数理解析研究所講究録 1204 巻 2001 年 21-33

半線形楕円型方程式の定数解からの分岐
(Bifurcation from Constant Solutions to an Elliptic Equation)

宮崎大学・工　仙葉 隆 (Takasi Senba)

abstract: In this paper, I will consider solutions to an elliptic equation. In particular, by using the local bifurcation theory, I describe the existence of non-constant solutions. Moreover, when the domain is a bounded disk in two dimensional space, we describe bifurcation points and the profile of some solutions.

1 序

本稿では以下の半線形楕円形方程式の定数解からの局所的な分岐について述べる.

$$\begin{cases} -d\triangle u + u = |u|^{p-1}u & \text{in } \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

ここで $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ $(N \geqq 2)$ は滑らかな境界 $\partial\Omega$ を持つ有界領域、$p > 1$ は定数、そして d は正のパラメーターとする.

任意の $d > 0$ に対して $u \equiv 1$ は (1) の解である. $(d, 1)$ を自明解と呼ぶ. 本稿では解の集合 $\{(d, u)\} \subset \mathbf{R}_+ \times H^1(\Omega)$ を考える. 特に、自明解 $\{(d, 1)\}$ から分岐する解について考える.

2 自明解からの局所的分岐

この節では [3] に従い自明解からの局所的分岐について述べる.

$$\mathcal{A} = -\triangle + 1 \qquad \mathcal{D}(\mathcal{A}) = \{u \in H^2(\Omega) |\ \partial u/\partial\nu = 0 \text{ on } \Omega\}$$

は $L^2(\Omega)$ 上の自己共役作用素であり $\mathcal{A}^{-1}$ は $L^2(\Omega)$ の対称有界作用素である. ここで、

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} = \|(-\triangle + 1)u\|_{L^2(\Omega)}, \quad \|u\|^2_{H^1(\Omega)} = \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u\|^2_{L^2(\Omega)}$$

とする. $v = \mathcal{A}^{-1}u$ に対して

$$\|v\|_{H^2(\Omega)}^2 = \int_\Omega |(-\triangle+1)v|^2\,dx = \int_\Omega u^2 dx$$

より

$$\|v\|_{H^1(\Omega)} \leqq \|v\|_{H^2(\Omega)} \leqq \|u\|_{L^2(\Omega)} \leqq \|u\|_{H^1(\Omega)}.$$

このことと $H^2(\Omega) \subset H^1(\Omega)$ (コンパクト) より $\mathcal{A}^{-1}$ が $H^1(\Omega)$ 上の対称なコンパクト作用素で、$\|\mathcal{A}^{-1}\|_{\mathcal{L}(H^1(\Omega),H^1(\Omega))} \leqq 1$ であることが分かる. 従って $\mathcal{A}$ のスペクトルはすべて固有値であり、各固有値に関する固有空間の次元は有限である. このことを踏まえて、斉次ノイマン境界条件の下での $-\triangle$ の固有値を $0 = \mu_0 < \mu_1 < \mu_2 < \cdots$ とする. この固有値 $\{\mu_j\}$ に対して $d_j = (p-1)/\mu_j$ $(j = 1,2,3,\cdots)$ とおく.

また、$(d_*, 1)$ が分岐点とは、任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\mathcal{U} = \{w \in H^1(\Omega) |\ \|w-1\|_{H^1(\Omega)} + |d_* - d| < \varepsilon\}$ に (d,w) $(w \not\equiv 1)$ なる解があることを言う.

定理 1 各 $j = 1,2,3,\cdots$ に対して $(d_j, 1) \in \mathbf{R}_+ \times H^1(\Omega)$ は *(1)* の分岐点であり、十分小さな $r_0 > 0$ があって、少なくとも2組の解 の1パラメータファミリー $\{(d(r), u(r))\}_{0<r<r_0}$ が存在し以下の事を満たす.

(i) $d(r) \to d_j, \quad \|u(r)-1\|_{H^1(\Omega)} = r \to 0 \quad as\ r \to 0.$

(ii) $C(\overline{\Omega})$ の位相で $r \to 0$ のとき $-d_j\triangle + (p-1)$ の固有関数に収束する $\{(u(r)-1)/r\}_{0<r<r_0}$ の部分列が存在する.

