数理解析研究所講究録 1200 巻 2001 年 179-185



# 実アーベル体の岩澤$\lambda$不変量について

東京大学大学院数理科学研究科・研究生・都地 崇恵 (TSUJI Takae)
Graduate School of Mathematical Sciences, University of Tokyo

## 1 序

$p$を素数とする. 代数体$k$に対して, $k_\infty/k$で円分$\mathbb{Z}_p$拡大を表す. つまり, $k_\infty$を$k$に1の$p$べき乗根全体$\boldsymbol{\mu}_{p^\infty}$を添加した体$k(\boldsymbol{\mu}_{p^\infty})$の部分体で$k$上のGalois群が$\mathbb{Z}_p$の加法群と同型になる唯一の体とする. 各$n\geq 0$に対し, $k$上$p^n$次となる$k_\infty/k$の中間体を$k_n$とする. $k_n$のイデアル類群の$p$-Sylow部分群を$A_n(k)$と書き,

$$A_\infty(k):=\varprojlim A_n(k)$$

とおく. ここで, 射影極限はノルムによるものとする. このとき, 次が予想されている ([6]):

**Greenberg 予想** $(p,k)$**.** $k$が総実代数体ならば$A_\infty(k)$は位数有限であろう.

現在のところ, その正否について一般的なことは殆ど証明されていないが, 予想が成立するための (必要) 十分条件を与え, 実例でそれを確かめるという研究は多く行われている. その中, 市村–隅田 ([7, 8, 9]) は$k$がアーベル体で拡大次数$[k:\mathbb{Q}]$が$p$と素なとき, 予想が成り立つための必要十分条件を円単数や$p$進$L$関数などを用いて簡明な形で与えている (Kraft–Schoof [11], 栗原 [12] でも同様の形の判定条件が与えられている). それは実例計算には非常に有効なものであり, 実際それを用いることで$p=3$, $k=\mathbb{Q}(\sqrt{m})(1<m<10^4)$に対して予想が正しいことが確認できている. その後, 福田–小松 [4] は, $k$が$p$次巡回体で$p$が分解するとき, 市村–隅田と同様の形の判定条件を与えた.

今回は市村–隅田の結果を拡張し, 拡大次数が$p$で割れる場合も含めたすべての実アーベル体に適用できる判定条件を与えた.

## 2 主結果

記号は前節の通りとする. $p$は奇素数とし, $k$は実アーベル体で$k\cap\mathbb{Q}_\infty=\mathbb{Q}$を満たす, つまり導手が$p^2$で割れないとする. $\Delta:=\mathrm{Gal}(k/\mathbb{Q})$, $\Gamma:=\mathrm{Gal}(k_\infty/k)$と

すれば, $\mathrm{Gal}(k_\infty/\mathbb{Q}) \cong \Delta \times \Gamma$ と分解でき, $A_\infty(k)$ は完備群環 $\mathbb{Z}_p[\Delta][\![\Gamma]\!]$ 上の加群となる. さらに, $A_\infty(k)$ は $\mathbb{Z}_p[\Delta][\![\Gamma]\!]$ 上有限生成かつ torsion であることが知られている. まず, アーベル体 $k$ に対する Greenberg 予想は $\Delta$ の指標を用いて, $A_\infty(k)$ を分解することにより, 指標ごとの予想に帰着できることを述べる. $\mathbb{Z}_p[\Delta]$ 加群 $M$ と $\Delta$ の指標 $\chi \in \widehat{\Delta} := \mathrm{Hom}(\Delta, \overline{\mathbb{Q}}_p^\times)$ に対し, $M^\chi$ を次のように定める:

$$M^\chi := \{m \in M \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p[\chi] \mid \delta m = \chi(\delta)m \ \forall \delta \in \Delta\}.$$

