数理解析研究所講究録 1204 巻 2001 年 85-106

Regularity of Solutions to the Navier-Stokes Equations

Toshiaki Hishida (菱田 俊明)
Department of Applied Mathematics
Faculty of Engineering
Niigata University
Niigata 950–2181 Japan

Abstract

This article is concerned with regularity questions on the Navier-Stokes flows and is divided into two parts. In the first one a simple proof of the following result is given: a weak solution u to the nonstationary Navier-Stokes equation belonging to $L^\infty(0,T;L^n)$ is necessarily regular if the inferior limit of $\|u(t)-u(t_*)\|_{L^n}$ as $t\to t_*-0$ (from the left) is sufficiently small for every $t_*\in(0,T)$. This is a slight improvement of the regularity criterion due to Kozono and Sohr. In the second part the outline of "head pressure technique" for the proof of the following remarkable result due to Frehse and Ružička is given: there exists a regular solution, which is not necessarily small, to the stationary Navier-Stokes equation in five spatial dimensions. Stationary flows in such dimensions are of interest because they are related to nonstationary flows in three spatial dimensions by dimensional analysis.

Introduction

$\boldsymbol{R}^n$ を占める非圧縮性粘性流体の運動を記述する Navier-Stokes 方程式の初期値問題

$$(NS)\qquad \begin{cases} \partial_t u + u\cdot\nabla u = \Delta u - \nabla p & \text{in } \boldsymbol{R}^n\times(0,T),\\ \nabla\cdot u = 0 & \text{in } \boldsymbol{R}^n\times[0,T),\\ u(\cdot,0) = a & \text{in } \boldsymbol{R}^n, \end{cases}$$

を考える. 流体の速度ベクトル $u=u(x,t)=(u_1(x,t),\cdots,u_n(x,t))^T$ と圧力 $p=p(x,t)$ が未知であり, $a=a(x)=(a_1(x),\cdots,a_n(x))^T$ は与えられた初期関数である. 後で定常問題を考える際には, データとして方程式の右辺に外力関数 $f=f(x)=(f_1(x),\cdots,f_n(x))^T$ を与えるが, 非定常問題においては簡単のために, f はスカラーポテンシャルの勾配で表されていて, 見かけ上 ∇p に吸収されているとする. Leray [25][26] によって本格的な数学解析が開始されて以来 70 年近く経過したが, 物理的に重要な 3 次元の問題に対して, よく知られているように, 初期関数 a の大きさを制限することなしで滑らかな時間大域解の一意存在を証明することは, 今なお未解決問題である. たとえ初期関数 a を滑らかと

しても, (NS) の解がある時刻で滑らかさを失うのかどうか, 答えることができていない. 強解 (これは滑らかな解になる) の存在を直接見通しよく証明するのに最も有効な方法のひとつは, Fujita-Kato [13] によって導入された半群によるアプローチであり, 特に我が国のスクールによるその後の成果は目覚ましいが, この方法で 3 次元大域解を得るには, どうやっても初期関数 a の L^3-norm あるいはそれより少し弱い何らかの norm (ただしスケール変換 $\lambda a(\lambda x)$ に関して不変な norm) を小さく絞る必要がある (Kato [22]). 一方, 大きいスケールの大域解として, Leray-Hopf の弱解の存在が solenoidal な $a \in L^2$ に対して知られているが ([26][20]), 2 次元の場合を除いて, 構成された弱解の正則性および一意性は不明である. 弱解の正則性を研究する方向は, 大きく分けてふたつある. ひとつは弱解が滑らかとなるためのなるべく緩い criterion を見いだすことであり, いまひとつはなるべく良い部分正則性をもつ弱解を実際に構成することである. 後者の問題について, Leray [26] の意味の strong energy 不等式をみたす弱解 (turbulent solution) や, Scheffer [32]–[36] および Caffarelli-Kohn-Nirenberg [3] の意味の generalized energy 不等式をみたす弱解 (suitable weak solution) などが知られている (他に Miyakawa-Sohr [28], Struwe [39], Taniuchi [42] などを参照).

この論説の Part 1 では, 上記の前者の問題を扱う. Ohyama [30] と Serrin [37] は滑らかさを示しうる弱解のクラスとして時空 Lebesgue 空間 $L^r(0,T;L^q)$ を導入し, その後の Fabes-Jones-Riviere [5], Sohr [38], Giga [16], Struwe [39], Takahashi [41] などによる改良によって, 現在では次の criterion がわかっている: $n/q+2/r \le 1$ をみたす $n < q \le \infty$ と $2 \le r < \infty$ に対して, 弱解 u が $L^r(0,T;L^q)$ に属するならば, u は滑らか, すなわち $u \in C^\infty(\boldsymbol{R}^n \times (0,T))$ となる. とりわけ, $n/q+2/r=1$ をみたすクラスは次の意味においてスケール不変となり特に重要であることが, Giga [16] によって指摘されている: $\{u,p\}$ が方程式をみたすならば, そのスケール変換 $u_\lambda(x,t) = \lambda u(\lambda x, \lambda^2 t), p_\lambda(x,t) = \lambda^2 p(\lambda x, \lambda^2 t)$ で定められる $\{u_\lambda, p_\lambda\}$ も任意の $\lambda > 0$ に対して方程式をみたし, u_λ の $L^r(0,\infty;L^q)$-norm は $n/q+2/r=1$ であるとき $\lambda > 0$ に依らない. しかし, 上の criterion において, $\{q,r\} = \{n,\infty\}$ の場合が除外されている. このことに関連して, Leray [26] は後退自己相似解を用いて有限時間で爆発する弱解をつくることを提唱したが, その弱解は $L^\infty(0,T;L^n)$ に属している. しかし, Nečas-Ružička-Šverák [29] によってそのような弱解 (非自明解) の非存在が示されたので (Tsai [44] も参照), $L^\infty(0,T;L^n)$ に属する弱解の滑らかさを期待する向きもあるが, 現在までのところ未解決である.

Kozono-Sohr [24] は, その部分的解答として, $L^\infty(0,T;L^n)$ に属する弱解について各時刻における左からの L^n 値の跳びが小さければ, その解は滑らかとなることを証明した. 最近, 筆者は泉田健一 (新潟大学院生) との共同研究 [19] において, Kozono-Sohr の結果の易しい別証明を与えた (さらに結果自体も若干改良した) ので, その概要を Part 1 で述べる. 全空間上の初期値問題に対してだけ述べるが, 証明は Stokes 半群の L^q 理論にのみ依存しているので, Kozono-Sohr と同様に, 滑らかな境界をもつ有界領域・外部領域および半空間 (Iwashita [21], Ukai [45] を参照) における初期値境界値問題の弱解に対しても同じ証明を与えることができる.

次に Part 2 では, 空間 3 次元非定常流の問題を念頭においた Frehse-Ružička による注目すべき試みを紹介する. 上で述べたスケール変換に基づく次元解析によれば, $u_\lambda(x,t)$ の $L^5(\boldsymbol{R}^3 \times (0,\infty))$-norm は $\lambda > 0$ に依らず, 時空 1+3 次元問題 (非定常問題) は空間 5 次元問題 (定常問題) に対応していると見ることができる. 定常問題の弱解に対して, それが L^n に属するときの regularity が知られており (Sohr [38], von Wahl [46], Galdi [14]), 空間次元 $n \leq 4$ のときは $H^1 \subset L^n$ となるので, 滑らかな外力に対する弱解はすべて滑らかとなる (4 次元問題に対する Gerhardt [15] も参照). 従って, 非定常問題における $n = 2$ と $n = 3$ の間のギャップが, 定常問題では $n = 4$ と $n = 5$ の間にあると考えてよい. また, 3 次元非定常問題の弱解の存在は $L^\infty(0,T;L^2) \cap L^2(0,T;H^1) \subset L^{10/3}(0,T;L^{10/3})$ なるクラスで示されるが, 既に述べた Serrin 型の criterion によれば, $L^5(0,T;L^5)$ に属する弱解は滑らかとなる. 一方, 5 次元定常問題の弱解の存在は $H^1 \subset L^{10/3}$ の中で示されるが, もしそれが L^5 に属するときは滑らかとなるのだから, 3 次元非定常問題との similarity を見ることができよう. このような背景のもと, Frehse-Ružička は 5 次元定常問題の解の正則性を研究した (最初に 5 次元定常問題を研究したのは, Struwe [39] と思われる). ただし, 5 次元定常問題に対する結果が, 直ちに 3 次元非定常問題に対する知見を導く訳では決してない. しかし, 5 次元定常問題を詳しく調べることを通して, 3 次元非定常問題の解析方法についての手がかりをさぐろうという意図がある.