定理 1 は次の定理から導かれる.

定理 2 $\mathcal{E}$ をヒルベルト空間、そして各 $d > 0$ に対して $\Phi = \Phi(d,\cdot) \in C^2(\mathcal{E}, \mathbf{R})$ は以下のことを満たすとする.

$$D\Phi'(u) = D\Phi_u(d,u) = (a+d)Lu + H(u).$$

ここで $a > 0$ は定数、D は $\mathcal{E}$ から $\mathcal{E}^*$ への双対写像とする. つまり $(u,v)_{\mathcal{E}^*\times\mathcal{E}} = (Dv,u)_{\mathcal{E}\times\mathcal{E}}$. $L \in \mathcal{L}(\mathcal{E},\mathcal{E})$ は非負対称作用素であり、$\|L\|_{\mathcal{L}(\mathcal{E},\mathcal{E})} \leqq 1$ を満たすものとする. そして H は $\mathcal{E}$ 上の作用素であり

$$\|H(u)\| = o(\|u\|), \qquad \|H'(u)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{E},\mathcal{E})} = o(1) \quad as\ u \to 0$$

を満たすものとする．このとき、 $\lambda_* < 1$ が L の孤立固有値でその固有空間の次元が有限であるとするとし、$\lambda_* = d_*/(a + d_*)$ とすると $(d_*, 0)$ は以下の方程式の解の分岐点である．

$$\mathcal{F} = D\Phi'(u) - du = (a + d)Lu + H(u) - du \quad in\ \mathcal{E}. \tag{2}$$

さらに $r_0 > 0$ と $\mathcal{F} = 0$ の解の族 $\{(d_i(r), u_i(r))\}_{0<r<r_0}$ $(i = 1, 2)$ が存在して以下を満たす．

(i) 任意の $r \in (0, r_0)$ に対して $\|u_i(r)\| = r$ を満たし

$$(d_i(r), u_i(r)) \to (d_*, 0) \quad as\ r \to 0 \quad in\ \mathbf{R}_+ \times H^1(\Omega)$$

となる．

(ii) P を λ_* に関する L の固有空間への射影作用素とするとき

$$\|u_i(r) - Pu_i(r)\| = o(r) \quad as\ r \to 0$$

が成り立つ．

定理 2 の証明: λ_* に関する L の固有空間を $\mathcal{N}$ とし、$P = \mathrm{Proj}_{\mathcal{N}}$, $P^\perp = \mathrm{Proj}_{\mathcal{N}^\perp}$ とおくとき L の対称性より

$$PL = LP, \qquad P^\perp L = LP^\perp \tag{3}$$

が成り立つ．任意の $u \in \mathcal{E}$ に対して $u = v + w \in \mathcal{N} \oplus \mathcal{N}^\perp$ とおくとき (3) より (2) 式は以下の２式と同等であることがわかる．

$$(a + d)Lv + PH(v + w) = dv, \tag{4}$$
$$(a + d)Lw + P^\perp H(v + w) = dw. \tag{5}$$

$F(d, v, w) = (a + d)Lw + P^\perp H(v + w) - dw$ とおくと

$$F_w(d, v, w) = (a + d)L - d\mathrm{id} + P^\perp H'(v + w)$$

となるから d_* が孤立固有値であることと $H'(0) = 0$ より $F_w(d, 0, 0) = (a + d)L - d\mathrm{id}$ は $|d_* - d| \ll 1$ を満たす d に関して $\mathcal{N}^\perp$ 上の一対一写像となる。従って、 $\mathbf{R}_+$ における d_* の近傍 $\mathcal{U}(d_*)$, $\mathcal{N}$ における 0 の近傍

$\mathcal{O}$, そして $\mathcal{U}(d_*) \times \mathcal{O}$ から $\mathcal{N}^\perp$ への C^1 関数 $\phi(d,v)$ が存在して以下を満たす.

