数理解析研究所講究録 1204 巻 2001 年 9-20

Neumann 条件下の楕円型方程式に対する非球対称解の存在

宮崎大学工学部 壁谷 喜継 (Yoshitsugu Kabeya)

Abstract

English translation of the title is "Existence of a nonradial solution to an elliptic equation ith the homogeneous Neumann condition".

This is an expository note on the existence of a spiky solution to some elliptic equation with the homogeneous Neumann condition. A spiky solution is not raidally symmetric, however, we use several properties of radial solutions to the same equation in the whole space. Most results are due to W.-M. Ni and I. Takagi. None of the results here is due to the author.

1 序

ここでは，内藤雄基氏の球対称性の解説を受けて，Neumann 条件下での spiky solution の存在についての解説を行う．spiky solution は，領域が球であっても球対称性を持たない解であり，Neumann 条件の解の特徴を如実に示すものである．より詳しい解の性質については仙葉隆氏の解説に委ね（特に 2 次元の場合で非線形が指数関数であるとき），基本的な部分に関してのみ述べる．

考える問題は

$$\begin{cases} \epsilon^2\Delta u - u + f(u) = 0 \quad u > 0 \quad \text{in } \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \tag{1.1}$$

但し，

$$f(u) = (\max\{u, 0\})^p$$

であり，Ω は $\mathbf{R}^n$ の滑らかな境界を持つ有界領域，$\epsilon > 0$，$n \geq 3$，$1 < p < (n+2)/(n-2)$ とする．(1.1) は細胞性粘菌の運動を記述する Keller-Segel 方程式の定常問題や ヒドラの「ヒゲ」の形態形成を記述する Gierer-Meinhardt system (activator-inhibitor system) [5] から導かれる方程式である．基本戦略は $\epsilon \to 0$ として解の形状を際立たせ，望むべき形の解の存在を示すという方法を採る．ここでは，考える解はいわゆる "least energy solution" 即ち

$$c_\epsilon := \inf_{u \in H^1(\Omega),\ u \not\equiv 0} \frac{\int_\Omega (\epsilon^2 |\nabla u|^2 + |u|^2)\, dx}{(\int_\Omega |u|^{p+1}\, dx)^{2/(p+1)}} \tag{1.2}$$

を実現するもののみを考える．得られる結果は次の通りである．

Theorem 1.1 (Lin-Ni-Takagi [7], Ni-Takagi [9, 10]) $\epsilon > 0$ が十分小さければ, *(1.1)* の *least energy solution* は次を満たす.

(i) 最大値は一様に有界である.

(ii) 最大値は境界上の一点でとる.

(iii) 最大値の近傍を除けば，解の値は十分 0 に近い.

(iv) 最大値を与える点は，境界の平均曲率最大の点に $\epsilon \downarrow 0$ のとき収束する.

Remark. Theorem 1.1 は, Ω が球であっても, **球対称でない解**の存在を示していることになる．Dirichlet 問題の解が必然的に球対称解になるのとは対照的である (Gidas, Ni and Nirenberg [3])．境界上の値が一定である保証はなく，技術的にも moving plane method は Neumann 条件の下では使えない.

また，least energy solution は一意か？という問いは未解決である.

Theorem 1.1 にあるように least energy solution は非球対称であるが, 実は次にみるように全空間の正値球対称解と密接な関係を持つ.

