

デデキント和の拡張について

津田塾大学 太田 香 (Kaori Ota)
Tsuda College

§1. Introduction および 準備

デデキント和は $\log \eta(z)$ の変換公式に現れ、デデキントによりその相互法則が証明された (cf. [16])。その後、さまざまな人たちによりいろいろな拡張がなされ、拡張された和についての相互法則も得られている：Apostol, Carlitz, Rademacher, Berndt, Zagier, Halbritter, Solomon 等々。現在は

$$\sum_{0 \leq i_1, \dots, i_r < a} \bar{B}_{r_1} \left(\frac{i_1 + \lambda_1}{a} \right) \cdots \bar{B}_{r_n} \left(\frac{i_n + \lambda_n}{a} \right) \tag{1.1}$$

($a \in \mathbf{N}$, $0 \leq r_1, \dots, r_n \in \mathbf{Z}$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbf{R}$) の形のようなものまで考えられ、その相互法則については、江上繁樹さん (富山大学) が cone に付随した多重ゼータ関数を用いた証明を与え ([9, 1993 年])、Chapman は Solomon の方法を n 次元格子に拡張して考えることにより証明した ([8, 2000 年])。((1.1) の正確な形については、それぞれの論文を参照して下さい。 \bar{B}_* については下の定義 1 を参照)

ここでは、Apostol による拡張に注目する。まず初めに必要な定義を与える。

定義 1. n -th Bernoulli 数 B_n , n -th Bernoulli 多項式 $B_n(x)$, n -th Bernoulli 関数 $\bar{B}_n(x)$ は、次により定義される：

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} t^n, \quad \frac{te^{xt}}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} t^n \tag{1.2},$$

$$\begin{cases} \bar{B}_n(x) = B_n(\{x\}) & (n > 1 \text{ のとき}) \\ \bar{B}_1(x) = \begin{cases} B_1(\{x\}) & (x \notin \mathbf{Z} \text{ のとき}) \\ 0 & (x \in \mathbf{Z} \text{ のとき}). \end{cases} \end{cases}$$

ここで、 $\{x\}$ は x の小数部分 (つまり、 $0 \leq \{x\} < 1$) を表す。また、 χ を conductor f の Dirichlet 指標とした時、 $B_{n,\chi}$ を

$$\sum_{a=1}^f \frac{\chi(a) te^{at}}{e^{ft} - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{n,\chi}}{n!} t^n$$

により定める。

以後、 k, h を $(k, h) = 1$ である自然数とする。

定理 1. (Apostol, [1, 1950 年]) $n \in \mathbf{N}$ とする。デデキント和を

$$s_n(k, h) = \sum_{a=1}^{h-1} \frac{a}{h} \bar{B}_n \left(\frac{ka}{h} \right), \quad s_n(h, k) = \sum_{b=1}^{k-1} \frac{b}{k} \bar{B}_n \left(\frac{hb}{k} \right)$$

により定めると、 n が奇数のとき

$$\frac{1}{n} \{k^{n-1} s_n(h, k) + h^{n-1} s_n(k, h)\} = \frac{({}^1B h - {}^2B k)^{n+1}}{n(n+1)kh} + \frac{B_{n+1}}{(n+1)kh}$$

が成り立つ。ここで、

$$({}^1B h - {}^2B k)^{n+1} = \sum_{l=0}^{n+1} \binom{n+1}{l} B_l h^l (-1)^{n+1-l} B_{n+1-l} k^{n+1-l} \quad (1.3)$$

である。

この定理は n が奇数の時のみを扱っているが、 n が偶数の時はデデキント和の各々が簡単に計算できる。ここで注目されるのが、右辺の

$$\frac{({}^1B h - {}^2B k)^{n+1}}{n(n+1)kh}$$

の項で、これは Barnes による 2 重ゼータ関数の $s = 1 - n$ における値と殆ど同じである。そこで、2 重ゼータ関数を変形することにより、上の相互法則が得られないかを考える。そのために、Barnes の多重ゼータ関数について必要な部分のみを復習する。

定義 2. (cf. [2, 3])

(1) $\alpha, \omega_1, \dots, \omega_r \in \mathbf{C}$, $\omega_1 \cdots \omega_r \neq 0$ とし、 $\tilde{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_r)$ とおく。Barnes の r -重 Bernoulli 多項式の微分 ${}_r S'_n(\alpha; \tilde{\omega})$ を、

$$\frac{(-1)^r t e^{-\alpha t}}{\prod_{i=1}^r (1 - e^{-\omega_i t})} = (t \text{ の非正冪の項}) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} {}_r S'_n(\alpha; \tilde{\omega})}{n!} t^n \quad (1.4)$$

により定義する。以後、微分しか現れない。

(2) $\alpha, \omega_1, \dots, \omega_r$ の各実部 > 0 とする。Barnes の r -重ゼータ関数 $\zeta_r(s; \alpha, \tilde{\omega})$ を

$$\zeta_r(s; \alpha, \tilde{\omega}) = \sum_{m_1, \dots, m_r=0}^{\infty} \frac{1}{(\alpha + m_1 \omega_1 + \cdots + m_r \omega_r)^s}$$