$$F(d,v,\phi(d,v)) = 0, \quad \phi(d,0) = 0. \tag{6}$$

つまり、$\phi(d,\cdot) = -\{(a+d)L - d\mathrm{id}\}^{-1}P^\perp H(\cdot + \phi(d,\cdot))$ が成り立つ. このことと $H(u) = o(\|u\|)$ より

$$\|\phi(d,v)\| = o\left(\|v + \phi(d,v)\|\right). \tag{7}$$

従って、$\|\phi(d,v)\| = o(\|v\|)$ となる。また、

$$F_d = \{(a+d)L - d\mathrm{id}\}\phi_d + (L - \mathrm{id})\phi + P^\perp H'\phi_d = 0$$
$$\|H'(u)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{E},\mathcal{E})} = o(1), \quad \|\phi(d,v)\| = o(\|v\|)$$

より $\|\phi_d(d,v)\| = o(1)$. 一方、$v \in \mathcal{N}$ に対して

$$(a+d)\,\lambda_* v + PH(v+\phi) - dv \in \mathcal{N}.$$

ここで、

$$G(d,v) = (a+d)\lambda_* + (H(v+\phi),v)\|v\|^{-2} - d$$

とおくと

$$G(d,0) = (a+d)\lambda_* - d = \frac{a}{a+d_*}(d_* - d)$$
$$G_d = \frac{-a}{a+d_*} \neq 0.$$

従って、陰関数定理より $v=0$ の近傍で定義され、連続的微分可能な関数 ψ で以下を満たすものが存在する.

$$G(\psi(v),v) = 0, \quad \psi(0) = d_*. \tag{8}$$

今、$\chi(v) = \phi(\psi(v),v)$ とおくとき χ は $\mathcal{N}$ から $\mathcal{N}^\perp$ への連続的微分可能な関数となる. さらに (7) より

$$\|\chi(v)\| = o(\|v\|) \quad \text{as } v \to 0 \tag{9}$$

(6) より任意の $z \in \mathcal{N}$、十分小さな v そして十分小さな $t \in \mathbf{R}$ に対して

$$\{[a+\psi(v+tz)]L-\psi(v+tz)\mathrm{id}\}\,\chi(v+tz) \\ +P^{\perp}H(v+tz+\chi(v+tz))=0 \qquad (10)$$

(10) を $t=0$ において微分すると

$$[(a+\psi(v))L-\psi(v)\mathrm{id}]\chi'(v)z+P^{\perp}H'(v+\chi(v))(z+\chi'(v)z) \\ +(\psi'(v),z)(L-\mathrm{id})\chi(v)=0 \qquad (11)$$

が成り立つ. 同様に (8) より

$$(\lambda_*-1)\,(\psi'(v),z)+(H'(v+\chi(v))(z+\chi'(v)z),v)\|v\|^{-2} \\ +(H(v+\chi(v)),z)\|v\|^{-2}-(H(v+\chi(v)),v)(v,z)\|v\|^{-4}=0. \qquad (12)$$

$\|v\| \ll 1$ のとき $(a+\psi(v))L-\psi(v)\mathrm{id}$ が有界な逆作用素を持つことと $H'(0)=0$ に注意すると、(9)、(11) そして (12) より $v \to 0$ $(v \neq 0)$ のとき

$$\begin{aligned}\|\chi'(v)z\| &\leqq C\left[|(\psi'(v),z)|\|\chi(v)\|+\|P^{\perp}H'(v+\chi(v))\|(\|z\|+\|\chi'(v)z\|)\right] \\ &\leqq C\left(\frac{\|H'(v+\chi(v))\|}{\|v\|}+\frac{\|H(v+\chi(v))\|}{\|v\|^2}\right)\|z\|\|\chi(v)\| \\ &\qquad +C\|P^{\perp}H'(v+\chi(v))\|\|z\| \\ &= o(1)\|z\|. \end{aligned} \qquad (13)$$

(13) より $\chi'(v)$ を $v=0$ に連続的に拡張すると $\chi'(0)=0$ を得る.

