K(t)+S^0)I(t)}{1+\alpha I(t-\tau)} \\ &= b - \mu(K(t)+S^0) - \beta(K(t)+S^0)I(t)\frac{1}{1+\alpha I(t-\tau)} \\ &= b - \mu(K(t)+S^0) - \beta(K(t)+S^0)I(t)\left[1 - \alpha I(t-\tau) + (\alpha I(t-\tau))^2 - \cdots\right] \end{aligned}$$

である．非線形項を取り除き，(2.2) を考慮すると線形化問題として

$$\frac{dK(t)}{dt} = b - \mu\left(K(t) + \frac{b}{\mu}\right) - \beta\frac{b}{\mu}I(t) = -\mu K(t) - \frac{\beta b}{\mu}I(t) \tag{2.4}$$

が得られる．また，$\dfrac{dI(t)}{dt}$ についても (2.2) を考慮して同様に考えれば，対応する線形問題として

$$\frac{dI(t)}{dt} = \mu(\mu+\gamma)(R_0-1)I(t) \tag{2.5}$$

が得られる．以上をまとめれば，考えたい問題の線形化問題は

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} K(t) \\ I(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mu & -\frac{\beta b}{\mu} \\ 0 & \mu(\mu+\gamma)(R_0-1) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} K(t) \\ I(t) \end{pmatrix} \tag{2.6}$$

であることがわかる．ここで，

$$L_1 = \begin{pmatrix} -\mu & -\frac{\beta b}{\mu} \\ 0 & \mu(\mu+\gamma)(R_0-1) \end{pmatrix} \tag{2.7}$$

とすると，L_1 の固有値は $\lambda = -\mu, \mu(\mu+\gamma)(R_0-1)$ とわかる．よって，基本再生産数 $R_0 > 1$ ならば L_1 の 1 つの固有値が正であるため，平衡点 E^0 は不安定であることがわかり，$R_0 < 1$ ならば L_1 の固有値がともに負であるから，E^0 は局所的漸近安定であることがわかる．

2.3　disease-free な平衡点 E^0 の大域的漸近安定性（$R_0 < 1$）

$R_0 < 1$ のとき，E^0 の大域的漸近安定性について考える．ここでは，[2] と同様に示す．次の関数がリアプノフ関数の役割を果たすことが期待できる．

$$V_1(S(t), I(t)) := S^0 g\left(\frac{S(t)}{S^0}\right) + I(t) \quad (g(x) := x - 1 - \ln x, x > 0)$$

実際，$V_1(S^0, 0) = 0$, $V_1(S(t), I(t)) \geq 0$ であり，(1.4a)，(1.4b)，(2.2) より

$$\begin{aligned} \frac{dV_1(S(t), I(t))}{dt} &= \left(1 - \frac{S^0}{S(t)}\right)\frac{d}{dt}S(t) + \frac{d}{dt}I(t) \\ &= \left(1 - \frac{S^0}{S(t)}\right)(b - \mu S(t)) + \frac{\beta S^0 I(t)}{1+\alpha I(t-\tau)} - (\mu+\gamma)I(t) \\ &= -\frac{\mu}{S(t)}(S^0 - S(t))^2 + \frac{\beta S^0 I(t)}{1+\alpha I(t-\tau)} - (\mu+\gamma)I(t) \\ &\leq -\frac{\mu}{S(t)}(S^0 - S(t))^2 + \beta S^0 I(t) - (\mu+\gamma)I(t) \\ &= -\frac{\mu}{S(t)}(S^0 - S(t))^2 + (\mu+\gamma)(R_0 - 1)I(t) \leq 0. \end{aligned}$$

したがって，V_1 はリアプノフ関数であることがわかる．つまり，$R_0 < 1$ のとき，E^0 は大域的に漸近安定といえる．以上から，disease-free な平衡点 E^0 の安定性については以下が成り立つ．