Theorem 1.2 *least energy* レベル c_ϵ は $\epsilon \downarrow 0$ のとき

$$c_\epsilon = \epsilon^n \Big\{ \frac{1}{2} I(w) - (n-1) H(P_\epsilon) \gamma \epsilon + o(\epsilon) \Big\} \qquad (1.3)$$

なる関係式を満たす．ここで，P_ϵ は *least energy solution* の最大値を与える境界上の点であり，$H(P_\epsilon)$ はそこでの平均曲率，w は

$$\Delta w - w + w^p = 0 \text{ in } \mathbf{R}^n,\ w > 0,\ w \to 0 \text{ as } |x| \to \infty. \qquad (1.4)$$

の唯一の解であり，

$$I(w) := \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}^n} (|\nabla w|^2 + w^2)\, dx - \frac{1}{p+1} \int_{\mathbf{R}^n} |w|^{p+1}\, dx,$$

$$\gamma := \frac{1}{n+1} \int_{\mathbf{R}^n_+} (w'(|x|))^2 x_n\, dx$$

である．ここに，$\mathbf{R}^n_+ := \{x = (x', x_n) \,|\, x' = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbf{R}^{n-1}, x_n > 0\}$ である．

Remark. (1.4) の解の存在は Strauss [13]，一意性については Chen and Lin [1]， Kwong [6] らによる．球対称性については Gidas, Ni and Nirenberg [4] による．(1.3) の展開式をみれば，Theorem 1.1 の (iii) は納得できるものであろう．

いまは，$\epsilon \downarrow 0$ を考えたが，逆に $\epsilon \to \infty$ を考えてみよう．次のことが分かる．

Theorem 1.3 $\epsilon > 0$ が十分大のとき，*(1.1)* の解は $u \equiv 1$ のみである．

この定理は $u \equiv 1$ からの分岐を考えると，理解しやすい．least energy solution は，$-\Delta$ の Neumann 条件に関する最小の正の固有値から分岐した「枝」(一次元的であるとは言えないが) にあると考えられるが，詳しいことはよく分かっていない模様である．分岐の議論に関しては，仙葉氏の解説をみられた

い．最後に，よく使う記号をあげておく．

$$\begin{aligned} B_r(a) &:= \{x \in \mathbf{R}^n \,|\, |x-a| < r\} \\ B_r &:= B_r(0) \\ B_r^+ &:= \{x \in B_r \,|\, x_n > 0\} \\ B_r^- &:= \{x \in B_r \,|\, x_n < 0\}. \end{aligned}$$

2 定理の証明の概略

ここにあげた定理の証明は，すべて Lin, Ni and Takagi [7], Ni and Takagi [9, 10] にあるので，ここでは概略を述べるだけに止める．

Theorem 1.1 の証明の概略. (i) は，方程式に u^{2s-1} $(s \geq 1)$ をかけて部分積分すると

$$\frac{2s-1}{s^2}\epsilon^2 \int_\Omega |\nabla u^s|^2\,dx + \int_\Omega u^{2s}\,dx = \int_\Omega u^{2s-1+p}\,dx$$

を得る．さらに Sobolev の不等式を使い（埋め込みの定数は，Ω の体積によらず，その cone property に依存することを使う．これにより，領域の拡大縮小に関して埋め込みの定数は変化しない），

$$\Bigl(\int_\Omega u^{2ns/(n-2)}\,dx\Bigr)^{(n-2)/n} \leq Ks\epsilon^{-2}\int_\Omega u^{2s-1+p}\,dx$$

を得て，s と係数について iteration をすれば求めるべき一様評価がでる．

(ii) は，3 steps で証明される．Step 1 は，極大値をあたえる点 P_ϵ と境界との距離が高々 ϵ オーダーであること示すことである．もしそうでないとすれば，$\mathrm{dist}\,(P_{\epsilon_j}, \partial\Omega)/\epsilon_j \to \infty$ となる列がとれることになる．この列に対して，$v_j(z) := u_{\epsilon_j}(P_{\epsilon_j} + \epsilon_j z)$ とおく．すると更に部分列をとることで (1.4) の一意解に収束させることができる．これを使って，c_ϵ の積分量の下からの評価