により定義する。 ζ_r は、 $\operatorname{Re}(s) > r$ において正則な関数である。

Remark 1.(1) $r = 1$ のとき、 ${}_r S'_n$ および ζ_r はそれぞれ

$$\begin{aligned} {}_1 S'_n(\alpha; (\omega)) &= \omega^{n-1} B_n \left(\frac{\alpha}{\omega} \right) \\ \zeta_1(s; \alpha, (\omega)) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(\alpha + m\omega)^s} = \frac{1}{\omega^s} \zeta \left(s, \frac{\alpha}{\omega} \right) \end{aligned}$$

である。ここで、 $\zeta \left(s, \frac{\alpha}{\omega} \right)$ は Hurwitz zeta 関数である。

(2) ${}_r S'_n(\alpha; \tilde{\omega})$ は次の表示を持つ :

$${}_r S'_n(\alpha; \tilde{\omega}) = \frac{({}^1 B \omega_1 + \cdots + {}^r B \omega_r + \alpha)^{n+r-1} n!}{\prod_{i=1}^r \omega_i \cdot (n+r-1)!}.$$

ただし、 $({}^1 B \omega_1 + \cdots + {}^r B \omega_r + \alpha)^{n+r-1}$ は (1.3) と同様に定義される。この表示は、(1.4) の左辺を Bernoulli 数の母関数 (1.2) の積とみなすことにより得られる。

定理 2. (cf. [2, 3]) $\zeta_r(s; \alpha, \tilde{\omega})$ は次の積分表示を持つ :

$$\zeta_r(s; \alpha, \tilde{\omega}) = \frac{\Gamma(1-s) e^{-s\pi i}}{2\pi i} \int_{I(\lambda, \infty)} \frac{e^{-\alpha t} t^{s-1}}{\prod_{i=1}^r (1 - e^{-\omega_i t})} dt.$$

(ここで、 λ は $0 < \lambda < \min\left(\left|\frac{2\pi}{\omega_1}\right|, \dots, \left|\frac{2\pi}{\omega_r}\right|\right)$ をみたし、 $I(\lambda, \infty)$ は実軸上を $+\infty$ から λ まできて、 0 の周りを半径 λ の円周上を時計と反対方向にまわり、また λ から $+\infty$ に戻る積分路である。) この右辺はすべての s について定義され (極をいくつか持つが)、これにより ζ_r は \mathbf{C} に解析接続される。また、 $\forall n \in \mathbf{N}$ に対して右辺の積分は留数から得られ、従って

$$\zeta_r(1-n; \alpha, \tilde{\omega}) = \frac{(-1)^r {}_r S'_n(\alpha; \tilde{\omega})}{n}$$

である。特に $r=1$ のときは、

$$\zeta(1-n, \alpha) = -\frac{B_n(\alpha)}{n} \quad (1.5)$$

である。

Remark 2. $\alpha=0$ の場合、つまり

$$\tilde{\zeta}_r(s; \tilde{\omega}) \stackrel{def}{=} \sum_{m_1, \dots, m_r=0}^{\infty} \frac{1}{(m_1 \omega_1 + \dots + m_r \omega_r)^s}$$

(和は、 m_1, \dots, m_r 各々が $(m_1, \dots, m_r) = (0, \dots, 0)$ 以外で非負整数上をわたる) は、

$$\tilde{\zeta}_r(s; \tilde{\omega}) = \zeta_r(s; \omega_1, \tilde{\omega}) + \tilde{\zeta}_{r-1}(s; (\omega_2, \dots, \omega_r))$$

により帰納的に \mathbf{C} へ解析接続され、 $\forall n \in \mathbf{N}$ に対して

$$\tilde{\zeta}_r(1-n; \tilde{\omega}) = \frac{(-1)^r {}_r S'_n(0; \tilde{\omega})}{n} - \delta \quad (1.6)$$

である。ここで、 δ は $n=1$ のとき 1 で、それ以外は 0 である。特に、

$$\tilde{\zeta}_2(1-n; (k, h)) = \frac{{}_2 S'_n(0; (k, h))}{n} - \delta = \frac{({}^1 B k + {}^2 B h)^{n+1}}{n(n+1)kh} - \delta$$

で、これが定理 1 の右辺の第 1 項とほぼ同じである。

<定理 1 の $\tilde{\zeta}_2$ を用いた証明の概略>

$\tilde{\zeta}_2$ を次のように変形する :

$$\begin{aligned}\tilde{\zeta}_2(s; (k, h)) &= \sum_{m, n=0}^{\infty'} \frac{1}{(km + hn)^s} = \sum_{a=0}^{h-1} \sum_{b=0}^{k-1} \sum_{m', n'=0}^{\infty'} \frac{1}{(ka + hb + kh(m' + n'))^s} \\ &= \sum_{a=0}^{h-1} \sum_{b=0}^{k-1} \sum_{N=0}^{\infty'} \frac{N+1}{(ka + hb + khN)^s}.\end{aligned}$$