$\mathcal{V}$ を $\mathcal{N}$ における 0 の近傍で ψ と χ が $\mathcal{V}$ 上で C^1 関数として定義されているものとする. $\mathcal{M}=\{v+\chi(v)|\ v \in \mathcal{V}\}$ とおく. そのとき $\mathcal{M}$ は次元 $n \equiv \dim \mathcal{N}$ の C^1 多様体になる.

$B(r) \equiv \{x \in \mathcal{E}|\ \|x\|<r\}$ とおく. いま、$r>0$ を $\mathcal{D}(r) \equiv \mathcal{M} \bigcap \partial B(r)$ が次元 $n-1$ のコンパクト C^1 多様体となるように十分小さくとる. ここで $\Phi|_{\mathcal{D}(r)}$ を考えるとき、少なくとも最大値と最小値をとる二つの極値を持つ.

以下で、$\Phi|_{\mathcal{D}(r)}$ のすべての極値 v が $D\Phi'(u)=du$ を満たすことをいう. ただし、$u=v+\chi(v)$, $d=\psi(v)$ である. このことを仮定すると任意の $v_r \in \mathcal{D}(r)$ は $r \to 0$ のとき $v_r \to 0$ となるから $v_r+\chi(v_r) \to 0$ そして $\psi(v_r) \to d_*$ が成り立つ. したがって、定理を得る.

u を $\Phi|_{\mathcal{D}(r)}$ の極値とすると任意の $\phi \in T\mathcal{D}(r)_u$ に対して

$$(D\Phi'(u), \varphi) = 0 \tag{14}$$

が成り立つ. ただし、TM_x は多様体 M の x における接ベクトル空間を表す. ここで

$$T\mathcal{D}(r)_x = T\mathcal{M}_x \bigcap T(\partial B(r))_x$$

そして

$$T(\partial B(r))_x = \{\varphi \in \mathcal{E} |\ (\varphi, x) = 0\}.$$

従って、

$$T\mathcal{D}(r)_x = \{\varphi \in T\mathcal{M}_x |\ (\varphi, x) = 0\}.$$

このことと (14) より任意の $\varphi \in \mathrm{span}\{u, T\mathcal{D}(r)_u\}$ に対して

$$(D\Phi'(u) - r^{-2}(D\Phi'(u), u)u, \varphi) = 0 \tag{15}$$

が成り立つ. 以下で (15) を用いて $\Phi'(u) = du$ を導く. ただし、$u = v + \chi(v)$, $d = \psi(v)$ とする. $u \in \mathcal{M}$ であれば、ある $v \in \mathcal{V}$ に対して $u = v + \chi(v)$ が成り立つから χ の作り方より

$$P^{\perp} D\Phi'(u) = \psi(v)\chi(v) \tag{16}$$

が成り立つ. 従って、

$$(D\Phi'(u), \chi(v)) = \psi(v)\|\chi(v)\|^2 \tag{17}$$

が成り立つ. また、ψ の作り方と $\lambda_* \|v\|^2 = (Lv, v)$ より

$$(D\Phi'(u), v) = \psi(v)\|v\|^2 \tag{18}$$

が成り立つ. (17)-(18) より任意の $v \in \mathcal{D}(r)$ に対して

$$(D\Phi'(u), u) = \psi(v)\|u\|^2 = \psi(v)r^2. \tag{19}$$

従って、

$$\psi(v) = r^{-2}(D\Phi'(u), u).$$

このことと (15) より任意の $\varphi \in \mathrm{span}\{u, TD(r)_u\}$ に対して

$$(D\Phi'(u) - \psi(v)u, \varphi) = 0. \tag{20}$$

(6)、つまり $P^\perp(D\Phi'(u) - \psi u) = 0$ より任意の $\varphi \in \mathrm{span}\{u, T\mathcal{D}(r)_u, \mathcal{N}^\perp\} \equiv W$ に対して

$$(D\Phi'(u) - \psi(v)u, \varphi) = 0 \tag{21}$$

が成り立つ.