定理 1. R_0 を (1.2) で定めた定数とする．このとき，*disease-free* な平衡点 E^0 $(\frac{b}{\mu}, 0)$ の安定性について，どんな $\tau > 0$ に対しても以下が成り立つ．

(1) $R_0 < 1$ のとき，E_0 は大域的に漸近安定である．
(2) $R_0 > 1$ のとき，E_0 は不安定である．

2.4　endemic な平衡点 $E^* = (S^*, I^*)$ の安定性解析

2.4.1　endemic な平衡点 E^* の局所漸近安定性

endemic な平衡点 E^* の局所漸近安定性について調べる．E^0 のときと同様に $T(t) := S(t) - S^*$, $J(t) := I(t) - I^*$ とおいて，対応する線形化問題を考えれば

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} T(t) \\ J(t) \end{pmatrix}$$

$$
= \begin{pmatrix} -\dfrac{b(\alpha\mu+\beta)}{\mu+\gamma+\alpha b} & -(\mu+\gamma) \\ \dfrac{\beta b-\mu^2-\mu\gamma}{\mu+\gamma+\alpha b} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T(t) \\ J(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{\alpha(\mu+\gamma)(\beta b-\mu^2-\mu\gamma)}{\beta(\mu+\gamma+\alpha b)} \\ 0 & -\dfrac{\alpha(\mu+\gamma)(\beta b-\mu^2-\mu\gamma)}{\beta(\mu+\gamma+\alpha b)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T(t-\tau) \\ J(t-\tau) \end{pmatrix} \tag{2.8}
$$

がわかる．そこで，対応する特性方程式を作る．$\begin{pmatrix} T(t) \\ J(t) \end{pmatrix} := e^{\lambda t}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$ とすると，(2.8) より，

$$
\begin{pmatrix} \lambda+\dfrac{b(\alpha\mu+\beta)}{\mu+\gamma+\alpha b} & (\mu+\gamma)-\dfrac{\alpha(\mu+\gamma)(\beta b-\mu^2-\mu\gamma)}{\beta(\mu+\gamma+\alpha b)}e^{-\lambda\tau} \\ -\dfrac{\beta b-\mu^2-\mu\gamma}{\mu+\gamma+\alpha b} & \lambda+\dfrac{\alpha(\mu+\gamma)(\beta b-\mu^2-\mu\gamma)}{\beta(\mu+\gamma+\alpha b)}e^{-\lambda\tau} \end{pmatrix} e^{\lambda t}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

とわかる．ここで，係数行列を L_2 とすると L_2 が逆行列をもてば $C_1 = C_2 = 0$ となり，自明解しか出てこないから，$\det L_2 = 0$ を考える．このとき，

$$
\left(\lambda+\frac{b(\alpha\mu+\beta)}{\mu+\gamma+\alpha b}\right)\left(\lambda+\frac{\alpha(\mu+\gamma)(\beta b-\mu^2-\mu\gamma)}{\beta(\mu+\gamma+\alpha b)}e^{-\lambda\tau}\right) + \frac{\beta b-\mu^2-\mu\gamma}{\mu+\gamma+\alpha b}(\mu+\gamma)\left[1-\frac{\alpha(\beta b-\mu^2-\mu\gamma)}{\beta(\mu+\gamma+\alpha b)}e^{-\lambda\tau}\right] = 0
$$

が得られ，式を整理すれば

$$
\lambda^2 + \frac{\beta b(\alpha\mu+\beta)+\alpha(\mu+\gamma)(\beta b-\mu^2-\mu\gamma)e^{-\lambda\tau}}{\beta(\mu+\gamma+\alpha b)}\lambda + \frac{(\mu+\gamma)(\beta b-\mu^2-\mu\gamma)}{\mu+\gamma+\alpha b}\left[1+\frac{\alpha\mu}{\beta}e^{-\lambda\tau}\right] = 0 \tag{2.9}
$$