5 次元定常問題に対する結論として, 外力が滑らかであるとき, 滑らかな解の存在が, Frehse-Ružička と Struwe によって証明された. 有界領域の場合は, [6] と [8] の結果それぞれを組み合わせることで得られる ([11] において 6 次元有界領域の場合にも示されている). 全空間の場合は, Struwe [40] を参照. 周期境界条件の場合は, [7][9][10][40] によって, 空間次元が $5 \leq n \leq 15$ であるときに同様の結果が示されている. Part 2 では, 5 次元有界領域における定常問題を特に取り上げて, 1999 年 5 月 27 日の講演に沿って, Frehse-Ružička による head pressure $|u|^2/2 + p$ に着目したアイデア (head pressure technique) の概要を述べる. 形式的な議論・計算によって説明した部分が少なくないので, 完全な証明の詳細については, 上で引用した論文を見て頂きたい. また, Frehse-Ružička 自身によるサーベイ [12][31] もある.

1999 年 7 月, Ružička 氏が来日した際に, 彼らのアイデアを 3 次元非定常問題に応用できる可能性について議論する機会に恵まれたが, head pressure (あるいはそれと同じ役割を果たしうる量) の評価を導くステップ, すなわちこの論説の 2.2 節 (maximum property) に相当するステップにおいて本質的な困難があるようである.

Part 1 Nonstationary Problem: Regularity Criterion on Weak Solutions

1.1. Weak solutions in $L^\infty(0,T;L^n)$

簡単のため, ベクトル値関数の空間とスカラー値関数のそれを同じ記号であらわす. $\boldsymbol{R}^n$ 上で滑らか且つ solenoidal (すなわち発散がゼロ) であって compact な台をもつベクトル

値関数のクラスを $C_{0,\sigma}^{\infty}(\boldsymbol{R}^n)$ とする. $C_{0,\sigma}^{\infty}(\boldsymbol{R}^n)$ の $L^q(\boldsymbol{R}^n)$-norm $\|\cdot\|_q(1<q<\infty)$ に関する閉包を $L_\sigma^q(\boldsymbol{R}^n)$ であらわす. Part 1 を通して, 初期関数 $a \in L_\sigma^2(\boldsymbol{R}^n)$ とする. 以下しばしば, $L_\sigma^2 = L_\sigma^2(\boldsymbol{R}^n)$ などと略記する. まず, (NS) の弱解の定義を述べよう. $\boldsymbol{R}^n \times (0,T)$ 上の可測関数 u が (NS) の弱解であるとは, $u \in L^\infty(0,T;L_\sigma^2) \cap L^2(0,T;H^1)$ であって,

$$\int_0^T \{-(u,\partial_t\phi) + (\nabla u, \nabla\phi) + (u\cdot\nabla u, \phi)\}\,dt = (a, \phi(0))$$

を $\phi(T)=0$ なる任意の $\phi \in C^1([0,T];H^1 \cap L_\sigma^n)$ に対してみたすことである. ただし, $(\cdot,\cdot)$ は $\boldsymbol{R}^n$ における L^2-内積等の duality pairing をあらわす. すべての弱解 u は, 区間 $(0,T)$ のある零集合上での値 $u(t)$ を修正することによって, L_σ^2 値関数として $[0,T)$ 上弱連続となる.

$L^\infty(0,T;L^n)$ に属する弱解 u は, 次のような性質をもつ (Kozono-Sohr [23]): 任意の $t \in [0,T)$ に対して $u(t) \in L^n$ となり (従って必然的に $a \in L^n$), さらに L^n 値関数として $[0,T)$ 上で右連続である. この性質と Masuda [27] による弱解の一意性の criterion を組み合わせると, $L^\infty(0,T;L^n)$ に属する弱解の一意性が得られる (後の Proposition 1.4). それでは, どのような付加条件のもとで, 弱解 $u \in L^\infty(0,T;L^n)$ は滑らかとなるであろうか. $L^\infty(0,T;L^n)$-norm で小さいときの滑らかさが Struwe [39] によって示されたほか, 大きい解に対しては, L^n 値関数として連続ならば滑らかとなることが, von Wahl [46][47](ただし有界領域上の問題) および Giga [16] によって示された. この結果は, Kozono-Sohr [24] によって, 次のように拡張された: 定数 $\varepsilon_0>0$ が存在して, 弱解 $u \in L^\infty(0,T;L^n)$ が各 $t_* \in (0,T)$ に対して

$$\limsup_{t\to t_*-0} \|u(t)\|_n^n - \|u(t_*)\|_n^n \le \varepsilon_0 \tag{1.1}$$

をみたすならば, u は滑らかとなる. 既に述べたように, 任意の $t \in [0,T)$ に対して $u(t) \in L^n$ であるので, (1.1) の左辺を各 t_* に対して考えることができる. また, u は L^n 値関数として弱連続となるので, (1.1) の左辺は非負であることに注意. Kozono-Sohr の証明を見るとわかるように, (1.1) から

$$\limsup_{t\to t_*-0} \|u(t)-u(t_*)\|_n \le 2^{1-1/n}\varepsilon_0^{1/n} \tag{1.2}$$

が従い, (1.2) のもとで上記の結論が得られる. Kozono-Sohr とは別に, 3 次元有界領域上の問題に対してではあるが, Beirão da Veiga [1] も弱解 $u \in L^\infty(0,T;L^3)$ が滑らかとなるための十分条件を与えた. その条件は (1.1) よりも少し弱い条件にはなっているが, やや複雑なので, ここでは述べない.

次節において我々の結果を述べ, 最後の節でそれを証明する.

1.2. Results

主結果は, 次のとおりである.

Theorem 1.1. ([19]) 以下をみたす定数 $\gamma > 0$ が存在する: 弱解 $u \in L^\infty(0,T;L^n)$ が各 $t_* \in (0,T)$ に対して

$$\liminf_{t \to t_* - 0} \|u(t) - u(t_*)\|_n \le \gamma \tag{1.3}$$

をみたすならば, $u \in C^\infty(\boldsymbol{R}^n \times (0,T))$ となる.

Kozono-Sohr が (1.1) から (1.2) を導いた方法に従うと, 上の定理の系として, 次の結果も得られる.

Corollary 1.2. ([19]) $\gamma > 0$ を Theorem 1 の定数とする. 弱解 $u \in L^\infty(0,T;L^n)$ が各 $t_* \in (0,T)$ に対して

$$\liminf_{t \to t_* - 0} \|u(t)\|_n^n - \|u(t_*)\|_n^n \le \frac{\gamma^n}{2^{n-1}} \tag{1.4}$$

をみたすならば, $u \in C^\infty(\boldsymbol{R}^n \times (0,T))$ となる.