$$c_{\epsilon_j} \geq \epsilon_j^n\Bigl(I(w) - Ce^{-\mu R}\Bigr)$$

($C > 0$, $\mu > 0$ は j によらない）を得る．しかし，これは Theorem 1.2 の評価に反し，矛盾が出る。

Step 2 は ϵ が十分小さいときに極大点 P_ϵ が境界上に確かにあることを示すことである．そうでないとすれば，$\epsilon > 0$ である限り極大点は Ω の内部にとどまることになり，Ω が有界であることと Step 1. から P_ϵ を境界上の点 P_0 に収束させることができる．方程式は平行移動に関して不変であるから，P_0 は原点だとし，Ω の内部は $x_n > 0$ の側にあるとしてよい．ここで，境界を diffeomorphic に平面に写すことを考える．

$$\psi \in C^\infty([-\delta, \delta]), \quad \psi(0) = 0, \psi'(0) = 0$$

があって

(i) $\partial\Omega \cap U = \{(x', \psi(|x'|)) \mid |x'| < \delta\}$.

(ii) $\Omega \cap U = \{(x', x_n)) \mid x_n > \psi(|x'|)\}$

と表される．ψ は $|x'|$ だけの函数である．

$$\Phi_j(y) := \begin{cases} y_j - y_n\psi'(|y'|)\dfrac{y_j}{|y_j|}, & j = 1, \ldots, n-1 \\ \\ y_n + \psi(|y'|), & j = n \end{cases} \tag{2.1}$$

とおく．このとき，

(a) $x = \Phi(y) := (\Phi_1(y), \ldots, \Phi_n(y))$ は閉球 $\overline{B_{3\kappa}}$ を含むある開集合 V から P_0 の近傍への微分同相であり，

(b) 超平面 $\{y_n = 0\} \cap V$ を $\partial\Omega$ にうつし，

(c) その微分写像 $D\Phi(y)$ は $\{y_n = 0\}$ の法線ベクトルを $x_n = \psi(|x'|)$ の法線ベクトルにうつす.

逆関数 $\Phi^{-1}(\cdot)$ を $\Psi(\cdot)$ とかく．$\epsilon \downarrow 0$ の中から部分列 $\{\epsilon_j\}$ をとって $Q_j := \Psi(P_{\epsilon_j}) \in B_\kappa^+$ であるとする．そこで，$v_j(y) := u_{\epsilon_j}(\Phi(y))$ $(y \in \overline{B_{2\kappa}})$ とおき，

折り返しにより $\overline{B_{2\kappa}}$ 上に定義域を拡張する．すなわち，

$$\tilde{v}_j(y) := \begin{cases} v_j(y), & y \in \overline{B_{2\kappa}^+} \\ v_j(y', -y_n), & y \in \overline{B_{2\kappa}^-} \end{cases}$$

と定める．ここに，$y' = (y_1, \ldots, y_{n-1})$．さらに，

$$w_j(z) = \tilde{v}_j(Q_j + \epsilon_j z) \quad z \in \overline{B_{\kappa/\epsilon_j}}$$

と定める．さらに，$Q_j = (q_j', \epsilon_j \alpha_j)$ ($q_j' \in \mathbf{R}^{n-1}$，$\alpha_j > 0$) とおく．すると w_j は

$$\sum_{k,\ell=1}^{n} a_{k,\ell}^j(z) \frac{\partial^2 w_j}{\partial z_k \partial z_\ell} + \epsilon_j \sum_{k=1}^{n} b_k^j(z) \frac{\partial w_j}{\partial z_k} - w_j + w_j^p = 0 \tag{2.2}$$

を $B_{\kappa/\epsilon_j} \setminus \{z_n = -\alpha_j\}$ で満たす． ここで，係数は

$$\begin{aligned} a_{k,\ell}(y) &:= \sum_{m=1}^{n} \frac{\partial \Psi_k}{\partial x_m}(\Phi(y)) \frac{\partial \Psi_\ell}{\partial x_m}(\Phi(y)) \\ b_k(y) &:= (\Delta \Psi_k)(\Phi(y)) \end{aligned}$$