が得られる．これからこの解（固有値）を求めよう．$\tau = 0$ のときから解析を始める．$\tau = 0$ のとき，(2.9) は

$$
\lambda^2 + \frac{\beta b(\alpha\mu+\beta)+\alpha(\mu+\gamma)(\beta b-\mu^2-\mu\gamma)}{\beta(\mu+\gamma+\alpha b)}\lambda + \frac{(\mu+\gamma)(\beta b-\mu^2-\mu\gamma)}{\mu+\gamma+\alpha b}\left[1+\frac{\alpha\mu}{\beta}\right] = 0 \tag{2.10}
$$

で表される．ここで，定数項は

$$
\frac{(\mu+\gamma)(\beta b-\mu^2-\mu\gamma)}{\mu+\gamma+\alpha b}\left[1+\frac{\alpha\mu}{\beta}\right] = \frac{\mu(\mu+\gamma)^2(\beta+\alpha\mu)}{\beta(\mu+\gamma+\alpha b)}(R_0-1)
$$

とかけ，1 次の項の係数 $\dfrac{\beta b(\alpha\mu+\beta)+\alpha(\mu+\gamma)(\beta b-\mu^2-\mu\gamma)}{2\beta(\mu+\gamma+\alpha b)}$ の分母は正なのは明らかであるため，この分子に着目すると，(1.2) から

$$
\beta b(\alpha\mu+\beta)+\alpha(\mu+\gamma)(\beta b-\mu^2-\mu\gamma) = \mu(\mu+\gamma)[R_0(\alpha\mu+\beta)+\alpha(\mu+\gamma)(R_0-1)]
$$

とわかる．ここで，基本再生産数 $R_0 > 1$ でなければ，E^* は第 1 象限に存在しない．よって，したがって，ここでは $R_0 > 1$ の場合のみ考えればよい．

以上のことから，基本再生産数 $R_0 > 1$ ならば，定数項も 1 次の項も正であるから，(2.10) の解はともに負である．つまり，特性方程式の固有値はともに負であるため，endemic な平衡点 E^* は局所的漸近安定であることがわかる．

つぎに，τ が大きくなると安定性が変化するかどうかをみていこう．ここで，(2.9) を整理すると，

$$\lambda^2+\frac{b(\alpha\mu+\beta)}{\mu+\gamma+\alpha b}\lambda+\frac{\alpha\mu(\mu+\gamma)^2(R_0-1)}{\beta(\mu+\gamma+\alpha b)}\lambda e^{-\lambda\tau}+\frac{\mu(\mu+\gamma)^2(R_0-1)}{\mu+\gamma+\alpha b}+\frac{\alpha\mu^2(\mu+\gamma)^2(R_0-1)}{\beta(\mu+\gamma+\alpha b)}e^{-\lambda\tau}=0. \tag{2.11}$$

係数を整理するために，

$$A=\frac{\alpha\mu(\mu+\gamma)^2(R_0-1)}{\beta(\mu+\gamma+\alpha b)},\qquad B=\frac{b(\alpha\mu+\beta)}{\mu+\gamma+\alpha b}$$

とおく．(1.2) より，$b=\dfrac{R_0\mu(\mu+\gamma)}{\beta}$ であるから，

$$\mu+\gamma+\alpha b=\mu+\gamma+\alpha\frac{R_0\mu(\mu+\gamma)}{\beta}=\frac{\mu+\gamma}{\beta}(\beta+\alpha\mu R_0)$$

となる．A，B それぞれに代入すると，

$$A=\frac{\alpha\mu(\mu+\gamma)(R_0-1)}{\alpha\mu R_0+\beta},\ B=\frac{\mu R_0(\alpha\mu+\beta)}{\alpha\mu R_0+\beta}$$

とわかる．よって，(2.11) は以下のように書き変えられる．

$$\lambda^2+B\lambda+A\lambda e^{-\lambda\tau}+\frac{\beta}{\alpha}A+\mu Ae^{-\lambda\tau}=0. \tag{2.12}$$