この結果自体は Kozono-Sohr [24] のささやかな改良にすぎないが, [19] で与えられた Theorem 1.1 の証明方法は [24] とは異なるアイデアによるもので (Beirão da Veiga [1] のアイデアとも異なり), 幾分初等的である. 尚, Kozono-Sohr [24] は, $[0,T]$ 上で有界変分な弱解 u が滑らかとなることも示した. 実際, そのような弱解に対して, 各 $t \in (0,T)$ での左極限 $u(t-0)$ の存在が示され, このことと L^n 値弱連続性とから結局 L^n 値左強連続となって, (1.1) から (1.4) までの左辺はいずれもゼロとなるのである.

証明の比較のため, まず Kozono-Sohr の方法について述べる. [24] では, 弱解 u とそれを係数とする移流摂動項をもつ Stokes 方程式 $\partial_t v + Av + P(u \cdot \nabla v) = 0$ の弱解 v を, (1.2) をみたす t_* の適当な近傍において同定した (射影 P と Stokes 作用素 A は 1.3 節で導入). v は Introduction で述べた Serrin のクラスに属するので, 結果として $u(=v)$ は滑らかとなる. 上のような摂動項をもつ Stokes 方程式の解の構成においては, Giga-Sohr [18] による線型放物型発展方程式の maximal regularity の理論を用いた.

一方, Theorem 1.1 の証明では, 弱解 u と Kato [22] による Navier-Stokes 方程式自身の強解を, (1.3) をみたす t_* の適当な近傍において同定する (Kozono-Sohr [23] の一意性の criterion によって). それには, $u(t_* - \delta) \in L^n$ を初期値と見たときに, 強解が t_* を越えて存在するような $\delta > 0$ を実際に取れることが示されればよい. 従って, 強解の存在区間の長さが問題となる. もし $q > n$ に対して $a \in L^q_\sigma$ ならば, (NS) の強解の存在区間の長さを $\|a\|_q$ によって下から評価できる (例えば Giga [16]). 換言すれば, L^q_σ の有界集合に属する初期関数 a に対して, 存在区間の長さを一様に取れる. しかし, このことは $q = n$ のときには正しくなく, 存在区間の長さは $\|a\|_n$ によって定まるわけではない. ただし, L^n_σ の precompact 集合に属する初期関数 a に対してなら, 強解の存在区間の長さを一様に取れる (例えば Brezis [2]). これらの考察から, $C([0,T);L^n)$ あるいは $L^\infty(0,T;L^q)$ (ただし $q > n$) に属する弱解の滑らかさが直ちにわかる. 弱解 $u \in L^\infty(0,T;L^n)$ に対しては単純

ではないが, L^n に属する初期関数に対する (NS) の強解の存在区間がどのように定まるのか, Kato [22] の証明をいま一度よく見てやりさえすれば Theorem 1.1 を証明できる.

1.3. Proof of results

$1 < q < \infty$ に対して, L^q 空間を $L^q(\boldsymbol{R}^n) = L^q_\sigma(\boldsymbol{R}^n) \oplus L^q_\pi(\boldsymbol{R}^n)$ のように直和分解 (Helmholtz 分解) できる. ただし, $L^q_\pi(\boldsymbol{R}^n) = \{\nabla p \in L^q(\boldsymbol{R}^n); p \in L^q_{loc}(\boldsymbol{R}^n)\}$ である. P を $L^q(\boldsymbol{R}^n)$ から $L^q_\sigma(\boldsymbol{R}^n)$ への上への射影作用素とする. 全空間上の問題に対しては, P を Riesz 変換でかくことができ, また Laplace 作用素と可換になる. 従って, Stokes 作用素は

$$D(A) = W^{2,q}(\boldsymbol{R}^n) \cap L^q_\sigma(\boldsymbol{R}^n), \qquad Au = -P\Delta u = -\Delta P u = -\Delta u \quad \text{for } u \in D(A)$$

となるので, Stokes 半群は熱方程式の基本解にすぎない:

$$(e^{-tA}f)(x) = (4\pi t)^{-n/2} \int_{\boldsymbol{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} f(y)\, dy, \qquad t > 0.$$

これを用いて, (NS) を積分方程式

$$u(t) = e^{-tA}a - \int_0^t e^{-(t-s)A} P(u \cdot \nabla u)(s)\, ds \tag{1.5}$$

にかき直す. (1.5) を $a \in L^n_\sigma(\boldsymbol{R}^n)$ に対して時間局所的に解くには, 半群 e^{-tA} の L^q–L^r 評価 $(1 \le q \le r \le \infty, k = 0, 1)$

$$\|\nabla^k e^{-tA} f\|_r \le C t^{-\alpha - k/2} \|f\|_q, \qquad t > 0, \tag{1.6}$$

だけでなく, $f \in L^q(\boldsymbol{R}^n)$ $(1 \le q < \infty)$ に対する $e^{-tA}f$ の $t \to 0$ での挙動

$$\lim_{t \to 0} t^\alpha \|e^{-tA} f\|_r = 0 \qquad \text{if } \ q < r \le \infty, \tag{1.7}$$

$$\lim_{t \to 0} t^{\alpha + 1/2} \|\nabla e^{-tA} f\|_r = 0 \qquad \text{if } \ q \le r \le \infty, \tag{1.8}$$

が必要である. ただし, $\alpha = n(1/q - 1/r)/2$ である.

Kato による局所解存在定理を, 次のように述べることができる.

Proposition 1.3. (i) ([22]) 以下をみたす定数 $\mu > 0$ が存在する: $a \in L^n_\sigma(\boldsymbol{R}^n)$ と $T > 0$ が

$$\sup_{0 < t \le T} \left\{ t^{1/4} \|e^{-tA} a\|_{2n} + t^{1/2} \|\nabla e^{-tA} a\|_n \right\} < \mu \tag{1.9}$$

をみたすならば, 積分方程式 (1.5) の区間 $[0, T]$ 上での一意解 $u \in C([0, T]; L^n_\sigma)$ が存在する. この解 u は (NS) の L^n 値強解となり, さらに $u \in C^\infty(\boldsymbol{R}^n \times (0, T])$.

(ii) 特に, $a \in L^n_\sigma(\boldsymbol{R}^n) \cap L^2_\sigma(\boldsymbol{R}^n)$ と $T > 0$ が (1.9) をみたすならば, (i) で得られた $[0,T]$ 上の解 u は L^2 値強解にもなり, 従ってエネルギー等式をみたす弱解でもある.

我々の立場では, (1.9) が重要であるが, これは [22] の証明をよく見ればわかる. (1.7) と (1.8) より, 任意の $a \in L^n_\sigma(\boldsymbol{R}^n)$ に対して (1.9) をみたす $T > 0$ を実際に取れることは, 言うまでもない. また, (i) で述べた解の滑らかさは, 例えば, Giga-Miyakawa [17] の section 3 に沿って示される. 以下で, (ii) だけを簡潔に示そう.

Proof of Proposition 1.3. (ii) まず, $\|P(u \cdot \nabla u)\|_{n/2} \le C\|u(t)\|_n \|\nabla u(t)\|_n \le Ct^{-1/2}$ を用いて積分方程式 (1.5) を評価すると, $\max\{n/2, 2\} \le q < n$ なる q に対して,

$$u \in C([0,T]; L^q_\sigma) \cap C^{1/2}_{loc}((0,T]; L^q_\sigma) \tag{1.10}$$

を得る. 次に ($n \ge 5$ のときは), $\|P(u \cdot \nabla u)\|_{n/3} \le C\|u(t)\|_{n/2} \|\nabla u(t)\|_n \le Ct^{-1/2}$ を用いて (1.5) を評価し直すと, $\max\{n/3, 2\} \le q < n/2$ なる q に対しても (1.10) を得る. この手続きを繰り返すことにより, 結局 $2 \le q < n$ なる q に対して, (1.10) が得られる. このことと $\nabla u(t)$ の L^n 値関数としての $(0,T]$ 上での局所 Hölder 連続性を併せると, $P(u \cdot \nabla u)(t)$ の L^2 値局所 Hölder 連続性が従い, 結論が得られる. □

Kozono-Sohr により示された次のような弱解の一意性の criterion も用いる.