この変形は、 $m = a + hm'$ ($0 \leq a \leq h-1, 0 \leq m' \in \mathbf{Z}$), $n = b + kn'$ ($0 \leq b \leq k-1, 0 \leq n' \in \mathbf{Z}$) とおきかえ、次に $N = m' + n'$ とおいて得られる。そして更に次のように変形される :

$$\begin{aligned}\tilde{\zeta}_2(s; (k, h)) &= \frac{1}{(kh)^s} \sum_{a=0}^{h-1} \sum_{b=0}^{k-1} \left\{ \sum_{N=0}^{\infty'} \frac{1}{\left(\frac{ka+hb}{kh} + N\right)^{s-1}} + \left(1 - \frac{ka+hb}{kh}\right) \sum_{N=0}^{\infty'} \frac{1}{\left(\frac{ka+hb}{kh} + N\right)^s} \right\} \\ &= \frac{1}{(kh)^s} \left\{ \sum_{a=0}^{h-1} \sum_{b=0}^{k-1} \zeta^* \left(s-1, \frac{ka+hb}{kh}\right) + \sum_{a=0}^{h-1} \sum_{b=0}^{k-1} \zeta^* \left(s, \frac{ka+hb}{kh}\right) \right. \\ &\quad \left. - \sum_{a=0}^{h-1} \sum_{b=0}^{k-1} \left(\frac{a}{h} + \frac{b}{k}\right) \zeta^* \left(s, \frac{ka+hb}{kh}\right) \right\} \quad (1.7).\end{aligned}$$

ここで、

$$\zeta^*(s, \alpha) = \begin{cases} \zeta(s, \alpha) & (\operatorname{Re}(\alpha) > 0 \text{ のとき}) \\ \zeta(s) & (\alpha = 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

である。

(1.7) において $s = 1 - n$ とおくと、(1.5), (1.6) ($r = 1$ のとき) より

$$\begin{aligned}\tilde{\zeta}_2(1-n; (k, h)) &= -\frac{(kh)^{n-1}}{n+1} \sum_{a=0}^{h-1} \sum_{b=0}^{k-1} B_{n+1} \left(\frac{ka+hb}{kh}\right) - \frac{(kh)^{n-1}}{n} \sum_{a=0}^{h-1} \sum_{b=0}^{k-1} B_n \left(\frac{ka+hb}{kh}\right) \\ &\quad + \frac{(kh)^{n-1}}{n} \sum_{a=0}^{h-1} \sum_{b=0}^{k-1} \left(\frac{a}{h} + \frac{b}{k}\right) B_n \left(\frac{ka+hb}{kh}\right) - \delta \quad (1.8)\end{aligned}$$

が得られる。(1.8) の右辺において、第 1 項目から $-\frac{B_{n+1}}{(n+1)kh}$ が、第 2 項目から $-\frac{B_n}{n}$ が、第 3 項目から $\frac{1}{n}\{h^{n-1}s_n(k, h) + k^{n-1}s_n(h, k)\}$ が現れる。この際必要な $B_n(x)$ の性質は、次の 2 つである。

(a) 差分式 (the difference equation) :

$$B_n(x+1) = B_n(x) + nx^{n-1}.$$

(b) 分配関係 (the distribution relation) : $N \in \mathbf{N}$ に対して

$$\sum_{i=0}^{N-1} B_n \left(x + \frac{i}{N}\right) = \frac{B_n(Nx)}{N^{n-1}}.$$

これらはともに、 $B_n(x)$ の母関数 (1.2) を用いて簡単に得られるが、 $\zeta(s, x)$ の持っている性質とも考えられる。例えば、(a) は

$$\zeta(s, x+1) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(x+1+m)^s} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(x+m)^s} - \frac{1}{x^s} = \zeta(s, x) - \frac{1}{x^s}.$$

そして、 $s = 1 - n$ とおけばよい。従って、 $\zeta'(s, x)$ ($\zeta(s, x)$ の s についての微分) も、同様な性質を持っていると考えられ、それが次のセクションで用いられる。

§2. デデキント和の微分について

§1 では、 $\tilde{\zeta}_2(1-n; (k, h))$ を変形することにより $s_n(k, h)$, $s_n(h, k)$ が現れ、更に相互法則が得られた。そこで今度は、 $\tilde{\zeta}'_2(1-n; (k, h))$ ($\tilde{\zeta}_2$ の s についての微分) からデデキント和の "微分" を定義し、相互法則を導くことを考える (詳細については [14] を参照)。 $s_n(k, h)$ は、 $\sum_{a=1}^{h-1} \frac{a}{h} \zeta^*(1-n, \frac{ka+hb}{kh})$ の項から得られたので、その微分は $\sum_{a=1}^{h-1} \frac{a}{h} (\zeta^*)'(1-n, \frac{ka+hb}{kh})$ から定義するのが自然に思われる。 $\zeta(s, z)$ の積分表示

$$\zeta(s, z) = \frac{\Gamma(1-s) e^{-\pi i}}{2\pi i} \int_{I(\lambda, \infty)} \frac{e^{-zt}}{1-e^{-t}} t^{s-1} dt$$

を用いて s について微分すると、被積分関数から $\log t$ が現れる。そこで、 $s = 1 - n$ とおいた値として次の関数を定義する。

定義 3. $0 \leq n \in \mathbf{Z}$ とし、 $z \in \mathbf{C}$, $\operatorname{Re}(z) > 0$ とする。 $LG_n(z)$ を

$$LG_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{I(\lambda, \infty)} \frac{e^{-zt} \log t}{1-e^{-t}} dt + \frac{(-1)^n}{n!} B_n(z)(\gamma - \pi i)$$