$\lambda=i\omega(\omega>0)$ を (2.12) に代入すると，

$$-\omega^2+Bi\omega+Ai\omega\cos\omega\tau+A\omega\sin\omega\tau+\frac{\beta}{\alpha}A+\mu A\cos\omega\tau-i\mu A\sin\omega\tau=0 \tag{2.13}$$

が得られる．(2.13) の左辺の実部と虚部は 0 であるから，以下の 2 式が得られる．

$$\begin{cases}-\omega^2+A\omega\sin\omega\tau+\dfrac{\beta}{\alpha}A+\mu A\cos\omega\tau=0, & \text{(2.14a)}\\ B\omega+A\omega\cos\omega\tau-\mu A\sin\omega\tau=0. & \text{(2.14b)}\end{cases}$$

(2.14a) より，

$$A\omega\sin\omega\tau+\mu A\cos\omega\tau=\omega^2-\frac{\beta}{\alpha}A \tag{2.15}$$

(2.14b) より，

$$A\omega\cos\omega\tau-\mu A\sin\omega\tau=-B\omega \tag{2.16}$$

がわかる．(2.15)，(2.16) の両辺をそれぞれ 2 乗し，辺々を足し合わせると，

$$\omega^4-\left[2\frac{\beta}{\alpha}A+A^2-B^2\right]\omega^2+\left(\frac{\beta^2}{\alpha^2}-\mu^2\right)A^2=0 \tag{2.17}$$

が得られる．したがって，ω の 4 次方程式（ω^2 の 2 次方程式）が得られた．この方程式の解の存在，解の正負を見ていく．

$x = \omega^2$ とおくと，(2.17) は以下のように書き換えられる．

$$x^2 - \left[2\frac{\beta}{\alpha}A + A^2 - B^2\right]x + \left(\frac{\beta^2}{\alpha^2} - \mu^2\right)A^2 = 0 \tag{2.18}$$

(2.18) の判別式を D とすると，以下の場合，x についての正の解は存在する．

(1) $\left(\frac{\beta^2}{\alpha^2} - \mu^2\right)A^2 < 0$ のとき，x の解はただ 1 つ存在する．

(2) $\left(\frac{\beta^2}{\alpha^2} - \mu^2\right)A^2 > 0$ かつ，$D > 0$ かつ，$2\frac{\beta}{\alpha}A + A^2 - B^2 > 0$（軸が正）のとき，$x$ の解は 2 つ存在する．

$\lambda = i\omega$ が存在するときの τ を τ_c とすると（$\lambda(\tau_c) = i\omega$），(2.15)，(2.16) より，

$$A\omega\sin\omega\tau_c + \mu A\cos\omega\tau_c = \omega^2 - \frac{\beta}{\alpha}A,\ A\omega\cos\omega\tau_c - \mu A\sin\omega\tau_c = -B\omega$$

がわかる．τ_c について解くと，

$$\cos\omega\tau_c = \frac{\alpha(\mu - B)\omega^2 - \beta\mu A}{\alpha A(\omega^2 + \mu^2)},\quad \sin\omega\tau_c = \frac{\alpha\omega^3 + (\alpha\mu B - \beta A)\omega}{\alpha A(\omega^2 + \mu^2)}$$

となる．ここで，

$$\chi_1 = \frac{\alpha(\mu - B)\omega^2 - \beta\mu A}{\alpha A(\omega^2 + \mu^2)},\quad \chi_2 = \frac{\alpha\omega^3 + (\alpha\mu B - \beta A)\omega}{\alpha A(\omega^2 + \mu^2)}$$

とおく．$0 \le \arccos\chi_1 \le \pi$ $(-1 \le \chi_1 \le 1)$ のとき，$\arccos\chi_1 = C_1(\omega)$ とおく．$n \in \mathbb{N}$ に対して，τ_c の一般式は以下のように表せる．

$$\tau_c(n) = \begin{cases} \dfrac{C_1(\omega) + 2n\pi}{\omega} & (\chi_2 > 0), \\ \dfrac{-C_1(\omega) + 2n\pi}{\omega} & (\chi_2 < 0). \end{cases} \tag{2.19}$$