Proposition 1.4. ([23]) u および v を, 初期条件 $u(0) = v(0) = a \in L^2_\sigma(\boldsymbol{R}^n)$ に対する (NS) の $(0,T)$ 上の弱解とする. $u \in L^\infty(0,T; L^n)$ であり, また v がエネルギー不等式

$$\|v(t)\|_2^2 + 2\int_0^t \|\nabla v(\tau)\|_2^2 d\tau \le \|a\|_2^2, \qquad 0 \le t < T$$

をみたすならば, $[0,T)$ 上で $u = v$.

以上の準備のもとで, Theorem 1.1 を証明できる.

Proof of Theorem 1.1. すでに 1.1 節でも述べたように, (NS) の弱解 u が $L^\infty(0,T; L^n)$ に属するとき, 任意の $t \in [0,T)$ に対して $u(t) \in L^n_\sigma(\boldsymbol{R}^n) \cap L^2_\sigma(\boldsymbol{R}^n)$ となる (Kozono-Sohr [23]). 与えられた弱解 $u \in L^\infty(0,T; L^n)$ に対して, $t_* \in (0,T)$ を任意に固定し, 便利のため, $(0,t_*)$ 上の関数 ψ を

$$\psi(\delta) = \sup_{0<t\le 2\delta} \left\{ t^{1/4}\|e^{-tA}u(t_* - \delta)\|_{2n} + t^{1/2}\|\nabla e^{-tA}u(t_* - \delta)\|_n \right\} \qquad \text{for } \delta \in (0, t_*)$$

によって定める. (1.3) の左辺が十分小さいという条件のもと, 適当な $\delta \in (0,t_*)$ に対して, $\psi(\delta) < \mu$ が実現されることを示そう. ただし, μ は (1.9) における正定数である. そのような δ が存在しないと仮定する. このとき, (1.6) によって,

$$\mu \le \psi(\delta) \le \sup_{0<t\le 2\delta} \left\{ t^{1/4}\|e^{-tA}u(t_*)\|_{2n} + t^{1/2}\|\nabla e^{-tA}u(t_*)\|_n \right\} + C_0\|u(t_* - \delta) - u(t_*)\|_n$$

が任意の $\delta \in (0, t_*)$ に対して成り立つ (C_0 は δ に依らない正定数). $\delta \to +0$ とすれば, (1.7) と (1.8) によって,

$$\mu \le C_0 \liminf_{\delta \to +0} \|u(t_* - \delta) - u(t_*)\|_n.$$

これより, u が (1.3) を $\gamma = \mu/2C_0$ でみたしていると, 矛盾である. 従って, Proposition 1.3 より, そのような u に対して, 適当な $\delta \in (0, t_*)$ が存在して, 初期条件 $v(t_* - \delta) = u(t_* - \delta)$ をみたす滑らかな弱解 v が $(t_* - \delta, t_* + \delta)$ 上で構成される. Proposition 1.4 により, $[t_* - \delta, t_* + \delta)$ 上で $u = v$ となるので, $u \in C^\infty(\boldsymbol{R}^n \times (t_* - \delta, t_* + \delta))$ が示された. □

Proof of Corollary 1.2. Theorem 1.1. から Corollary 1.2 を導くやり方に関しては, Kozono-Sohr [24] と全く同じである. すなわち, Clarkson の不等式

$$\|u(t) - u(t_*)\|_n^n + \|u(t) + u(t_*)\|_n^n \le 2^{n-1}(\|u(t)\|_n^n + \|u(t_*)\|_n^n)$$

を用いる. 弱解 $u \in L^\infty(0, T; L^n)$ は L^n 値弱連続であるので, 上において $t \to t_* - 0$ としたときの下極限をとると, (1.4) から (1.3) が従う. □

Part 2 Stationary Problem: Existence of 5D Smooth Solutions

2.1. Results

Ω を $\boldsymbol{R}^5$ の有界領域, その境界 $\partial\Omega$ は十分滑らかとして, 同次 Dirichlet 境界条件 (粘着条件) のもとで Ω 上での定常 Navier-Stokes 方程式の境界値問題

$$(NS)^s \qquad \begin{cases} -\Delta u + u \cdot \nabla u + \nabla p &= f \quad \text{in } \Omega, \\ \nabla \cdot u &= 0 \quad \text{in } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

を考える. Part 2 を通して, 外力関数 $f \in L^\infty(\Omega)$ とする. このとき, $(NS)^s$ の弱解 $\{u, p\}$ が存在する (どんな空間次元 $n \ge 2$ でも). ここに, Ω 上の可測関数の組 $\{u, p\}$ が $(NS)^s$ の弱解であるとは, $u \in H_0^1(\Omega), \nabla \cdot u = 0, p \in W^{1,5/4}(\Omega)$ (ただし $\int_\Omega p dx = 0$) であって,

$$(\nabla u, \nabla \varphi) + (u \cdot \nabla u, \varphi) + (\nabla p, \varphi) = (f, \varphi)$$

を任意の $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ に対してみたすことである.

問題は, 5 次元の場合に f の大きさに制限なく, 内部正則性をみたす弱解を少なくともひとつ見つけることである. 定理を述べよう.

Theorem 2.1. ([6][8]) $f \in L^\infty(\Omega)$ とする. このとき, 任意の $q \in (1, \infty)$ に対して

$$(2.1) \qquad u \in W_{loc}^{2,q}(\Omega), \qquad p \in W_{loc}^{1,q}(\Omega)$$

となる $(NS)^s$ の弱解 $\{u,p\}$ が存在する.

f の regularity が上昇すると, それに応じて, (2.1) をみたす弱解 $\{u,p\}$ の regularity も上昇していく. 結果として, もし f が滑らかならば, $\{u,p\}$ は滑らかとなるので, Theorem 2.1 は滑らかな解の存在定理と見てよい. しかし, 空間次元 $n \leq 4$ の場合と違って, すべての弱解の滑らかさを示すことは困難である.

Theorem 2.1 は, 適当な $\alpha \in (0,1)$ に対して次の weighted estimate をみたす解の存在から導かれる: 任意の部分領域 $\Omega_0 \subset\subset \Omega$ に対して定数 $C = C(\Omega_0) > 0$ が存在して, 中心 x_0 半径 $R > 0$ の開球 $B_R(x_0)$ が Ω_0 に含まれるならば,

$$\int_{B_R(x_0)} \frac{|\nabla u(x)|^2}{|x-x_0|} dx \leq CR^\alpha. \tag{2.2}$$

ただし, $\Omega_0 \subset\subset \Omega$ は, $\overline{\Omega_0} \subset \Omega$ を意味する. (2.2) が成り立つためには, $R > 0$ の小さいときが問題となる. また, 関数 $|\nabla u(x)|^2/|x|$ の $\boldsymbol{R}^5$上での積分はスケール変換 $\lambda u(\lambda x)$ に関して不変であることに注意. (2.2) の左辺の積分が有限であることは, u の regularity の程度を表していると見ることができるが, (2.2) の評価式はさらに右辺の R の指数 $\alpha > 0$ の分だけ u の regularity が良いことを示している. 実際, Morrey 空間で捉えると, (2.2) から $\nabla u \in \mathcal{L}^{2,1+\alpha}_{loc}(\Omega)$ が従う. ここで, ふたつの指数 $1 \leq q < \infty$ と $0 \leq \lambda \leq n$ に対して, $f \in L^q_{loc}(\Omega)$ であって且つ任意の $\Omega_0 \subset\subset \Omega$ に対して