により定義する ($I(\lambda, \infty)$ は、定理 2 における積分路と同じである)。

$LG_n(z)$ は、その定義から $\zeta'(1-n, z)$ の主な部分を与える。 $LG_n(z)$ は、 $n=2$ のとき Shintani により導入され、Katayama-Ohtsuki により任意の n に拡張された (cf. [18,12])。

Remark 3. $LG_n(z)$ は、性質 (a),(b) を満たす (これは §1 の終わりで注意している)。

そこで、 $LG_n(z)$ を用いデデキント和の微分を次のように定義する。

定義 4. $n \in \mathbf{N}$ に対してデデキント和の微分を

$$s'_n(k, h) = (-1)^n n! \sum_{a=1}^{h-1} \frac{a}{h} LG_n \left(\left\{ \frac{ka}{h} \right\} \right)$$

$$s'_n(h, k) = (-1)^n n! \sum_{b=1}^{k-1} \frac{b}{k} LG_n \left(\left\{ \frac{hb}{k} \right\} \right)$$

により定義する。

次の相互法則が $\tilde{\zeta}'_2(1-n; (k, h))$ から得られる。

命題 1. (デデキント和の微分についての相互法則)

$$\frac{1}{n} \{h^{n-1} s'_n(k, h) + k^{n-1} s'_n(h, k)\} = \tilde{\zeta}'_2(1-n; (k, h)) - \zeta'(1-n) - \frac{1}{kh} \zeta'(-n) \\ + \frac{1}{n} \{h^{n-1} \log h \cdot s_n(k, h) + k^{n-1} \log k \cdot s_n(h, k)\} + \frac{A_{n-1}}{n} \{h^{n-1} s_n(k, h) + k^{n-1} s_n(h, k)\}.$$

ただし、 $A_j = \sum_{m=1}^j \frac{1}{m}$ ($j \geq 1$ のとき)、 $A_0 = 0$ である。

Remark 4. $\zeta'_2(1-n; \alpha, (k, h))$ を用いると、 α だけ shift した和の相互法則が得られる (下の定理 4 を参照)。

次に、相互法則を $n=1$ のときに考えてみる。 $n=1$ のときは

$$LG_1(z) = \log \Gamma(z) - \frac{1}{2} \log(2\pi) \quad , \quad \tilde{\zeta}'_2(0; (k, h)) = -\log \rho_2(k, h) \quad ,$$

$$\zeta'_2(0; \alpha, (k, h)) = \log \left\{ \frac{\Gamma_2(\alpha; (k, h))}{\rho_2(k, h)} \right\}$$

である。ここで、 ρ_2 、 Γ_2 は Barnes による the Stirling modular form と the double gamma function である (cf. [2, 3, 18, 19, 12])。これらを用いて相互法則を書き直してみると次が得られる。

定理 3.

$$T(k, h) = \sum_{a=1}^{h-1} \frac{a}{h} \log \Gamma \left(\left\{ \frac{ka}{h} \right\} \right) \quad , \quad T(h, k) = \sum_{b=1}^{k-1} \frac{b}{k} \log \Gamma \left(\left\{ \frac{hb}{k} \right\} \right) \quad \text{とおくと、}$$

$$T(k, h) + T(h, k) = \left(\frac{h+k}{4} - 1 \right) \log(2\pi) + \frac{1}{kh} \zeta'(-1) - \{s_1(h, k) \log k + s_1(k, h) \log h\} + \log \rho_2(k, h)$$

が成り立つ。

この定理の等式を $\rho_2(k, h)$ について解いて、次の系を得る。

系 1. $\rho_2(1, h/k)$ の有限積表示が次のように得られる：

$$\rho_2 \left(1, \frac{h}{k} \right) = (2\pi)^{1 - \frac{h+k}{4}} e^{-\frac{1}{kh} \zeta'(-1)} k^{\frac{1}{12kh} + \frac{1}{2}} \left(\frac{h}{k} \right)^{s_1(k, h)} \prod_{a=1}^{h-1} \Gamma \left(\left\{ \frac{ka}{h} \right\} \right)^{\frac{a}{h}} \prod_{b=1}^{k-1} \Gamma \left(\left\{ \frac{hb}{k} \right\} \right)^{\frac{b}{k}}.$$

定理 4.

(1) $\alpha \in \mathbf{R}$ とし

$$T(\alpha; k, h) = \sum_{\substack{a \neq a^0 \\ a=1}}^{h-1} \frac{a}{h} \log \Gamma \left(\left\{ \frac{\alpha + ka}{h} \right\} \right) \quad , \quad T(\alpha; h, k) = \sum_{\substack{b \neq b^0 \\ b=1}}^{k-1} \frac{b}{k} \log \Gamma \left(\left\{ \frac{\alpha + hb}{k} \right\} \right)$$