ただし, $\mathbb{Z}_p[\chi]$ は $\mathbb{Z}_p$ 上 $\chi$ の値で生成される環とする. このとき, $\mathfrak{O}$ を $\mathbb{Z}_p$ に $\Delta$ のすべての指標の値を添加した環とすれば, 自然な写像 $\bigoplus_{\chi\in\widehat{\Delta}} M^\chi \otimes_{\mathbb{Z}_p[\chi]} \mathfrak{O} \to M \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathfrak{O}$ の核と余核は $\Delta$ の位数倍で消えることが分かる (とくに $\Delta$ の位数が $p$ と素ならばそれらはともに自明である). よって, $M$ が $\mathbb{Z}_p$ 上有限生成ならば, それらはともに位数有限になる. $A_\infty(k)$ は Ferrero–Washington の定理 ([3]) より, 有限生成 $\mathbb{Z}_p$ 加群になることが知られているので, $k$ に対する Greenberg 予想は $\Delta$ のすべての指標 $\chi$ に対し, $A_\infty(k)^\chi$ が位数有限であることと同値になる. さらに, $k_\chi$ を $\chi$ に対応するアーベル体とすれば, ノルム写像 $A_\infty(k)^\chi \to A_\infty(k_\chi)^\chi$ の核と余核は有限になることがわかる. 従って, $A_\infty(k)^\chi$ の有限性はアーベル体 $k$ には依らず, $\chi$ のみに依存する.

導手が $p^2$ で割れない even な Dirichlet 指標 $\chi$ を 1 つ固定し, $k = k_\chi$, $\Delta = \mathrm{Gal}(k_\chi/\mathbb{Q})$ とする. また, $A_\infty(k_\chi)^\chi$ は単に $A_\infty^\chi$ と書き, $\mathbb{Z}_p[\chi]$ は $\mathcal{O}$ で表す. 1 つ固定した $\Gamma$ の位相的生成元 $\gamma$ に $1+T$ を対応させることにより, 完備群環 $\mathcal{O}[\![\Gamma]\!]$ とべき級数環 $\Lambda := \mathcal{O}[\![T]\!]$ を同一視し, $A_\infty^\chi$ を $\Lambda$ 加群と見なす. $A_\infty^\chi$ の $\Lambda$ 加群としての特性多項式, $\lambda$ 不変量をそれぞれ $\mathrm{char}_\Lambda A_\infty^\chi$, $\lambda_\chi$ と書く. このとき, 定義より $\lambda_\chi = \deg(\mathrm{char}_\Lambda A_\infty^\chi)$ であり, これは $A_\infty^\chi$ の $\mathcal{O}$ 加群としての階数に一致する. 上でも述べたように $A_\infty^\chi$ は有限生成 $\mathcal{O}$ 加群であるから, $p$ と $\chi$ に対する Greenberg 予想は次のようになる:

**Greenberg 予想 $(p,\chi)$.** 導手が $p^2$ で割れない even な Dirichlet 指標 $\chi$ に対し,

$$\mathrm{char}_\Lambda A_\infty^\chi = 1, \quad \text{すなわち} \quad \lambda_\chi = 0.$$

まず, Mazur–Wiles の定理 [13](岩澤主予想) より, $\mathrm{char}_\Lambda A_\infty^\chi = 1$ は, $p$ 進 $L$ 関数を使った条件に言い換えられることを述べる. $\gamma$ の円分指標 $\Gamma \to 1 + p\mathbb{Z}_p$ による像を $1+q$ と書く. $\chi$ に対応する Kubota–Leopoldt の $p$ 進 $L$ 関数を $L_p(s,\chi)$ で表す. このとき, 次を満たすべき級数 $g_\chi(T) \in \mathcal{O}[\![T]\!]$ が唯 1 つ存在することが知られている

$$g_\chi((1+q)^s - 1) = L_p(1-s,\chi)$$

([15, Theorem 7.10] 参照). さらに, Ferrero–Washington の定理と $p$ 進 Weierstrass 準備定理より, distinguished 多項式 $P_\chi(T) \in \mathcal{O}[T]$ と $\Lambda$ の単数 $u_\chi(T)$ があって,

$$g_\chi(T) = u_\chi(T)P_\chi(T)$$

と一意的に分解できる. このとき, Mazur–Wiles の定理と類体論より

$$\mathrm{char}_\Lambda A_\infty^\chi \mid P_\chi(T)$$

が導かれる (とくに, $\lambda_\chi^* = \deg P_\chi(T)$ とおけば, $\lambda_\chi \leq \lambda_\chi^*$). 従って, $\mathrm{char}_\Lambda A_\infty^\chi = 1$ が成立することと $P_\chi(T)$ のすべての既約因子 $P(T) \in \mathcal{O}[T]$ に対して, $P(T) \nmid \mathrm{char}_\Lambda A_\infty^\chi$ が成立することが同値であることがわかる.