$W = \mathcal{E}$ を示せば $D\Phi'(u) = du$ がわかる. $u = v + \chi(v)$、$\chi(u) \in \mathcal{N}^\perp$ を満たす $v \in \mathcal{V}$ が存在することに注意する. 従って $W = \mathrm{span}\{v, T\mathcal{D}(r)_u, \mathcal{N}^\perp\}$ が成立する. $v_1, v_2, v_3, \cdots, v_{n-1}$ を $T\mathcal{D}(r)_u$ の基底とする. さらに v_n を $v_1, v_2, v_3, \cdots, v_n$ が $T\mathcal{M}_u$ の基底となるように定める. $T\mathcal{M}_u = \{x + \chi'(v)x \mid x \in \mathcal{N}\}$ だから

$$v + \chi'(v)v = \Sigma_{i=1}^n \beta_i v_i. \tag{22}$$

(22) において $\beta_n \neq 0$ である. もしそうでないなら $v + \chi'(v)v \in T\mathcal{D}(\varepsilon)_u$ となり十分小さな v に対して

$$(v + \chi'(v)v, u) = 0 = \|v\|^2 + (\chi'(v)v, \chi(v)) = \|v\|^2 + o(\|v\|^2). \tag{23}$$

従って、もし $\|v\|$ が十分小さければ $v = 0$ が成り立つ. このことは $\|u\| = \|v + \chi(v)\| = r$ に矛盾する. 従って、$\beta_n \neq 0$ が成立する. さらに (22) より $v_n \in \mathrm{span}\{v, T\mathcal{D}(r)_u, \mathcal{N}^\perp\} = W$ が成立するから

$$\mathrm{span}\{T\mathcal{M}_u, \mathcal{N}^\perp\} \subset W \tag{24}$$

が成立する. (24) と $\chi'(v) \in \mathcal{L}(\mathcal{N}, \mathcal{N}^\perp)$ より、任意の $y \in \mathcal{E}$ に対して

$$\begin{aligned} y &= (P + \chi'(v)P)y + (P^\perp - \chi'(v)P)y \\ &\quad \in \mathrm{span}\{T\mathcal{M}_u, \mathcal{N}^\perp\} \subset W \end{aligned}$$

が成立する. 従って、$W = \mathcal{E}$ を得る. このことより、定理 2 が示された. □

定理 2 を用いて定理 1 を示す.

定理 1 の証明: $d = d_j$ $(j = 1, 2, 3, \cdots)$ を固定する. また $H^1(\Omega)$ の内積とノルムを

$$(u, v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_\Omega uv dx, \qquad \|u\| = \sqrt{(u, u)}$$

とおく. $w = u - 1$ とおくとき

$$\begin{aligned} -u + |u|^{p-1}u &= (w+1) + |w+1|^{p-1}(w+1) \\ &= (p-1)w + |w+1|^{p-1}(w+1) - 1 - pw \\ &= (p-1)w + O(w^2) \quad \text{as } w \to 0 \end{aligned}$$

に注意し $p_0(\xi) = |\xi + 1|^{p-1}(\xi + 1) - 1 - p\xi$,

$$p(\xi) = \begin{cases} \chi(\xi)p_0(\xi) + (1 - \chi(\xi))p_0(1/2) & \text{if } \xi \geqq 0 \\ \chi(\xi)p_0(\xi) + (1 - \chi(\xi))p_0(-1/2) & \text{if } \xi \leqq 0 \end{cases}$$

とおく. ただし、$\chi \in C_0^\infty(\mathbf{R})$, $0 \leqq \chi \leqq 1$, $\chi(\xi) = \chi(-\xi)$、

$$\chi(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{if } \xi \in [0, 1/4] \\ 0 & \text{if } \xi \in [1/2, \infty) \end{cases}$$

とする. さらに $P(\xi) = \int_0^\xi p(s)ds$, $\Phi(w) = \int_\Omega \left\{(p-1+d)w^2/2 + P(w)\right\} dx$ とおくと $\Phi \in C^2(H^1(\Omega), \mathbf{R})$. 実際、$p$ は C^1 関数であり

$$|p(\xi)| \leqq \min\left(C, C|\xi|^2\right), \qquad |p_\xi(\xi)| \leqq \min\left(C, C|\xi|\right) \tag{25}$$

$$\begin{aligned} \left|\int_\Omega p(w)\varphi dx\right| &\leqq C \int_\Omega |w||\varphi| dx \\ &\leqq C\|w\|_{L^2(\Omega)}\|\varphi\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leqq C\|w\|_{H^1(\Omega)}\|\varphi\|_{H^1(\Omega)} \end{aligned} \tag{26}$$