とおく。ただし、 a^0 (resp. b^0) は、 $1 \leq a^0 \leq h-1$, $\alpha + ka^0 \equiv 0 \pmod{h}$ (resp. $1 \leq b^0 \leq k-1$, $\alpha + hb^0 \equiv 0 \pmod{k}$) となる整数 (もし存在するならば) である。 α が、 $0 < \alpha < h+k$, $\alpha \in \mathbf{Z}$ のとき、次が成り立つ:

$$\begin{aligned} T(\alpha; k, h) + T(\alpha; h, k) &= \left(\frac{\alpha}{kh} - 1\right) \log(kh) + \frac{\alpha}{2kh} \log(2\pi) - \{\log h \cdot s_1(\alpha; k, h) \\ &+ \log k \cdot s_1(\alpha; h, k)\} + \{\log h \cdot s_1(k, h) + \log k \cdot s_1(h, k)\} + \frac{a^0}{2h} (2 \log k + \log h) \\ &+ \frac{b^0}{2k} (2 \log h + \log k) + \{T(h, k) + T(k, h)\} - \log \Gamma_2(\alpha; (k, h)). \end{aligned}$$

ここで、 $s_1(\alpha; k, h)$, $s_1(\alpha; h, k)$ は α だけ shift した和

$$s_1(\alpha; k, h) = \sum_{a=1}^{h-1} \frac{a}{h} \bar{B}_1\left(\frac{\alpha + ka}{h}\right), \quad s_1(\alpha; h, k) = \sum_{b=1}^{k-1} \frac{b}{k} \bar{B}_1\left(\frac{\alpha + hb}{k}\right)$$

である。

(2) $\alpha \in \mathbf{C}$, $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$ とし、

$$\tilde{T}(\alpha; k, h) = \sum_{a=1}^{h-1} \frac{a}{h} \log \Gamma\left(\frac{\alpha}{h} + \left\{\frac{ka}{h}\right\}\right), \quad \tilde{T}(\alpha; h, k) = \sum_{b=1}^{k-1} \frac{b}{k} \log \Gamma\left(\frac{\alpha}{k} + \left\{\frac{hb}{k}\right\}\right)$$

とおくと、次が成り立つ:

$$\begin{aligned} \tilde{T}(\alpha; k, h) + \tilde{T}(\alpha; h, k) &= \frac{1}{2kh} B_2(\alpha) - \frac{1}{kh} LG_2(\alpha) + \left(1 - \frac{\alpha}{kh}\right) \log \Gamma(\alpha) - \frac{1}{kh} \zeta'(-1) \\ &+ \frac{\alpha}{2kh} \log(2\pi) - \frac{(h-1)\alpha}{2h} \log h - \frac{(k-1)\alpha}{2k} \log k + \{T(k, h) + T(h, k)\} - \log \Gamma_2(\alpha; (k, h)) \end{aligned}$$

この定理の等式を $\Gamma_2(\alpha; (k, h))$ について解いて、次の系を得る。

系 2. Γ_2 の有限積表示が次のように得られる:

(1) α を $0 < \alpha < h+k$, $\alpha \in \mathbf{Z}$ とすると、

$$\begin{aligned} \Gamma_2(\alpha; (k, h)) &= (2\pi)^{\frac{\alpha}{2kh}} \cdot k^{s_1(h, k) - s_1(\alpha; h, k) + \frac{\alpha}{kh} - 1 + \frac{a^0}{h} + \frac{b^0}{2k}} \cdot h^{s_1(k, h) - s_1(\alpha; k, h) + \frac{\alpha}{kh} - 1 + \frac{a^0}{2h} + \frac{b^0}{k}} \\ &\cdot \frac{\prod_{b=1}^{k-1} \Gamma\left(\left\{\frac{hb}{k}\right\}\right)^{\frac{b}{k}} \prod_{a=1}^{h-1} \Gamma\left(\left\{\frac{ka}{h}\right\}\right)^{\frac{a}{h}}}{\prod_{\substack{b=1 \\ b \neq b^0}}^{k-1} \Gamma\left(\left\{\frac{\alpha + hb}{k}\right\}\right)^{\frac{b}{k}} \prod_{\substack{a=1 \\ a \neq a^0}}^{h-1} \Gamma\left(\left\{\frac{\alpha + ka}{h}\right\}\right)^{\frac{a}{h}}}. \end{aligned}$$

(2) $\alpha \in \mathbf{C}$, $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$ とすると、

$$\begin{aligned} \Gamma_2\left(\alpha; \left(1, \frac{h}{k}\right)\right) &= \exp\left\{\frac{1}{2kh} B_2(k\alpha) - \frac{1}{kh} LG_2(k\alpha) - \frac{1}{kh} \zeta'(-1)\right\} \Gamma(k\alpha)^{\left(1 - \frac{\alpha}{k}\right)} \\ &\cdot (2\pi)^{\frac{\alpha}{2h} h - \frac{(h-1)k\alpha}{2h}} k^{-\frac{h\alpha}{2} + 1 + \frac{k}{2h} \alpha^2 - \frac{k}{2h} \alpha} \prod_{a=1}^{h-1} \left(\frac{\Gamma\left(\left\{\frac{ka}{h}\right\}\right)}{\Gamma\left(\frac{k\alpha}{h} + \left\{\frac{ka}{h}\right\}\right)}\right)^{\frac{a}{h}} \prod_{b=1}^{k-1} \left(\frac{\Gamma\left(\left\{\frac{hb}{k}\right\}\right)}{\Gamma\left(\alpha + \left\{\frac{hb}{k}\right\}\right)}\right)^{\frac{b}{k}}. \end{aligned}$$