そこで $P(T) \mid P_\chi(T)$ なる多項式 $P(T) \in \mathcal{O}[T]$ を 1 つ固定する. 本稿の目的は $P(T) \nmid \mathrm{char}_\Lambda A_\infty^\chi$ が成立するための必要十分条件を与えることである. そこで重要な役割を果たすのは市村–隅田 ([7, 8, 9]) によって導入された多項式 $X_{P,n}(T)$ で, その定義を述べる. $n \geq 0$ に対し,

$$\vartheta_n^\chi(T) = \begin{cases} (1+T)^{p^n} - 1 & (\chi(p) \neq 1 \text{ のとき}) \\ \dfrac{(1+T)^{p^n} - 1}{T} & (\chi(p) = 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

とおく. Brumer [1] によって証明されたアーベル体に対する Leopoldt 予想から, $\Lambda/(P, \vartheta_n^\chi)$ が位数有限であることが導かれる. そこで $\Lambda/(P, \vartheta_n^\chi)$ のアーベル群としての exponent を $m_{P,n}$ とする. このとき, 次を満たす多項式 $X_{P,n}(T) \in \mathcal{O}[T]$ が $\vartheta_n^\chi$ を法として一意的に定まる:

$$X_{P,n}(T)P(T) \equiv m_{P,n} \mod \vartheta_n^\chi.$$

$\mathcal{O}$ の $\mathbb{Z}_p$ 上の基底 $\{\theta_1, \cdots, \theta_s\}(s = [\mathcal{O} : \mathbb{Z}_p])$ を 1 つ固定し,

$$\Big(\sum_{\delta \in \Delta} \chi(\delta)^{-1}\delta\Big) X_{P,n}(T) = \sum_{j=1}^{s} X_{P,n}^{(j)}(T)\theta_j, \qquad X_{P,n}^{(j)}(T) \in \mathbb{Z}_p[\Delta][T]$$

と表す. さらに, 次を満たすように $Y_{P,n}^{(j)}(T) \in \mathbb{Z}[\Delta][T]$ を選ぶ:

$$Y_{P,n}^{(j)} \equiv X_{P,n}^{(j)} \mod m_{P,n}.$$

整数 $m \geq 1$ に対し, 1 の原始 $m$ 乗根 $\zeta_m$ を 1 つ固定する. $k$ の導手の $p$ と素な部分を $f$ とおく. $k_n$ の円単数 $c_n$ を次のように定義する:

$$c_n = \begin{cases} N_{\mathbb{Q}(\zeta_{fp^{n+1}})/k_n}(1 - \zeta_{fp^{n+1}})^{t-1} & (f \neq 1 \text{ のとき}) \\ N_{\mathbb{Q}(\zeta_{p^{n+1}})/k_n}\left(\dfrac{1 - \zeta_{p^{n+1}}}{1 - \zeta_{p^{n+1}}^b}\right)^{t-1} & (f = 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

ここで $t$ は $k$ の $p$ 上の素イデアルによる剰余体の位数とし, $b$ は $\bmod p^2$ の原始根とする.

主結果は次の通りである:

**定理 1.** $P(T) \mid P_\chi(T)$ なる多項式 $P(T) \in \mathcal{O}[T]$ に対し, 次の 2 つは同値である:

(i) $P(T) \nmid \mathrm{char}_\Lambda A_\infty^\chi$

(ii) ある $n \geq 0$ で, 次の条件が成立する:

$$(H_{P,n}) \qquad c_n^{Y_{P,n}^{(j)}(\gamma-1)} \notin (k_n^\times)^{m_{P,n}} \quad (1 \leq \exists j \leq s).$$

$\chi$ の位数が $p$ で割れないとき, この結果は市村–隅田 [7, 9] の主定理に一致する.

**注.** 条件 $(H_{P,n})$ は $X_{P,n}$, $Y_{P,n}^{(j)}$ $(1 \leq j \leq s)$ および $\mathcal{O}$ の $\mathbb{Z}_p$ 上の基底の選び方には依らない.