より $\Phi'(\cdot) \in C(H^1(\Omega), \mathcal{L}(H^1(\Omega), \mathbf{R})) = C(H^1(\Omega), H^{-1}(\Omega))$ となる. ただし、

$$\Phi'(w)\varphi = \int_\Omega \left\{(p-1+d)w - p(w)\right\} \varphi dx.$$

同様にして

$$\Phi''(w)(\eta, \varphi) = \int_\Omega \left\{(p-1+d)\eta\varphi + p_\xi(w)\eta\varphi\right\} dx,$$

より $\Phi''(w) \in \mathcal{L}(H^1(\Omega) \times H^1(\Omega), \mathbf{R})$. 従って $\Phi'' \in C(H^1(\Omega), \mathcal{L}(H^1(\Omega) \times H^1(\Omega), \mathbf{R}))$ となる.

ここで $\mathcal{E} = H^1(\Omega)$, $\mathcal{A} = -\triangle + 1$ in Ω with $\partial/\partial\nu = 0$ on $\partial\Omega$ とすると

$$D\Phi'(w) = \mathcal{A}^{-1}\left((p-1+d)\mathrm{id} + p(w)\right).$$

さらに $a = p-1$, $Lw = \mathcal{A}^{-1}w$, $H(w) = \mathcal{A}^{-1}p(w)$ とおくと $L \in \mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{E})$ は対称作用素であり,

$$\|H(w)\|^2_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega p(w)\mathcal{A}^{-1}p(w)dx \leqq \|p(w)\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

ここで

$$|p(w)|^2 \leqq \min\left(C, C|w|^4\right) \leqq C|w|^q$$

ただし $2 < q < \min(4, 2N/(N-2))$. 従って

$$\|H(w)\|_{H^1(\Omega)} \leqq C\|w\|^{q/2}_{L^q(\Omega)} = o(\|w\|_{H^1(\Omega)}).$$

また (25) より $|p_\xi(w)| \leqq C|w|^{q/(q-2)}$ となるから

$$\begin{aligned} \|H'(w)\varphi\|_{H^1(\Omega)} &\leqq C\|p_\xi(w)\varphi\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leqq C\|w\|_{L^q(\Omega)}\|\varphi\|_{L^q(\Omega)} \leqq \|w\|_{H^1(\Omega)}\|\varphi\|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

従って

$$\|H'(w)\|_{\mathcal{L}(H^1(\Omega), H^1(\Omega))} \leqq C\|w\|_{H^1(\Omega)}.$$

そして $\sigma(L) = \{d_j\}_{j=1,2,3,\ldots}$ は重複度有限の固有値である. 定理 2 より $d = d_j$ に対して $(d, 0)$ は $D\Phi'(u) = du$ in $H^1(\Omega)$ の分岐点である. つまり、任意の $\varphi \in H^1(\Omega)$ に対して

$$\int_\Omega \{(p-1+d)w + p(w)\}\varphi dx = d\int_\Omega \nabla w \cdot \nabla\varphi dx + d\int_\Omega w\varphi dx.$$

従って w は

$$\begin{cases} -d\triangle w + dw = (p-1+d)w + p(w) & \text{in } \Omega \\ \dfrac{\partial w}{\partial \nu} = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

の解であり $|p(w)| \leqq C|w|$ であることと elliptic regularity より、$\|w\|_{H^1(\Omega)} \ll 1$ ならば $\|w\|_{L^\infty(\Omega)} < 1/4$ が成り立つ. このことより定理 2 の中の r_0 と任意の $r \in (0, r_0)$ に対して以下を満たす $(d_i(r), w_i(r))$ $(d = 1, 2)$ が存在する.

$$\begin{cases} -d\triangle w_i + dw_i = (p-1+d)w_i + p_0(w_i) & \text{in } \Omega \\ \dfrac{\partial w_i}{\partial \nu} = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

$$\|w_i(r)\|_{H^1(\Omega)} = r.$$

また 定理 2 の (iii) より $\{w_i(r)/r\}$ は部分列をとると $-d(0)\triangle + (p-1)$ in Ω with $\partial/\partial\nu = 0$ on $\partial\Omega$ の固有関数に $H^1(\Omega)$ の位相で収束する.