(3) α を正の整数とすると、

$$\Gamma_2(\alpha; (k, h)) = (2\pi)^{\frac{\alpha}{2kh}} \prod_{j=1}^{\alpha-1} \left(j^{1-\frac{\alpha-j}{kh}} \right) \cdot h^{-\frac{(h-1)\alpha}{2h}} \cdot k^{-\frac{(k-1)\alpha}{2k}}$$

$$\cdot \prod_{a=1}^{h-1} \left(\frac{\Gamma\left(\left\{\frac{ka}{h}\right\}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{h} + \left\{\frac{ka}{h}\right\}\right)} \right)^{\frac{a}{h}} \prod_{b=1}^{k-1} \left(\frac{\Gamma\left(\left\{\frac{hb}{k}\right\}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{k} + \left\{\frac{hb}{k}\right\}\right)} \right)^{\frac{b}{k}}.$$

Remark 5.

- (1) $\rho_2(1, z)$ および $\Gamma_2(\alpha, (1, z))$ の無限積表示が Shintani により得られていて、それによりそれぞれの関数が $\{z | z \in \mathbb{C} - (-\infty, 0]\}$ および $\{(\alpha, z) | z \in \mathbb{C} - (-\infty, 0], \alpha \neq -(m+nz), m, n = 0, 1, \dots\}$ に解析接続されている (cf. [19])。系 1, 2(2) は z が正の有理数点における表示を与えている。
- (2) もともとのデデキント和の相互法則が $\log \eta(z)$ の変換公式から得られたように、定理 3, 4 (その系) の別証が得られれば面白いと思われる。

§3. その他の拡張について (2つ)

ここではその他の拡張として、指標付きのデデキント和と多重デデキント和について述べる。2つとも Apostol の相互法則 (定理 1) の証明の自然な拡張である。この2種類の相互法則については、津田塾大学院生 (M2) の長坂裕美子さん、関根千鶴さんとの共同研究である (cf. [13])。

I. 指標付きのデデキント和

指標付きの和については、Berndt が 1970 年代に既にたくさん研究している。初めは、指標付きの Eisenstein 級数の変換公式に現れてくるものを指標付きの和と定義し、その相互法則を導いた (cf. [4, 5])。その後、Poisson の和公式を用いて、指標つきだけでなく周期的な集合に関する和の3項関係 (the three-term relation)、そして相互法則を証明した (cf. [6])。また、Berndt は theta 級数についても調べていて、theta 級数からは (-1) の冪を含んだ和が現れ、その相互法則が得られた (cf. [7])。

ここでは、異なる方法で異なる和 (ただし、特別な場合に $n = 1$ のとき Berndt のと少しずれた和になるが) を定義し、その相互法則を与える。

定義 5. χ を mod l で定義された Dirichlet 指標とし、 $l | kh$ とする。指標付きのデデキント和を

$$s_n(\chi; (k, h)) = k^{n-1} \sum_{a=0}^{h-1} \sum_{b=0}^{k-1} \frac{a}{h} \chi(ka + hb) \bar{B}_n \left(\frac{a}{h} + \frac{b}{k} \right)$$

$$s_n(\chi; (h, k)) = h^{n-1} \sum_{a=0}^{h-1} \sum_{b=0}^{k-1} \frac{b}{k} \chi(ka + hb) \bar{B}_n \left(\frac{a}{h} + \frac{b}{k} \right)$$

により定義する。 $\chi = \chi_0$ (主指標) のときは、

$$s_n(\chi_0; (k, h)) = s_n(k, h)$$

である。

Remark 6. 等式 $B_n(1-x) = (-1)^n B_n(x)$ を用いると、次のことがわかる。

- (1) χ が mod k の自明でない指標のとき、 $\chi(-1) = (-1)^\lambda$ とおくと $n \equiv \lambda \pmod{2}$ のとき、

$$\begin{cases} s_n(\chi; (h, k)) = \frac{1}{2} k^{1-n} B_{n,\chi} \\ s_n(\chi; (k, h)) = \frac{1}{2} (h^{1-n} - \chi(h)) B_{n,\chi} \end{cases}$$

- (2) $\chi = \chi_1 \chi_2$, χ_1, χ_2 はそれぞれ mod $k, \text{mod } h$ で定義された自明でない指標とする。
 $\chi(-1) = (-1)^\lambda$ とおくと $n \equiv \lambda \pmod{2}$ のとき、

$$s_n(\chi; (h, k)) = \frac{1}{2} k^{1-n} B_{n,\chi} \quad , \quad s_n(\chi; (k, h)) = \frac{1}{2} h^{1-n} B_{n,\chi} \cdot$$

定理 5. (指標つきの和についての相互法則) $n \in \mathbb{N}$, $\chi \neq \chi_0$ とすると、次が成り立つ:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \{h^{n-1} s_n(\chi; (k, h)) + k^{n-1} s_n(\chi; (h, k))\} &= \sum_{a=0}^{h-1} \sum_{b=0}^{k-1} \frac{\chi(ka+hb) ({}^1 B kh + {}^2 B kh + ka + hb)^{n+1}}{n(n+1)(kh)^2} \\ &\quad + \frac{B_{n+1,\chi}}{hk(n+1)} + \frac{B_{n,\chi}}{n} \end{aligned} \quad (3.1)$$