とおくとき，

$$a_{k,\ell}^j(z) := \begin{cases} a_{k,\ell}(Q_j + \epsilon_j z), & z \geq -\alpha_j, \\ (-1)^{\delta_{k,n} + \delta_{\ell,n}} a_{k,\ell}(q_j' + \epsilon_j z', -\epsilon_j(\alpha_j + z_n)), & z < -\alpha_j, \end{cases}$$

$$b_k^j(z) := \begin{cases} b_k(Q_j + \epsilon_j z), & z_n \geq \alpha_j, \\ (-1)^{\delta_{k,n}} b_k(q_j' + \epsilon_j z', -\epsilon_j(\alpha_j + z_n)), & z_n < -\alpha_j, \end{cases}$$

で定まるものである．ここで $\delta_{i,j}$ は Kronecker の記号である．(2.2) に elliptic estimate を施すことにより，w_j は 局所一様に C^2 の位相で収束するような部分列がとれて（w_j のままで表す），さらに，極限 w は (1.4) の解であることがわかる．w は最大値を原点だけでとり，$r = |x|$ のみの関数であって，r について単調減少であることが知られている．

もし，元の問題の解の極大値をあたえる点が境界にないとすると，$\tilde{v}_j$ は折り返しで構成したので，境界の近くに値が等しい極大値を二つ持つ．従っ

て，w_j はその作り方から，$(0, \alpha_j)$ と $(0, -\alpha_j)$ の二点で極大値を持つことになる．しかし，w_j の極限関数は最大値が一つで r について単調減少かつ原点近傍では上に凸であることから，原点で微分が消える，w に局所的に C^2 の位相で近い関数は，原点以外では微分が消えないことが示され，二点で極大値を持つことは矛盾となる．従って，境界上に極大値（最大値でもある）をあたえる点が乗ることがわかる．

Step 3. 極大値をあたえる点はただ一つであることを示す．即ち，極大値をあたえる点が二つあったら矛盾することを言うのであるが，Step 1, 2 により，この２点の距離は，ϵ オーダーより大きくなければならない．ϵ オーダーより小さければ，今までの議論で極大値をあたえる点はただ一つしか存在し得ないからである．よって，u_j の極大値をあたえる点を P_j，P_j' とし，$|P_j - P_j'|/\epsilon \to \infty$ であるとする．さらに，P_j のまわりで Step 2 にあるような変数変換をして，c_ϵ の評価を行う．もう一方の極大値が「遠く」にあることに気をつけると

$$c_{\epsilon_j} \geq \epsilon_j^n \Big\{\frac{1}{2}I(w) + C_0 - C_1\epsilon_j\Big\}$$

C_0，$C_1 > 0$ を得る．一方，

$$c_{\epsilon_j} < \frac{1}{2}\epsilon_j^n I(w)$$

を示すことができて矛盾をうる．よって極大値は高々一つである．(i) が示された．

(iii) については，境界上の点を込めた Harnack の不等式を

$$\begin{cases} \epsilon^2 \Delta w + c(x) w = 0, \\ \dfrac{\partial w}{\partial n} = 0 \end{cases} \tag{2.3}$$

に対して示せばよい． 内部の点に関してはよく知られた Harnack の不等式で済む．境界上の点に関しては， (i) の証明の Step 2 にあるような変換をし

てやれば得ることができる．次に，線形方程式

$$\begin{cases} \epsilon^2\Delta w - (1 - \dfrac{1}{2^{(p-1)}})w = 0, \text{ in } B(x_0, r_0) \\ w = \dfrac{1}{2}, \text{ on } \partial B(x_0, r_0) \end{cases} \tag{2.4}$$

と比較することができて $u_\epsilon \le w$ in $B(x_0, r_0)$ がわかる．w は変形 Bessel 関数でかけるので，その表示式から「最大点の近傍をのぞけば一様に小さい」ことがわかる．