$$\sup_{B_R \subset \Omega_0} R^{-\lambda} \int_{B_R} |f(x)|^q dx < \infty$$

となる関数 f 全体からなる空間を $\mathcal{L}^{q,\lambda}_{loc}(\Omega)$ で表し, これを (局所化された) Morrey 空間という. ただし, 上式の上限は, Ω_0 に含まれる開球 B_R 全体にわたる. Morrey 空間の Sobolev 型埋蔵定理 ([4]) によって, $1/2^* = 1/2 - 1/(4-\alpha)$ で定まる指数 2^* に対して, $\nabla u \in \mathcal{L}^{2,1+\alpha}_{loc}(\Omega)$ から $u \in \mathcal{L}^{2^*,1+\alpha}_{loc}(\Omega)$ が従うので, $u \cdot \nabla u \in \mathcal{L}^{r,1+\alpha}_{loc}(\Omega)$. ただし, $1/r = 1 - 1/(4-\alpha)$ である. 仮定 $f \in L^\infty(\Omega) = \mathcal{L}^{r,5}(\Omega) \subset \mathcal{L}^{r,1+\alpha}_{loc}(\Omega)$ より, $-\Delta u + \nabla p = f - u \cdot \nabla u \in \mathcal{L}^{r,1+\alpha}_{loc}(\Omega)$ となるので, Stokes 方程式に対する Morrey 空間での正則性理論 ([4]) により, $D^2u, \nabla p \in \mathcal{L}^{r,1+\alpha}_{loc}(\Omega)$ を得る. 再び埋蔵定理を用いて上の議論を繰り返すことにより, 最終的には, 任意の $q < \infty$ に対して, $D^2u, \nabla u, u, \nabla p, p$ のすべてが $\mathcal{L}^{q,1+\alpha}_{loc}(\Omega)$ に属する (従って $L^q_{loc}(\Omega)$ に属する) ことがわかり, (2.1) が証明される. u の regularity (Morrey 指数) を $\alpha > 0$ だけ余分に稼いだことにより, 上記の bootstrapping が確かに働いて, regularity が上昇していくことに注意する. スケール変換 $\lambda u(\lambda x)$ に関して不変な norm までの regularity しか得られていないときは, 通常の bootstrapping はうまくいかない. (尚, (2.2) では $C > 0$ が $x_0 \in \Omega_0$ に依らないが, [3] の (1.20) や [39] の (1.11) は (2.2) の局所版である.)

Frehse-Ružička による (2.2) をみたす解の存在の証明は以下のようである. まず, [6] において, maximum property

$$\left(\frac{|u|^2}{2}+p\right)_+ \in L^\infty_{loc}(\Omega) \tag{2.3}$$

をみたす弱解の存在が示された．ここで，$|u|^2/2+p$(= 動圧+静圧) は head pressure と呼ばれる．$(\cdot)_+=\max\{\cdot,0\}$ を意味するので，(2.3) は head pressure がほとんど到る所上に有界であることを示している．次に，[8] において，maximum property (2.3) を有する弱解はすべて，適当な $\alpha\in(0,1)$ に対して (2.2) をみたす (従って滑らかになる) ことが示された．この結果自体は，任意の次元 $n\geq 5$ で成立する．一方，[6] で与えられた (2.3) をみたす解の存在証明は，5 次元に対してのみ有効である (後に，[11] で 6 次元の場合にも拡張された).

次節において，(2.3) をみたす弱解の構成について述べる．duality を用いた (2.3) の証明を実現するには，少なくとも $u_\epsilon\in L^4(\Omega)$ および $\nabla p_\epsilon\in L^{4/3}(\Omega)$ となる近似解 $\{u_\epsilon,p_\epsilon\}$ が必要となる．弱解の構成方法と全く独立に，[8] の主張 "(2.3) $\Rightarrow$ (2.2)" は示されるが，最後の節では簡単のために，次節で構成された解が (2.2) をみたすことを，楕円型方程式系に対して知られている hole filling technique (cf. Widman [48]) によって示す．

2.2. Maximum property

本節では，次の命題の証明の概略について述べる．

Proposition 2.2. ([6]) $f\in L^\infty(\Omega)$ とする．このとき，(2.3) をみたす $(NS)^s$ の弱解 $\{u,p\}$ が存在する．

まず，head pressure を

$$w=\frac{|u|^2}{2}+p$$

とおき，$\{u,p\}$ を滑らかとして，w のみたす方程式を導こう．等式 $\Delta\frac{|u|^2}{2}=u\cdot\Delta u+|\nabla u|^2$ の右辺の Δu に Navier-Stokes 方程式を代入すると，$u\cdot(v\cdot\nabla u)=v\cdot\nabla\frac{|u|^2}{2}$ に注意して，

$$\Delta\frac{|u|^2}{2}=u\cdot\nabla w+|\nabla u|^2-f\cdot u.$$

div$(NS)^s$ により得られる圧力方程式

$$\Delta p=-\nabla\cdot(u\cdot\nabla u)+\nabla\cdot f \tag{2.4}$$

を上式に加えると，($\nabla\cdot u=0$ のもとでの) 等式 $\nabla\cdot(u\cdot\nabla u)-|\nabla u|^2+|\mathrm{rot}\ u|^2=0$ により，方程式

$$-\Delta w+u\cdot\nabla w=-|\mathrm{rot}\ u|^2+f\cdot u-\nabla\cdot f$$

を得る．ただし，$|\mathrm{rot}\ u|^2=\sum_{1\leq i<j\leq 5}(\partial u_j/\partial x_i-\partial u_i/\partial x_j)^2$ である．これより，w は形式的には不等式 (head pressure inequality)

$$(2.5) \qquad -\Delta w + u\cdot\nabla w \le f\cdot u - \nabla\cdot f$$

をみたすので, maximum property (2.3) を期待できそうである.

さて, $(NS)^s$ の弱解をどのように構成すると, (2.3) を実際に証明できるであろうか. 構成法を考えるために, (2.3) を導くアイデア (duality method) を形式的な議論によって述べよう. 部分領域 $\Omega_0 \subset\subset \Omega$ を任意に固定する. さらに, その Ω_0 上で $\zeta = 1$, Ω 全体では $0 \le \zeta \le 1$ となる cut-off 関数 $\zeta \in C_0^\infty(\Omega)$ も固定する. 与えられた $x_0 \in \Omega_0$ に対して,

$$(2.6) \qquad \begin{cases} -\Delta G - u\cdot\nabla G &= \delta_{x_0} \qquad \text{in } \Omega, \\ \qquad\qquad\quad G &= 0 \qquad\quad \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

をみたす $G = G(x; x_0) \ge 0$, すなわち (2.5) の左辺の作用素の共役 $-\Delta - u\cdot\nabla$ の Green 関数を用いる. ただし, δ_{x_0} は質量が点 x_0 に集中した Dirac 超関数 である. (2.5) に $\zeta G \ge 0$ を掛けて得る不等式と (2.6) に ζw を掛けて得る等式を組み合わせると, 部分積分によって,

$$(2.7) \qquad w(x_0) \le (G, -2\nabla\zeta\cdot\nabla w - w\Delta\zeta + (u\cdot\nabla\zeta)w) + (f\cdot u, \zeta G) + (f, \nabla(\zeta G))$$

となるので, この右辺を評価できればよい.

上記の発見的考察を正当化するには, 少なくとも, (2.5) に ζG を掛けて積分する際に $u\cdot\nabla w \in L^1_{loc}(\Omega)$ が要求される. これは, 弱解のクラスよりわかる $u \in L^{10/3}(\Omega)$ と $\nabla p \in L^{5/4}(\Omega)$ からは得られないことに注意する. もし

$$(2.8) \qquad u_\varepsilon \in L^4(\Omega), \qquad \nabla p_\varepsilon \in L^{4/3}(\Omega)$$

をみたす $(NS)^s$ の近似解 $\{u_\varepsilon, p_\varepsilon\}$ が得られると, それに対しては,

$$u_\varepsilon\cdot\nabla\left(\frac{|u_\varepsilon|^2}{2} + p_\varepsilon\right) = u_\varepsilon\cdot(u_\varepsilon\cdot\nabla u_\varepsilon + \nabla p_\varepsilon) \in L^1(\Omega)$$

となり, 以下に見るように, 上で述べた duality method を近似解のレベルで押し進めることができる.