以上より, $\chi$ に対する Greenberg 予想, つまり $\lambda_\chi = 0$ が成立することは $P_\chi(T)$ のすべての既約因子 $P(T) \in \mathcal{O}[T]$ に対し, ある $n \geq 0$ で条件 $(H_{P,n})$ が成立することと同値になることが得られたので, これを用いて Greenberg 予想の判定が行える. 実際, 多項式 $Y_{P,n}^{(j)}(T)$, 円単数 $c_n$ および $m_{P,n}$ は計算可能な元であり, $c_n^{Y_{P,n}^{(j)}(\gamma-1)}$ が $m_{P,n}$ 乗元にならないことを確かめるには $k_n$ の次数 1 の素イデアル $\mathfrak{L}$ を使って,

$$c_n^{Y_{P,n}^{(j)}(\gamma-1)} \bmod \mathfrak{L} \notin ((\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})^\times)^{m_{P,n}}, \qquad ((l) = \mathfrak{L} \cap \mathbb{Q})$$

が成立するかを考察することが有効である. ここで, Chebotarev の密度定理を使えば, 上の条件を満たす $\mathfrak{L}$ が存在することと条件 $(H_{P,n})$ は同値であることも分かる.

$P_\chi(T)$ のある特別な因子 $P(T)$ に対しては定理における条件 $(H_{P,n})$ を実際に確かめるまでもなく, $P(T) \nmid \mathrm{char}_\Lambda A_\infty^\chi$ が成り立つことを証明した. その結果にも触れておく. $\omega$ を Teichmüller 指標とする.

$$g_\chi(q) = -(1 - \chi\omega^{-1}(p))B_{1,\chi\omega^{-1}},$$

($B_{1,\chi\omega^{-1}}$ は一般 Bernoulli 数) である. よって, $\chi\omega^{-1}(p) \in \boldsymbol{\mu}_{p^\infty}$ ならば常に $\lambda_\chi^* \geq 1$ である. このとき, 次を示した:

**命題 2.** $\chi\omega^{-1}(p) \in \boldsymbol{\mu}_{p^\infty}$ と仮定する. $P(T) \mid P_\chi(T)$ となる多項式 $P(T) \in \mathcal{O}[T]$ に対して,

$$(*) \qquad \mathrm{ord}_p(Q(q)) < \mathrm{ord}_p(1 - \chi\omega^{-1}(p)) \qquad (Q(T) = P_\chi(T)/P(T))$$

ならば, $P(T) \nmid \mathrm{char}_\Lambda A_\infty^\chi$ が成り立つ. とくに, $P_\chi(T)$ は $(*)$ を満たすので

$$\lambda_\chi \leq \lambda_\chi^* - 1$$

が成立する.

$\chi\omega^{-1}(p) = 1$ のとき, $q$ が $P_\chi(T)$ の単根であること ([2, Proposition 2]) と命題 2 より, 次が得られる:

$$T - q \mid P_\chi(T), \quad T - q \nmid \mathrm{char}_\Lambda A_\infty^\chi.$$

この主張は, $\chi$ の位数が $p$ で割れないときには, すでに市村–隅田 ([8, Remark 5]) によって証明されている.

$\chi\omega^{-1}(p) \in \boldsymbol{\mu}_{p^\infty}$ かつ $\chi\omega^{-1}(p) \neq 1$ のとき, 命題 2 における条件 $(*)$ は次が成立することと同値であることに注意しておく:

$$v_{\mathcal{O}}(P(q)) > v_{\mathcal{O}}(B_{1,\chi\omega^{-1}})$$

## 3 証明について

$k_n$ の整数環を $O_n$ で表し, $(O_n \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p)^\times$ の $p$ 進完備化を $\mathscr{U}_n$ とおく. 埋め込み $k_n^\times \hookrightarrow (k_n \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p)^\times$ による $k_n$ の単数群の像を $E_n$ とおき, $E_n \cap \mathscr{U}_n$ の閉包を $\mathscr{E}_n$ で表す. それぞれのノルムによる射影極限を

$$\mathscr{U} := \varprojlim \mathscr{U}_n, \qquad \mathscr{E} := \varprojlim \mathscr{E}_n$$

と書く. このとき, $\mathscr{U}$ と $\mathscr{E}$ は $\mathbb{Z}_p[\Delta][\![\Gamma]\!]$ 加群であるから, $\Lambda$ 加群 $\mathscr{U}^\chi$ と $\mathscr{E}^\chi$ が定まる. Mazur–Wiles の定理と類体論より,

$$\mathrm{char}_\Lambda(\mathscr{U}^\chi/\mathscr{E}^\chi) \cdot \mathrm{char}_\Lambda A_\infty^\chi = P_\chi(T)$$