(iv) は Theorem 1.2 からわかる． □

Theorem 1.2 の証明 c_ϵ を上から評価するのは比較的容易である．exact な評価は，元の方程式の線形化方程式の精密な解析が必要となるのでここでは述べない．exact な評価については Ni and Takagi [10] を参照のこと．

上からの評価は，まず $\rho > 0$ に対して

$$\zeta_\rho(t) = \begin{cases} 1 & 0 \le t \le \rho, \\ 2 - \rho^{-1}t & \rho < t \le 2\rho, \\ 0 & t > 2\rho \end{cases} \tag{2.5}$$

なる cutt-off 関数を定め，$w = w(z)$ を (1.4) の一意的な解であるとする．$\kappa > 0$ に対して，

$$w_*(z) := \zeta_{\kappa/\epsilon}(|z|)w(z) \tag{2.6}$$

とおき，

$$\varphi_\epsilon(x) := \begin{cases} w_*(\Psi(x)/\epsilon) & x \in D, \\ 0 & \text{else} \end{cases} \tag{2.7}$$

とおく．ここに，Ψ は Theorem 1.1 の証明中に出てきた diffeomorphism Φ の逆写像であり，$D := \Phi(B^+_{2\kappa})$ である．この φ_ϵ で c_ϵ を上から評価する．計算はやや複雑であるが，φ_ϵ が全空間の ground state solution から作られていることを考えれば， 全空間の "energy" がでてくるのは理解できるであろ

う．平均曲率は，φ_ϵ 中にある $\Psi(x)$ の微分の出てくる項の積分をするときに，現れるものである．詳しい計算は Ni and Takagi [9] を参照されたい． □

Theorem 1.3 の証明 イメージ的には分岐枝の存在範囲を考えれば，$\epsilon > 0$ が十分大なら定数解しかないのが分かりそうであるが，明確に証明するには次のようにする．非定数解 u があったとして，それを $u = u_0 + \phi$,

$$u_0 = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u\,dx, \quad \int_\Omega \phi\,dx = 0$$

と分ける．すると

$$\epsilon^2\Delta\phi - \phi + \Big(p\int_0^1 (u_0 + t\phi)^{p-1}\,dx\Big)\phi = u_0 - u_0^p$$

となり，これに ϕ をかけて部分積分すると

$$\epsilon^2\int_\Omega |\nabla\phi|^2\,dx + \int_\Omega \phi^2\,dx = p\int_\Omega \phi^2\Big(\int_0^1 (u_0 + t\phi)^{p-1}\,dx\Big)\,dx$$

を得る．また，解の a priori 評価から $u_0 + t\phi$ は一様に有界であることがわかる．さらに，積分平均 0 の関数に対しては Poincaré の不等式

$$\int_\Omega |\nabla\phi|^2\,dx \geq \lambda_1\int_\Omega \phi^2\,dx$$

が成り立つので，結局，

$$(1 + \epsilon^2\lambda_1)\int_\Omega \phi^2\,dx \leq C\int_\Omega \phi^2\,dx$$

を得る．$\epsilon > 0$ が十分大きければ，$\phi \equiv 0$ となり，定数解しかないことがわかる． □

3 関連した話題

解の対称性という観点では，Gidas, Ni and Nirenberg [3] で，領域が球なら球対称であることがわかるが，一般の領域の Dirichlet 問題なら，最大値はどこでとるであろうか？それに答えるのが次の Ni and Wei [12] である．

Theorem 3.1 (Ni and Wei [12]) u_ϵ を 最小エネルギー解とする *(Neumann 問題と同様に定義できる)*. $\epsilon > 0$ が十分小さければ, $\max_{\overline{\Omega}} u_\epsilon(x)$ はただ一点 Q_ϵ によって達成され, $Q_\epsilon \in \mathrm{Int}\,\Omega$ であって,

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} d(Q_\epsilon, \partial\Omega) = \max_{P \in \Omega} d(P, \partial\Omega).$$

即ち, 内部で「境界からもっとも遠い点」に最大値を与える点が近付く.