(2.8) のクラスに属する近似解を見つけるには, $(NS)^s$ の左辺に $\varepsilon|u|^2u$ (ただし $\varepsilon > 0$) を人工的に加えた近似方程式の境界値問題

$$(NS)^s_\varepsilon \qquad \begin{cases} -\Delta u + u\cdot\nabla u + \varepsilon|u|^2u + \nabla p &= f \qquad \text{in } \Omega, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \nabla\cdot u &= 0 \qquad \text{in } \Omega, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad u &= 0 \qquad \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

を考えればよい．というのは，これに形式的に u を掛けると，

$$\|\nabla u\|_2^2+\varepsilon\|u\|_4^4=(f,u)$$

となるからである (Part 2 においては，$L^q(\Omega)$ の norm を $\|\cdot\|_q$ であらわし，Ω 以外の領域上での L^q-norm については領域を明示する)．実際に，Galerkin 法によって，

$$\|u_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)}^2+\varepsilon\|u_\varepsilon\|_4^4+\|p_\varepsilon\|_{W^{1,5/4}(\Omega)}\le C_1,\qquad \|p_\varepsilon\|_{W^{1,4/3}(\Omega)}\le C_2(\varepsilon)$$

をみたす $(NS)_\varepsilon^s$ の弱解 $\{u_\varepsilon,p_\varepsilon\}$ を構成できる．ただし，$C_1>0$ は ε に依存しない定数である．適当な部分列に沿って $\varepsilon\to+0$ としたときの $\{u_\varepsilon,p_\varepsilon\}$ の弱極限関数 $\{u,p\}$ は，$(NS)^s$ の弱解となる．こうやって得られた弱解 $\{u,p\}$ が (2.3) をみたすことを示そう．

$w_\varepsilon=|u_\varepsilon|^2/2+p_\varepsilon$ がみたす方程式を形式的に求めると，

$$-\Delta w+u\cdot\nabla w=-|\mathrm{rot}\ u|^2+\varepsilon\nabla\cdot(|u|^2u)-\varepsilon|u|^4+f\cdot u-\nabla\cdot f$$

となるが (混乱がないときは添字 ε をしばしば省く)，実際に

$$-\Delta w+u\cdot\nabla w\le\varepsilon\nabla\cdot(|u|^2u)+f\cdot u-\nabla\cdot f \tag{2.9}$$

の弱型式が非負な test 関数に対してみたされているので，(2.5) の代わりに (2.9) を考えることになる．関数 $\rho\in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^5)$ を，その台が $B_1(0)$ に含まれていて $\int_{B_1(0)}\rho dx=1$ をみたすように固定する．$0<h<\mathrm{dist}(x_0,\partial\Omega)$ に対して，$\delta_{x_0,h}(x)=h^{-5}\rho((x-x_0)/h)$ とおいて，(2.6) の代わりに，

$$\begin{cases}-\Delta G_{h,\varepsilon}-u_\varepsilon\cdot\nabla G_{h,\varepsilon} &=\delta_{x_0,h} & \text{in }\Omega,\\ \qquad\qquad G_{h,\varepsilon} &=0 & \text{on }\partial\Omega,\end{cases} \tag{2.10}$$

の弱解 $(0\le)\ G_{h,\varepsilon}=G_{h,\varepsilon}(x;x_0)\in H_0^1(\Omega)$ を考える．以下の議論を完全にするには，係数 u_ε をさらに滑らかな関数で近似する必要があるが，それは議論の中心部分でないので省く．$\beta\ge0$ とする．(2.10) の test 関数として $G_{h,\varepsilon}^{\beta+1}$ をとると，$(u_\varepsilon\cdot\nabla G_{h,\varepsilon},G_{h,\varepsilon}^{\beta+1})=0$ により，

$$\frac{\beta+1}{(\beta/2+1)^2}\left\|\nabla G_{h,\varepsilon}^{\beta/2+1}\right\|_2^2=(\delta_{x_0,h},G_{h,\varepsilon}^{\beta+1}).$$

これより，

$$\|G_{h,\varepsilon}\|_{5(\beta+2)/3}^{\beta+2}=\|G_{h,\varepsilon}^{\beta/2+1}\|_{10/3}^2\le C\left\|\nabla G_{h,\varepsilon}^{\beta/2+1}\right\|_2^2\le C(\beta+2)^2\|\delta_{x_0,h}\|_\infty\|G_{h,\varepsilon}\|_{\beta+1}^{\beta+1}.$$

これが任意の $\beta\ge0$ に対して成り立つので，Moser の iteration technique によって，ε に無関係な定数 $C(h)>0$ が存在して，

$$\|G_{h,\varepsilon}\|_\infty \le C(h).$$

$\beta=0$ のときの上の計算の最初へ戻ると，

$$\|\nabla G_{h,\varepsilon}\|_2^2 \le \|\delta_{x_0,h}\|_1 \|G_{h,\varepsilon}\|_\infty \le C(h)$$

も得られる．これより，$h>0$ を固定して，適当な部分列に沿って $\varepsilon \to +0$ とすれば，$\{G_{h,\varepsilon}\}$ の $H_0^1(\Omega)$ での弱極限関数 G_h を得る．この G_h は，先に $\{u_\varepsilon\}$ の極限として求めた $(NS)^s$ の弱解 u を係数にもつ問題

$$\text{(2.11)} \qquad \begin{cases} -\Delta G_h - u\cdot\nabla G_h &= \delta_{x_0,h} \qquad \text{in } \Omega, \\ \qquad\qquad\quad G_h &= 0 \qquad\quad\ \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

の弱解になっている．

さて，(2.7) を導いたのと同じ考え方で (2.9) および (2.10) の test 関数をそれぞれ取ると，(2.7) に対応する不等式を得ることができるが，それにおいて $h>0$ を固定して $\varepsilon\to+0$ とすれば，$\{u_\varepsilon\},\{w_\varepsilon\}$ および $\{G_{h,\varepsilon}\}$ の種々の位相での収束 (例えば，Rellich の定理により，適当な Lebesgue 空間上では強収束) によって，先に求めた $(NS)^s$ の弱解 u とそれから定まる head pressure w は

$$\text{(2.12)} \quad (\delta_{x_0,h},\zeta w) \le (G_h, -2\nabla\zeta\cdot\nabla w - w\Delta\zeta + (u\cdot\nabla\zeta)w) + (f\cdot u,\zeta G_h) + (f,\nabla(\zeta G_h))$$

をみたすことがわかる．ここで，(2.12) の右辺を $h>0$ に無関係に評価したい．$\beta>0$ とする．(2.11) の test 関数として $\psi_h = G_h/(1+G_h^\beta)^{1/\beta}$ をとると，$(u\cdot\nabla G_h,\psi_h)=0$ により，

$$\int_\Omega \frac{|\nabla G_h|^2}{(1+G_h^\beta)^{1+1/\beta}}dx = (\delta_{x_0,h},\psi_h) \le 1.$$

任意に小さい $\beta>0$ に対して，Sobolev の不等式と上の評価を組み合わせると，

$$\|G_h\|_{5(1-\beta)/3} \le C\|\nabla G_h\|_{5(1-\beta)/(4-\beta)} \le C_\beta + \frac{1+\beta}{2}\|G_h\|_{5(1-\beta)/3}$$