このことと $\|w\|_{L^\infty(\Omega)} < 1/4$、$\|w_i(r)\|_{H^1(\Omega)} = r$ そして elliptic regularity より $\{w(r)/r\} = \{(u(r)-1)/r\}$ が $C(\overline{\Omega})$ の位相で当該の固有値に収束することがわかる. □

3 $\Omega = \{x \in \mathrm{R}^2 |\ |x| < 1\}$ の時の分岐点について

定理 1 の (iii) より分岐点の近くでの $u(r)$ の形状は $-d_j\triangle + (p-1)$ in Ω with $\partial/\partial\nu = 0$ on $\partial\Omega$ の固有関数の形状に近い事がわかる. 従って、分岐点近くの解の形状を知るためには当該の固有関数の形状を調べればよい.

ここでは $N = 2$、$\Omega = D = \{x \in \mathbf{R}^2 |\ |x| < 1\}$ の場合の固有関数を調べる.

そのためには $-\triangle$ on D with $\partial/\partial\nu = 0$ on ∂D の固有関数を調べれば十分である. 以後前述の作用素を $-\triangle_N$ と書く.

$x = (x_1, x_2) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ と変換すると

$$\triangle u = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)u + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}u$$

となり、変数分離法 $u(x) = R(r)\Phi(\theta)$ を用いると

$$\begin{cases} R'' + \dfrac{1}{r}R' + \left(\mu - \dfrac{\kappa}{r^2}\right)R = 0, \quad R'(1) = 1, \\ \Phi'' + \kappa\Phi = 0, \end{cases}$$

ただし $\mu = \mu_i$ は $-\triangle_N$ の固有値であり、Φ は 2π 周期の周期関数でなければいけないから

$$\Phi(\theta) = C_1 \cos n\theta + C_2 \sin n\theta,$$

従って $\kappa = n^2$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$. 従って R は

$$R'' + \frac{1}{r}R' + \left(\mu - \frac{n^2}{r^2}\right) = 0, \quad R(0)' = R'(1) = 0,$$

$$\begin{aligned} R(0) \in (-\infty, \infty) \qquad & \text{if } n = 0, \\ R(0) = 0 \qquad & \text{if } n = 1, 2, 3, \cdots \end{aligned}$$

を満たさなければいけない. そのとき $R(r) = C_3 J_n(\mu r)$、そして $\mu > 0$ は $J_n'(\mu) = 0$ の根として定まる. ここで、J_n はベッセル関数である.

ベッセル関数 J_n は以下の基本的性質を満たす ([4] を見よ).

命題 1 $n = 0, 1, 2, \cdots$ とせよ. そのとき以下のことが成り立つ.

$$J_n(r) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi r}} \cos\left(r - \frac{2n+1}{4}\pi\right) \qquad as\ r \to \infty,$$

$$2\frac{d}{dr}J_n(r) = J_{n-1}(r) - J_{n+1}(r).$$

ただし $J_{-1} = J_1$ である.

命題 1 より

$$\begin{aligned} 2\frac{d}{dr}J(r) &\sim \sqrt{\frac{2}{\pi r}}\left\{\cos\left(r - \frac{2n+1}{4}\pi + \frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(r - \frac{2n+1}{4}\pi - \frac{\pi}{2}\right)\right\} \\ &= -2\sqrt{\frac{2}{\pi r}} \sin\left(r - \frac{2n+1}{4}\pi\right) \qquad \text{as } r \to \infty \end{aligned}$$