が導かれる. そこで, $P(T) \in \mathcal{O}[T]$ を $P_\chi(T)$ の因子としたとき, 条件 $P(T) \nmid \mathrm{char}_\Lambda A_\infty^\chi$ は $\mathrm{char}_\Lambda(\mathscr{U}^\chi/\mathscr{E}^\chi) \nmid (P_\chi(T)/P(T))$ と書き直せることがわかる. この条件を $\mathscr{E}^\chi$ の生成元, つまり $k_n (n \geq 0)$ の基本単数を用いて書き直すのでなく, その中の具体的に扱える円単数 $(\prod_{\delta\in\Delta} c_n^{\chi(\delta^{-1})\delta})_{n\geq 0} \in \mathscr{E}^\chi$ で生成される部分加群 $\mathscr{C}^\chi$ を考察することで, 基本単数には依らない条件 $(H_{P,n})$ に書き換えられることを証明する. $\mathscr{U}^\chi/\mathscr{C}^\chi$ の $\Lambda$ 構造は $P_\chi(T)$ を用いて表わせることが, $k$ の拡大次数が $p$ で割れないときには, 岩澤 [10], Gillard [5] によって証明されており, 市村–隅田 [7, 9] ではそれが証明の重要な役割を果たしていた. 市村–隅田の結果において $k$ の拡大次数が $p$ で割れないと仮定した一番大きな理由はこの岩澤, Gillard の結果がそ

の仮定の下でしか証明されていなかったことである. [14] では次数が $p$ で割れる場合も含めたすべてのアーベル体 $k$ に対し, $\mathcal{U}^\times/\mathcal{C}^\times$ の構造を決定したので, この結果を用いることで市村-隅田の結果の拡張となる定理 1 が得られた. 命題 2 は, $\chi\omega^{-1}(p) \in \boldsymbol{\mu}_{p^\infty}$ のとき, $\mathcal{U}_n^\times (n \geq 0)$ の $\mathbb{Z}_p$-torsion 部分が自明でないことを使って証明する.

# 参考文献


[1] A. Brumer, *On the units of algebraic number fields,* Mathematika **14** (1967) 121–124.

[2] B. Ferrero and R. Greenberg, *On the behavior of p-adic L-functions at $s = 0$,* Invent. math. **50** (1978) 91–102.

[3] B. Ferrero and L. C. Washington, *The Iwasawa invariant $\mu_p$ vanishes for abelian number fields,* Ann. of Math. (2) **109** (1979) 377–395.

[4] T. Fukuda and K. Komatsu, *Ichimura-Sumida criterion for Iwasawa $\lambda$-invariants,* Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **76** (2000) 111–115.

[5] R. Gillard, *Unités cyclotomiques, unités semi-locales et $\mathbb{Z}_\ell$-extensions II,* Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **29** (1979) 1–15.

[6] R. Greenberg, *On the Iwasawa invariants of totally real number fields,* Amer. J. Math. **98** (1976) 263–284.

[7] H. Ichimura and H. Sumida, *On the Iwasawa invariants of certain real abelian fields,* Tôhoku Math. J. **49** (1997) 203–215.

[8] H. Ichimura and H. Sumida, *On the Iwasawa $\lambda$-invariant of the p-cyclotomic field,* J. Math. Sci. Univ. Tokyo. **3** (1996) 457–470.

[9] H. Ichimura and H. Sumida, *On the Iwasawa invariants of certain real abelian fields II,* Internat. J. Math. **7** (1996) 721–744.

[10] K. Iwasawa, *On some modules in the theory of cyclotomic fields,* J. Math. Soc. Japan **16** (1964) 42–82.

[11] J. Kraft and R. Schoof, *Computing Iwasawa modules of real quadratic number fields,* Compositio Math. **97** (1995) 135–155.

[12] M. Kurihara, *The Iwasawa $\lambda$-invariants of real abelian fields and the cyclotomic elements,* Tokyo J. Math. **22** (1999) 259–277.

[13] B. Mazur and A. Wiles, *Class fields of abelian extensions of* $\mathbb{Q}$, Invent. math. **76** (1984) 179–330.

[14] T. Tsuji, *Semi-local units modulo cyclotomic units,* J. Number Theory **78** (1999) 1–26.

[15] L. C. Washington, *"Introduction to Cyclotomic Fields"*, Grad. Texts in Math. 83, Springer-Verlag 1982.

E-mail : `ttsuji@ms.u-tokyo.ac.jp`