$\mathrm{Re}\left(\frac{d}{d\tau}\lambda(\tau)\right)\Big|_{\tau=\tau_c} > 0$ ならば，ホップ分岐が起こる．そのため，(2.12) を τ で微分することを考える．(2.12) を，両辺 τ で微分すると，

$$2\lambda\frac{d\lambda}{d\tau} + B\frac{d\lambda}{d\tau} + A\frac{d\lambda}{d\tau}e^{-\lambda\tau} + A(\lambda + \mu)e^{-\lambda\tau}\left(-\frac{d\lambda}{d\tau}\tau - \lambda\right) = 0$$

であり，

$$\frac{d\lambda}{d\tau} = \frac{A(\lambda + \mu)\lambda e^{-\lambda\tau}}{2\lambda + B + Ae^{-\lambda\tau}(1 - \lambda\tau - \mu\tau)}$$

がわかる．

$\mathrm{Re}\left(\frac{d}{d\tau}\lambda(\tau)\right)\Big|_{\tau=\tau_c} > 0$ を示すのは難しいため，$\mathrm{Re}\left(\frac{d}{d\tau}\lambda(\tau)\right)^{-1}\Big|_{\tau=\tau_c} > 0$ を示したい．

$$\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^{-1} = \frac{2\lambda + B + Ae^{-\lambda\tau}(1 - \lambda\tau - \mu\tau)}{A(\lambda + \mu)\lambda e^{-\lambda\tau}}$$

$$= \frac{2}{A(\lambda+\mu)e^{-\lambda\tau}} + \frac{B}{A(\lambda+\mu)\lambda e^{-\lambda\tau}} + \frac{1}{(\lambda+\mu)\lambda} - \frac{\tau}{\lambda}$$

であるから，(2.12) より，

$$A(\lambda+\mu)e^{-\lambda\tau} = -\lambda^2 - B\lambda - \frac{\beta}{\alpha}A$$

がわかる．したがって，

$$\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^{-1} = \frac{2}{-\lambda^2 - B\lambda - \frac{\beta}{\alpha}A} + \frac{B}{\lambda(-\lambda^2 - B\lambda - \frac{\beta}{\alpha}A)} + \frac{1}{(\lambda+\mu)\lambda} - \frac{\tau}{\lambda}$$

である．ここで，$\tau = \tau_c$ のときを考えると

$$\begin{aligned}\left.\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^{-1}\right|_{\lambda(\tau_c)=i\omega} &= \frac{2}{\omega^2 - iB\omega - \frac{\beta}{\alpha}A} + \frac{B}{i\omega(\omega^2 - iB\omega - \frac{\beta}{\alpha}A)} + \frac{1}{-\omega^2 + i\mu\omega} - \frac{\tau}{i\omega} \\ &= \frac{(2\omega - iB)(\omega^2 - \frac{\beta}{\alpha}A + iB\omega)}{\omega(\omega^2 - \frac{\beta}{\alpha}A)^2 + B^2\omega^3} + \frac{1}{-\omega^2 + i\mu\omega} - \frac{\tau}{i\omega}\end{aligned}$$

とわかる．よって，この実部は

$$\mathrm{Re}\left.\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^{-1}\right|_{\lambda(\tau_c)=i\omega} = \frac{2\omega^2 - 2\frac{\beta}{\alpha}A + B^2}{(\omega^2 - \frac{\beta}{\alpha}A)^2 + B^2\omega^2} - \frac{1}{\omega^2 + \mu^2} \tag{2.20}$$

であり，(2.17) より，

$$\left(\omega^2 - \frac{\beta}{\alpha}A\right)^2 + B^2\omega^2 = A^2(\omega^2 + \mu^2)$$

が成り立つことに注意して，(2.20) に代入すると，

$$\mathrm{Re}\left.\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^{-1}\right|_{\lambda(\tau_c)=i\omega} = \frac{1}{A^2(\omega^2 + \mu^2)}\left(2\omega^2 - 2\frac{\beta}{\alpha}A + B^2 - A^2\right) \tag{2.21}$$