となり $J_n'(r) = 0$ が無限個の根を持つことがわかる. それらから 0 を除いたものを

$$0 < \nu_1^{(n)} < \nu_2^{(n)} < \nu_3^{(n)} < \cdots$$

と書くと $-\triangle_N$ の固有値と固有関数は

$$\begin{array}{llll} (\nu_j^{(0)})^2, & J_0(\nu_j^{(0)} r), & & (j = 1, 2, 3, \cdots) \\ (\nu_j^{(n)})^2, & J_0(\nu_j^{(n)} r)\cos n\theta, & J_0(\nu_j^{(n)} r)\sin n\theta, & (n, j = 1, 2, 3, \cdots) \end{array}$$

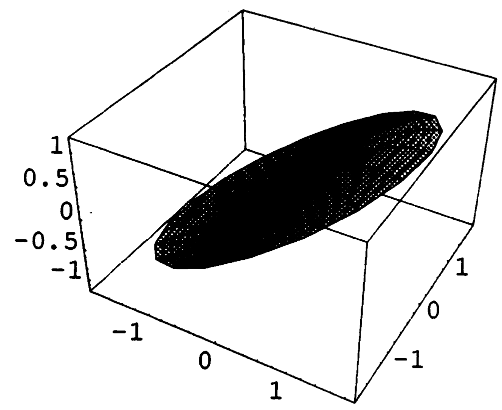
となる. また、それらの固有値に対応する分岐点は

$$(d,1) = ((p-1)(\nu_j^{(n)})^{-2}, 1)$$

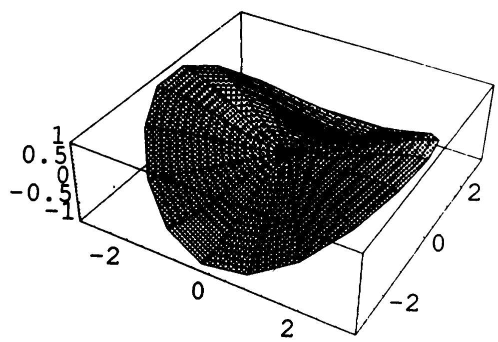
である. 数表等(たとえば、[1] の第3章参照)から $\nu_j^{(n)}$ の近似値を求め小さい順に数個並べると以下のようになる.

$$\begin{aligned} 0 &< \nu_1^{(1)} = 1.841\cdots \\ &< \nu_1^{(2)} = 3.3054\cdots \\ &< \nu_1^{(0)} = 3.832\cdots \\ &< \cdots . \end{aligned}$$

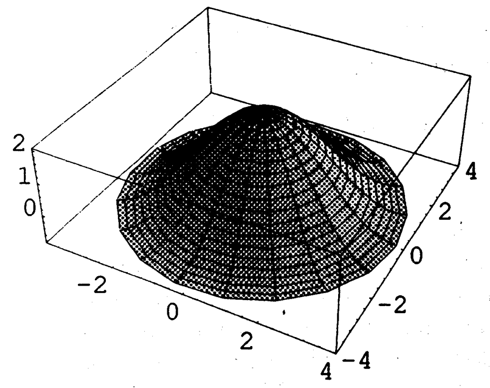
また、対応する分岐点と固有関数の概形は以下のようになる.



固有値 $(\nu_1^{(1)})^2$ の固有関数



固有値 $(\nu_1^{(2)})^2$ の固有関数



固有値 $(\nu_1^{(0)})^2$ の固有関数

参考文献

[1] C. Bandle, *Isoperimetric Inequalities and Applications*, Pitman, Boston 1980.

[2] W. N. Ni and I. Takagi, *On the existence and shape of solutions to a semilinear Neumann problem*, Nonlinear diffusion equations and their equilibrium states, 3 (Gregynog, 1989), 425–436, Progr. Nonlinear Differential Equations Appl., 7, Birkhauser Boston 1992.

[3] P. H. Rabinowitz, *Minimax Methods in Critical Point Theory with Applications to Differential Equation*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics **65**, Amer. Math. Soc. 1986.

[4] 金子 尚武 & 松本 道夫, 特殊関数, 現代数学レクチャーズ **C-3**, 培風館, 1984.