特に、 $\chi = \chi_1 \chi_2$ で、 χ_1, χ_2 はそれぞれ mod $k, \text{mod } h$ で定義された自明でない指標とすると、 $n=1$ のとき

$$s_1(\chi; (k, h)) + s_1(\chi; (h, k)) = \chi_1(h) \chi_2(k) B_{1,\chi_1} B_{1,\chi_2} + \frac{B_{2,\chi}}{2hk} + B_{1,\chi}$$

が成り立つ。

証明には

$$\tilde{\zeta}_2(s; (k, h), \chi) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{\chi(km+hn)}{(km+hn)^s}$$

の $s = 1 - n$ における値を用いる。

Remark 7. χ が mod k の自明でない指標で $n=1$ のとき、和の定義は少しずれているが、(3.1) は Berndt による相互法則と同じになる (cf. [5, 6])。

応用として、次の3つがあげられる。ただし、(1) (2) は相互法則の証明が考え方に使われている (cf. [15])。

- (1) $d (< -4)$ を虚2次体 $\mathbf{Q}(\sqrt{d})$ の判別式とし、 $\chi = \chi_d$ を $\mathbf{Q}(\sqrt{d})$ の Kronecker 指標、 $t \in \mathbf{N}$ を $t > 1$, $(t, d) = 1$ とする。 $\mathbf{Q}(\sqrt{d})$ の類数 $h(d)$ は次の式で与えられる：

$$h(d) = \frac{1}{t - \chi_d(t)} \sum_{j=1}^{\lfloor t/2 \rfloor} (t - 2j + 1) A_j(\chi_d, |d|, t).$$

ここで、

$$A_j(\chi_d, |d|, t) = \sum_{\substack{|d|(j-1) \leq b < |d|j \\ b \equiv 1 \pmod{t}}} \chi_d(b) \quad (\text{short character sum})$$

である。

- (2) d を (1) の通りとし、 $t > 1$ を $(t, d) = 1$ で td が $\mathbf{Q}(\sqrt{td})$ の判別式、2つの Kronecker 指標の商 $\chi_2 \stackrel{\text{set}}{=} \chi_{td}/\chi_d$ の conductor が t とする (従って χ_2 は mod t で定義される。conductor についての条件は、 $t \not\equiv 3 \pmod{4}$ と同じである)。このとき、 $\mathbf{Q}(\sqrt{td})$ の類数 $h(td)$ は

$$h(td) = 2 \sum_{j=1}^{\lfloor t/2 \rfloor} \left(\sum_{l=1}^{j-1} \chi_2(l) \right) A_j(\chi_d, |d|, t)$$

で与えられる。この式は Lerch-Mordell の類数公式と呼ばれ、また Szmidt-Urbanowicz-Zagier による「Zagier の等式」を用いた別証明がある (cf. [20], [21, Chap.I, § 9.7])。 (講演後にこのことを知りました。)

- (1),(2) を比較して次のような合同式が得られる： t は $t \equiv 1 \pmod{4}$ の素数とすると、

$$h(td) \equiv (1 - \chi_d(t)) h(d) \pmod{4}.$$

$h(d)$ が偶数のときはこれは当たり前であるが、 $h(d)$ が奇数の時 (従って $h(td)$ の 2-rank=1)

$$h(td) \equiv 0 \pmod{4} \iff \chi_d(t) = 1$$

という、Rédei-Reichardt の結果の一部が得られる (cf. [17])。 (この合同式に関して、Rédei-Reichardt の結果を含め内藤浩忠さん (香川大学) に講演後いろいろ教えて頂いたので、ここに感謝します。)

- (3) $d_1, d_2, \tilde{d}_1, \tilde{d}_2$ をそれぞれ虚2次体の判別式で、

$$d_1, d_2, \tilde{d}_1, \tilde{d}_2 < -4, \quad (d_1, d_2) = (\tilde{d}_1, \tilde{d}_2) = 1, \quad d_1 d_2 = \tilde{d}_1 \tilde{d}_2 = D$$

とする。 $\chi_1, \chi_2, \tilde{\chi}_1, \tilde{\chi}_2$ をそれぞれの Kronecker 指標として $\chi = \chi_1\chi_2 = \tilde{\chi}_1\tilde{\chi}_2$ とおくと、次が成り立つ：

$$h(d_1)h(d_2) - h(\tilde{d}_1)h(\tilde{d}_2) = \frac{1}{D} \left\{ \sum_{n \in S(|\tilde{d}_1|, |\tilde{d}_2|)} n \chi(n) - \sum_{n \in S(|d_1|, |d_2|)} n \chi(n) \right\}.$$

ここで、自然数 u, v に対して $S(u, v)$ は

$$S(u, v) = \{n = au + bv \mid a, b \in \mathbf{Z}, 0 \leq a < v, 0 \leq b < u, n > uv\}$$

という集合である。

II. 多重デデキント和

「多重」という言葉は、既に Halbritter により [11] で用いられていて、そこでは (1.1) のタイプのことを指している。ここでは、パラメーターが異なるので、また「多重」以外に適当な言葉が見つからないので、やはり多重デデキント和と呼ぶことにする。