が得られる．したがって，$\mathrm{Re}\left.\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^{-1}\right|_{\lambda(\tau_c)=i\omega}$ の正負は，$2\omega^2 - 2\frac{\beta}{\alpha}A + B^2 - A^2$ によって決まる．ここで，(2.17) を ω^2 の二次方程式と見て解くと，

$$\omega^2 = \frac{2\frac{\beta}{\alpha}A + A^2 - B^2 \pm \sqrt{\left(2\frac{\beta}{\alpha}A + A^2 - B^2\right)^2 - 4\left(\frac{\beta^2}{\alpha^2} - \mu^2\right)A^2}}{2}$$

であるから，

$$2\omega^2 - 2\frac{\beta}{\alpha}A + B^2 - A^2 = \pm\sqrt{\left(2\frac{\beta}{\alpha}A + A^2 - B^2\right)^2 - 4\left(\frac{\beta^2}{\alpha^2} - \mu^2\right)A^2}$$

がわかる．したがって，(2.17) の解が存在するとき，以下のことが言える．

(1) $\left(\frac{\beta^2}{\alpha^2}-\mu^2\right)A^2<0$ のとき，x の解はただ 1 つ存在する．この条件を満たす x の正の解は，

$$\omega^2=\frac{2\frac{\beta}{\alpha}A+A^2-B^2+\sqrt{\left(2\frac{\beta}{\alpha}A+A^2-B^2\right)^2-4\left(\frac{\beta^2}{\alpha^2}-\mu^2\right)A^2}}{2}$$

つまり，

$$2\omega^2-2\frac{\beta}{\alpha}A+B^2-A^2=\sqrt{\left(2\frac{\beta}{\alpha}A+A^2-B^2\right)^2-4\left(\frac{\beta^2}{\alpha^2}-\mu^2\right)A^2}>0$$

したがって，このとき $\mathrm{Re}\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^{-1}\Big|_{\lambda(\tau_c)=i\omega}>0$ となることがわかる．

(2) $\left(\frac{\beta^2}{\alpha^2}-\mu^2\right)A^2>0$ かつ，$D>0$ かつ，$2\frac{\beta}{\alpha}A+A^2-B^2>0$（軸が正）のとき，$x$ の解は 2 つ存在する．この条件を満たす x の正の解は，

$$\omega^2=\frac{2\frac{\beta}{\alpha}A+A^2-B^2\pm\sqrt{\left(2\frac{\beta}{\alpha}A+A^2-B^2\right)^2-4\left(\frac{\beta^2}{\alpha^2}-\mu^2\right)A^2}}{2}$$

解の小さい方を a_-，大きい方を a_+ とする．

$$2\omega^2-2\frac{\beta}{\alpha}A+B^2-A^2=\pm\sqrt{\left(2\frac{\beta}{\alpha}A+A^2-B^2\right)^2-4\left(\frac{\beta^2}{\alpha^2}-\mu^2\right)A^2}$$

このことから，
a_- のとき，$\mathrm{Re}\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^{-1}\Big|_{\lambda(\tau_c)=i\omega}<0$ であり，a_+ のとき，$\mathrm{Re}\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^{-1}\Big|_{\lambda(\tau_c)=i\omega}>0$
であることがわかる．

定理 2. *endemic* な平衡点 E^* の安定性について，以下が成り立つ．

(i) $\left(\frac{\beta^2}{\alpha^2}-\mu^2\right)A^2<0$ のときある τ_c が存在して，$\tau=\tau_c$ でホップ分岐する．
(ii) $\left(\frac{\beta^2}{\alpha^2}-\mu^2\right)A^2>0$ かつ，$D>0$ かつ，$2\frac{\beta}{\alpha}A+A^2-B^2>0$（軸が正）のときある τ_1,τ_2 が存在して，平衡点 E^* は $0\le\tau<\tau_1$ の範囲では漸近安定，$\tau_1<\tau<\tau_2$ の範囲では不安定になる．