となる．従って，G_h に対して，次のような $h>0$ に依存しない評価が得られた: 任意の $q\in[1,5/3)$ と任意の $r\in[1,5/4)$ に対して，それぞれ定数 $C_q, C'_r>0$ が存在して，

$$\text{(2.13)} \qquad \|G_h\|_q \le C_q, \qquad \|\nabla G_h\|_r \le C'_r.$$

これらの評価は，Lebesgue 空間上で見る限り，作用素 $-\Delta - u\cdot\nabla$ の Green 関数の点 x_0 での挙動が $-\Delta$ のそれと同じであることを示している．さらに，Moser の iteration technique (この iteration は 5 次元ゆえにうまくいき，6 次元以上ではだめになる) によっ

て, 任意の compact 集合 $K \subset \Omega \setminus \{x_0\}$ に対して, $h > 0$ に依存しない定数 $M_K > 0$ が存在して,

$$\|G_h\|_{L^\infty(K)} \le M_K \|G_h\|_q. \tag{2.14}$$

ただし, $q < 5/3$ は固定されている. (2.13) および $K = \mathrm{Supp}[\nabla\zeta]$ に対する (2.14) によって, (2.12) の右辺を $h > 0$ と $x_0 \in \Omega_0$ に無関係に評価できる. 一方, (2.12) の左辺は, a.a.$x_0 \in \Omega_0$ に対して, $h \to +0$ としたときに $w(x_0)$ へ収束する. 実際, $\zeta w \in L^{5/3}(\Omega) \subset L^1(\Omega)$ より, Ω 上ほとんど到る所 ζw の Lebesgue 点となるので, a.a.$x_0 \in \Omega_0$ に対して,

$$\begin{aligned} |(\delta_{x_0,h}, \zeta w) - w(x_0)| &\le \frac{1}{h^5}\int_{B_h(x_0)} \rho\left(\frac{x-x_0}{h}\right)|(\zeta w)(x) - (\zeta w)(x_0)|dx \\ &\le \frac{C}{|B_h(x_0)|}\int_{B_h(x_0)} |(\zeta w)(x) - (\zeta w)(x_0)|dx \end{aligned}$$

は $h \to +0$ としたときにゼロへ収束するからである. 以上より, 任意の $\Omega_0 \subset\subset \Omega$ に対して, w は Ω_0 上ほとんど到る所上に有界となり, (2.3) が示された.

2.3. Weighted estimates

以下, $\{u, p\}$ を前節で構成した $(NS)^s$ の弱解とする. 任意の部分領域 $\Omega_0 \subset\subset \Omega$ に対して, $\Omega_0 \subset\subset \Omega_1 \subset\subset \Omega$ となる Ω_1 を固定する. まず, head pressure $w = |u|^2/2 + p$ に対する次の (少し弱い) weighted estimate が必要である: 定数 $C > 0$ が存在して, 任意の $x_0 \in \Omega_0$ に対して,

$$\int_\Omega \frac{\eta(x)|w(x)|}{|x-x_0|^3}dx \le C. \tag{2.15}$$

ただし, cut-off 関数 $\eta \in C_0^\infty(\Omega)$ は Ω_1 上で $\eta = 1$, Ω 全体では $0 \le \eta \le 1$ となるものを固定してある. [6] において, maximum property (2.3) から (2.15) が従うことが示された. 用いるのは, 圧力方程式 (2.4) の弱型式である. $h > 0$ に対し, (2.4) の test 関数として, $\eta/(|x-x_0|^2 + h^2)^{1/2}$ を取って計算の後, $h \to +0$ とする. しかし, アイデアをはっきりさせるために, $\eta/|x - x_0|$ を取って形式的に計算しよう. 後の Lemma 2.4 の証明においても同様の方針で計算するが, 上のような正則化近似によって正当化される. 部分積分により,

$$3\int_\Omega \frac{\eta\left((x-x_0)\cdot u\right)^2}{|x-x_0|^5}dx = 2\int_\Omega \frac{\eta w}{|x-x_0|^3}dx + \int_\Omega \frac{\eta(x-x_0)\cdot f}{|x-x_0|^3}dx + I.$$

ただし, I は η の導関数を含む積分項であり, $1/|x - x_0| \le C$ $(x_0 \in \Omega_0, x \in \mathrm{Supp}[\nabla\eta])$ に注意して

$$|I| \le C(\|u\|_2^2 + \|p\|_1 + \|f\|_\infty)$$

と評価される. $w+|w|=2w_+$ に注意すると,

(2.16)
$$2\int_\Omega \frac{\eta|w|}{|x-x_0|^3}dx+3\int_\Omega \frac{\eta\left((x-x_0)\cdot u\right)^2}{|x-x_0|^5}dx=4\int_\Omega \frac{\eta w_+}{|x-x_0|^3}dx+\int_\Omega \frac{\eta(x-x_0)\cdot f}{|x-x_0|^3}dx+I$$

となるが, (2.3) より

$$\int_\Omega \frac{\eta w_+}{|x-x_0|^3}dx \le \|w_+\|_{L^\infty(Supp[\eta])}\int_\Omega \frac{1}{|x-x_0|^3}dx$$

であるから, 上の $|I|$ の評価と併せると, (2.15) が得られる.

さて, 本節の目的は, 次の命題を示すことである.

Proposition 2.3. ([8]) Proposition 2.1 で得られた $(NS)^s$ の弱解 u は, 適当な $\alpha\in(0,1)$ に対して $\nabla u\in\mathcal{L}^{2,1+\alpha}_{loc}(\Omega)$ をみたす.

再び部分領域 $\Omega_0\subset\subset\Omega$ を任意に固定して, (2.2) を示そう. $\Omega_0\subset\subset\Omega_1\subset\subset\Omega$ となる Ω_1 も固定すると, 定数 $R_0>0$ が存在して, 任意の $x_0\in\Omega_0$ に対して $B_{2R_0}(x_0)\subset\Omega_1$ とできる. 与えられた $x_0\in\Omega_0$ に対して,

$$v_{x_0}(x)=\frac{|\nabla u(x)|^2}{|x-x_0|}+\frac{|u(x)|^2+|w(x)|+|\nabla g(x)|^2}{|x-x_0|^3}$$

とおく. ただし, $g\in W^{2,5/3}(\Omega)\cap W^{1,5/2}_0(\Omega)$ は $w=|u|^2/2+p\in L^{5/3}(\Omega)$ を外力項にもつ Poisson 方程式の境界値問題

$$\begin{cases} \Delta g &= w \qquad \text{in } \Omega, \\ \quad g &= 0 \qquad \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.17}$$

の解とする.

(2.2) を証明するには, 上の $v_{x_0}(x)$ に対して, 次の hole filling inequality が得られればよい.

Lemma 2.4. ([8]) 定数 $C_1,C_2>0$ が存在して, 任意の $x_0\in\Omega_0$ と $R\in(0,R_0]$ に対して,

$$\int_{B_R(x_0)} v_{x_0}(x)dx \le C_1\int_{A_R(x_0)} v_{x_0}(x)dx+C_2R^2 \tag{2.18}$$

が成り立つ. ただし, $A_R(x_0)=B_{2R}(x_0)\setminus B_R(x_0)$.