定義 6. $z_1, \dots, z_{r-1} \in \mathbf{C}$, $z_1 \cdots z_{r-1} \neq 0$ とし、 $\tilde{z} = (z_1, \dots, z_{r-1})$ とおく。 $(k, h; \tilde{z})$ に関する r 重デデキント和を

$$\begin{aligned} (\mathbf{S}_r)_n(k, h; \tilde{z}) &= \sum_{a=1}^{h-1} \frac{a}{h} {}_r S'_n \left(\left\{ \frac{ka}{h} \right\}; \left(1, \frac{z_1}{h}, \dots, \frac{z_{r-1}}{h} \right) \right) \\ (\mathbf{S}_r)_n(h, k; \tilde{z}) &= \sum_{b=1}^{k-1} \frac{b}{k} {}_r S'_n \left(\left\{ \frac{hb}{k} \right\}; \left(1, \frac{z_1}{k}, \dots, \frac{z_{r-1}}{k} \right) \right) \end{aligned}$$

により定義する。 $r=1$ のときは $s_n(k, h)$ と同じである。

定理 6. (r 重デデキント和の相互法則) $n \in \mathbf{N}$ とすると、次が成り立つ：

$$\begin{aligned} h^{n-1} (\mathbf{S}_r)_n(k, h; \tilde{z}) + k^{n-1} (\mathbf{S}_r)_n(h, k; \tilde{z}) &= {}_{r+1} S'_n(0; (k, h, \tilde{z})) \\ &\quad - \frac{1}{kh} {}_{r+1} S'_n(1; (1, 1, \tilde{z})) + {}_r S'_n(0; (1, \tilde{z})). \end{aligned}$$

証明には $\tilde{\zeta}_{r+1}(1-n; (k, h, \tilde{z}))$ を用いる。この法則の応用はまだ得られていない。

References

1. Apostol, T., Generalized Dedekind sums and transformation formulae of certain Lambert series, *Duke Math. J.* **17** (1950), 147-157.
2. Barnes, E. W., The theory of the double gamma functions, *Proc. London Math. Soc.* **31**(1899), 358-381.
3. Barnes, E. W., The theory of the multiple gamma functions, *Trans. Cambridge Phil. Soc.* **19**(1904), 374-425.

4. Berndt, B. C., Character transformation formulae similar to those for the Dedekind eta-function, *Proc. Sym. Pure Math.* No.24, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1973, 9-30.
5. Berndt, B. C., On Eisenstein series with characters and the values of Dirichlet L-functions, *Acta Arith.* **28**(1975), 299-320.
6. Berndt, B. C., Reciprocity theorems for Dedekind sums and generalizations, *Advances in Math.* **23**, no.3(1977), 285-316.
7. Berndt, B. C., Analytic Eisenstein series, theta-functions and series relations in the spirit of Ramanujan, *J. Reine Angew. Math.* **303/304**(1978), 332-365.
8. Chapman, R., Reciprocity laws for generalized higher dimensional Dedekind sums, *Acta Arith.* **93**(2)(2000), 189-199.
9. Egami, S., Reciprocity laws of multiple zeta functions and generalized Dedekind sums, in "Analytic Number Theory and Related Topics", K. Nagasaka(ed.), World Scientific, 1993, 17-27.
10. Halbritter, U., Berechnung der Werte von Zetafunktionen totalreeller kubischer Zahlkörper an ganzzahligen Stellen mittels verallgemeinerter Dedekindscher Summen, I, *J. Reine Angew. Math.* **361**(1985), 95-117.
11. Halbritter, U., Berechnung der Werte von Zetafunktionen totalreeller kubischer Zahlkörper an ganzzahligen Stellen mittels verallgemeinerter Dedekindscher Summen, II, *Results in Math.* **13**(1988), 99-134.
12. Katayama, K. and Ohtsuki, M., On the multiple gamma-functions, *Tokyo J. Math.* **21**(1998), 159-182.
13. Nagasaka, Y., Ota, K. and Sekine, C., Generalizations of Dedekind sums and their reciprocity laws, *preprint*.
14. Ota, K., Derivatives of Dedekind sums and their reciprocity law, *preprint*.
15. Ota, K., Dedekind sums with characters and class numbers of imaginary quadratic fields, *in preparation*.
16. Rademacher, H., "Topics in Analytic Number Theory", Grundlehren Math. Wiss. **169**, Springer-Verlag, 1973.
17. Rédei, L. and Reichardt, H., Die Anzahl der durch 4 teilbaren Invarianten der Klassengruppe eines beliebigen quadratischen Zahlkörpers, *J. Reine Angew. Math.* **170**(1933), 69-74.

18. Shintani, T., On a Kronecker limit formula for real quadratic fields, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec.IA* **24** (1977), 167-199.
19. Shintani, T., A proof of the classical Kronecker limit formula, *Tokyo J. Math.* **3**, no.2(1980), 191-199.
20. Szmidt, J., Urbanowicz, J. and Zagier, D., Congruences among values of Dirichlet L -series at negative integers, *Acta Arith.* **71**(1995), 243-248.
21. Urbanowicz, J. and Williams, K.S., "Congruences for L -functions", *Mathematics and Its Applications* **511**, Kluwer Acad. Pub., 2000.