注意 2.1. $R_0>1$，$\alpha=0$ の場合には (SIR) モデルと同様になるので，endemic な平衡点 E^* は大域的漸近安定となる．実際，リャプノフ関数が構成できる．

3　数値実験

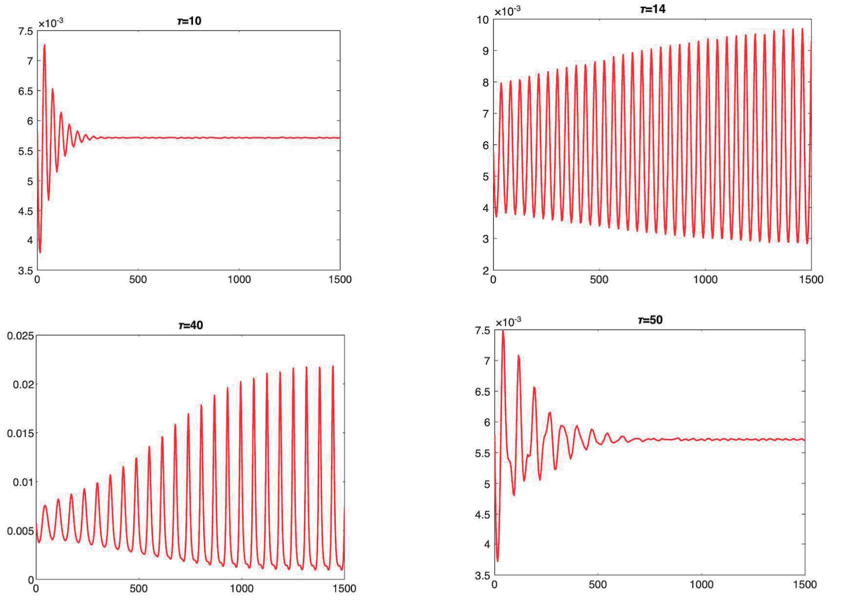
先行研究 [2] との比較のため，α を除く係数を以下のように設定する．

$$b=\mu=0.01,\gamma=1,R_0=2.5,\beta=R_0\frac{(\mu+\gamma)\mu}{b}$$

定理 2(i) の条件を満たすためには，行動変容の感度 α を非常に大きな数 (252.5 以上) しなければならない．ここでは，定理 2(ii) の場合について，MATLAB を用いて $I(t)$ の数値シミュレーションを行う．先行研究では，$\alpha = 10$ と設定しており，これは，定理 2(ii) の条件を満たす．
このとき，a_-, a_+ に対する τ_c をそれぞれ，τ_-, τ_+ と置く．$n \in \mathbb{N}$ に対して，$\tau_-(n), \tau_+(n)$ は以下のように求まる．

$$\tau_+(1) = 13.4713, \qquad \tau_-(1) = 43.7112, \qquad \tau_+(2) = 56.9082, \qquad \tau_-(2) = 109.6939.$$

実際，$\tau = 10, 14, 40, 50$ のときのシミュレーション結果は以下のようになり，平衡点の安定・不安定が確認できる．



注意 3.1. 上のことからも定理 2(ii) の $\tau_1 = \tau_+(1) = 13.4713...$, $\tau_2 = \tau_-(1) = 43.7112...$ とわかる．$\tau > \tau_2$ については，$\tau = 60$ のときは同様に不安定化することが数値シミュレーションでも確認できるが，τ が $\tau_-(2)$ 付近では安定性が変化することは数値シミュレーションでは確認できなかった．その理由については今後の研究課題である．

参考文献

[1] Hethcote H. W.,“Three Basic Epidemiogiral Models”, Applied Mathematical Ecology, Springer-Verlag, 119-144,(1989).

[2] T. Kuniya, “Hopf bifurcation in an SIR epidemic model with psychological effect and distributed time delay,” Advances in Epidemiological Modeling and Control of Viruses, Elsevier, 145-168, (2023).