Neumann 問題に戻り, 軸対称な領域の場合のさらなる解析は, Ni and Takagi [11], 複数個の極大値を持つ解は Gui [2] によって示された. 即ち,「平均曲率の狭義極大点の近傍で極大値を達成する解」の存在を示した.

以上の Neumann 問題の考察はすべて境界上に極大値をもつ結果であるが, 最近, Wei [14] が「内部に極大点を持つ解」の存在を示した. Wei はかなり精力的に研究しており, さらに新しい結果を続々と出している.

最後に $p = (n+2)/(n-2)$ (critical case) の場合は, Palais-Smale 条件が崩れるが, 最小エネルギー解の存在と maxmum point が境界上にあることは証明できる. $1 < p < (n+2)/(n-2)$ (subcritical case) と最も違う点は $\max_\Omega u_\epsilon \to \infty$ $(\epsilon \downarrow 0)$ となることである (Ni, Pan and Takagi [8] を見よ).

今後の課題としては,

(i) 分岐理論の立場から, 非定数解の大域構造を解明すること. 特に, 球の場合の各固有値からの大域分岐構造 (解の peak の数による特徴付け) を解明すること.

(ii) 領域を球にして, $x \cdot \nabla u \leq 0$ という条件をさらに付ければ, 正値解は 球対称になるか? という問いに答えること

などが挙げられる.

References

[1] C.-C. Chen and C.-S. Lin, Uniqueness of the ground state solutions of $\Delta u + f(u) = 0$ in $\mathbf{R}^n$, $n \geq 3$, Comm. Partial Differential Equations **16** (1991), 1549–1572.

[2] Gui, Multipeak solutions for a semilinear Neumann problem, Duke Math. J. **84** (1996), 739–769.

[3] B. Gidas, W.-M. Ni and L. Nirenberg, Symmetry and related topics via the maximum principle, Comm. Math. Phys. **68** (1979), 209–243.

[4] B. Gidas, W.-M. Ni and L. Nirenberg, Symmetry of positive solutions of nonlinear elliptic equations in $\mathbf{R}^n$, Adv. Math. Suppl. Stud. **7A** (1981), 369–402.

[5] A. Gierer and H. Meinhardt, A theory of biological pattern formation, Kybernetik **12** (1972), 30–39.

[6] M.-K. Kwong, Uniqueness of positive solutions of $\Delta u - u + u^p = 0$ in $\mathbf{R}^n$, Arch. Rational Mech. Anal. **105** (1991), 243–266.

[7] C.-S. Lin, W.-M. Ni and I. Takagi, Large amplitude stationary solutions to a chemotaxis system, J. Differential Equations **72** (1988), 1–27.

[8] W.-M. Ni, X.-B. Pan and I. Takagi, Singular behavior of least-energy solutions of a semilinear Neumann problem involving critical Sobolev exponents, Duke Math. J., **67** (1992), 1–20.

[9] W.-M. Ni and I. Takagi, On the shape of least-energy solutions to a semilinear Neumann problem, Comm. Pure Appl. Math. **44** (1991), 819–

[10] W.-M. Ni and I. Takagi, Locating the peaks of least-energy solutions to semilinear Neumann problem, Duke Math. J. **70** (1993), 243–281.

[11] W.-M. Ni and I. Takagi, Point condensation geenerated by a reaction-diffusion system in axially symmetric domains, Japan J. Appl. Math. **12** (1995), 327–365.

[12] W.-M. Ni and Wei, On the location and profile of spike-layer solutions to singularly perturbed semilinear Dirichlet problems, Comm Pure Appl. Math. **48** (1995), 731–768.

[13] W.A. Strauss, Existence of solitary waves in higher dimensions, Comm. Math. Phys. **55** (1977), 149–162.

[14] J. Wei, On the interior spike layer solutions to a singularly perturbed Neumann problem, Tohoku Math. J. **50** (1998), 159–178.