(2.18) より, その右辺の $A_R(x_0)$ の hole を埋めると,

$$(1+C_1)\int_{B_R(x_0)} v_{x_0}(x)dx \le C_1\int_{B_{2R}(x_0)} v_{x_0}(x)dx+C_2R^2$$

となる. $\theta=\log_2(1+1/C_1)$ とおき, $0<\alpha<\min\{\theta,2\}$ なる α を任意に取ると,

$$\int_{B_R(x_0)} v_{x_0}(x)dx \le 2^{-\theta} \int_{B_{2R}(x_0)} v_{x_0}(x)dx + MR^\alpha$$

を得る. ただし, $M = C_2 R_0^{2-\alpha}/(1+C_1)$ とおいた. 任意に与えられた $R \in (0, R_0]$ に対して, $R_0/2^k < R \le R_0/2^{k-1}$ となる自然数 k を取ると, 単純な iteration によって,

$$\begin{aligned}
\int_{B_R(x_0)} v_{x_0}(x)dx &\le \int_{B_{R_0/2^{k-1}}} v_{x_0}(x)dx \\
&\le 2^{-\theta} \int_{B_{R_0/2^{k-2}}} v_{x_0}(x)dx + M\left(\frac{R_0}{2^{k-1}}\right)^\alpha \\
&\le \cdots\cdots \\
&\le 2^{-k\theta} \int_{B_{2R_0}(x_0)} v_{x_0}(x)dx + M\sum_{j=0}^{k-1} 2^{j(\alpha-\theta)} \left(\frac{R_0}{2^{k-1}}\right)^\alpha \\
&\le \left(\frac{R}{R_0}\right)^\theta \int_{\Omega_1} v_{x_0}(x)dx + \frac{M(2R)^\alpha}{1-2^{\alpha-\theta}}.
\end{aligned}$$

よって,

$$C_0 = R_0^{-\alpha} \int_{\Omega_1} v_{x_0}(x)dx + \frac{M2^\alpha}{1-2^{\alpha-\theta}} \tag{2.19}$$

とおけば, 任意の $R \in (0, R_0]$ に対して,

$$\int_{B_R(x_0)} \frac{|\nabla u(x)|^2}{|x-x_0|} dx \le C_0 R^\alpha$$

となる. ここで, $R = R_0$ に対する (2.18) を用いると,

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_1} v_{x_0}(x)dx &\le (1+C_1) \int_{\Omega_1 \setminus B_{R_0}(x_0)} v_{x_0}(x)dx + C_2 R_0^2 \\
&\le \frac{C}{R_0}\|\nabla u\|_2^2 + \frac{C}{R_0^3}\left(\|u\|_2^2 + \|w\|_1 + \|\nabla g\|_2^2\right) + C_2 R_0^2
\end{aligned}$$

となるので, (2.19) の $C_0 > 0$ は $x_0 \in \Omega_0$ に無関係な定数で評価される. 以上より, (2.2) が得られ, Proposition 2.3 が示された.

$|\nabla u(x)|^2/|x-x_0|$ だけに対して閉じた形の hole filling inequality は得られず, そのため上記の $v_{x_0}(x)$ のように, その他の量も動員する必要があることは, 以下の証明で明らかとなる.

Proof of Lemma 2.4. 証明に用いるのは, (2.15) の他に, Navier-Stokes 方程式 (直接には後で述べる Navier-Stokes inequality), 補助的な Poisson 方程式 (2.17) および圧力方程式 (2.4) である. これら 3 つの方程式 (不等式) の test 関数の取り方が重要である. まず, 2.2 節で構成した $(NS)^s$ の弱解 $\{u, p\}$ は, 任意の非負な $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ に対して,

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla(u\phi)dx \le \int_\Omega [w(u\cdot\nabla\phi) + (f\cdot u)\phi]\,dx \tag{2.20}$$

をみたす. Frehse-Ružička [8] は (2.20) を Navier-Stokes inequality と呼び ([3] の意味の generalized energy 不等式の定常版である), 2.2 節での弱解の構成方法とは無関係に, (2.3) をみたす弱解に対して (2.20) が成り立つことを証明した. しかし, 2.2 節で構成した弱解に限ると議論は易しく, まず (2.8) を用いて近似解 $\{u_\varepsilon, p_\varepsilon\}$ に対する Navier-Stokes inequality が得られ, それにおいて $\varepsilon\to+0$ とすればよい. 尚, 一般の弱解が (2.20) をみたすかどうかは, 不明である.

cut-off 関数 $\rho\in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^5)$ を,

$$0\le\rho\le 1,\qquad \mathrm{Supp}\,[\rho]\subset B_2(0),\qquad \rho=1\quad\text{in } B_1(0)$$

をみたすように取り, これを固定する. 与えられた $x_0\in\Omega_0$ と $R\in(0,R_0]$ に対して,

$$\zeta_{x_0,R}(x)=\rho\left(\frac{x-x_0}{R}\right)$$

とおく. このとき, x_0, R に無関係な定数 $C>0$ が存在して,

$$\|\nabla^k\zeta_{x_0,R}\|_\infty\le\frac{C}{R^k}\qquad(k=1,2) \tag{2.21}$$

となる. 以下, 簡単のため, $\zeta=\zeta_{x_0,R}$ のように略記する. (2.20) の test 関数として $\phi=\zeta/|x-x_0|$ を取ると (すでに述べたように, 実際には $\phi=\zeta/(|x-x_0|^2+h^2)^{1/2}$ を取って計算の後に $h\to+0$. 以下同じ), 簡単な計算により,

$$\int_\Omega\zeta\left(\frac{|\nabla u|^2}{|x-x_0|}+\frac{|u|^2}{|x-x_0|^3}\right)dx\le J_1+J_2+J_3. \tag{2.22}$$

ただし,

$$J_1=\int_\Omega w\left(u\cdot\nabla\frac{\zeta}{|x-x_0|}\right)dx,\qquad J_2=\int_\Omega\frac{\zeta(f\cdot u)}{|x-x_0|}dx,$$
$$J_3=\int_\Omega\left[\frac{(\Delta\zeta)|u|^2}{2|x-x_0|}-\frac{((x-x_0)\cdot\nabla\zeta)\,|u|^2}{|x-x_0|^3}\right]dx$$

である. ここで, ζ の導関数を含む J_3 は $A_R(x_0)$ 上の積分となり, (2.21) より

$$|J_3|\le C\int_{A_R(x_0)}\frac{|u|^2}{|x-x_0|^3}dx \tag{2.23}$$

を得る. また, $f\in L^\infty(\Omega)$ より,

$$|J_2| \le \frac{1}{4}\int_\Omega \frac{\zeta|u|^2}{|x-x_0|^3}dx + C\|f\|_\infty^2 R^6 \tag{2.24}$$

のように評価して, 第 1 項を (2.22) の左辺に吸収させる. J_1 については, (2.17) の解 g を用いて

$$J_1 = -\int_\Omega \nabla g \cdot \nabla\left(u\cdot\nabla\frac{\zeta}{|x-x_0|}\right)dx$$

のように書き直すと,

$$\begin{aligned}|J_1| \le \frac{1}{2}\int_\Omega \zeta\left(\frac{|\nabla u|^2}{|x-x_0|}+\frac{|u|^2}{|x-x_0|^3}\right)dx + C\int_{A_R(x_0)}\left(\frac{|\nabla u|^2}{|x-x_0|}+\frac{|u|^2+|\nabla g|^2}{|x-x_0|^3}\right)dx\\ + C\int_{B_{2R}(x_0)}\frac{|\nabla g|^2}{|x-x_0|^3}dx\end{aligned} \tag{2.25}$$

が得られる. (2.23), (2.24) および (2.25) を (2.22) へ代入すると,

$$\begin{aligned}&\int_{B_R(x_0)}\left(\frac{|\nabla u|^2}{|x-x_0|}+\frac{|u|^2}{|x-x_0|^3}\right)dx\\ &\le C_3\int_{A_R(x_0)}\left(\frac{|\nabla u|^2}{|x-x_0|}+\frac{|u|^2+|\nabla g|^2}{|x-x_0|^3}\right)dx + C_3\int_{B_{2R}(x_0)}\frac{|\nabla g|^2}{|x-x_0|^3}dx + C_3R^6\end{aligned} \tag{2.26}$$

となる. 従って, $|\nabla g|^2/|x-x_0|^3$ の $B_R(x_0)$ 上での積分が必要である. まず, (2.15) におけるのと同じ cut-off 関数 η に対して, (2.17) の test 関数として $\eta/|x-x_0|^3$ を取るとき, $\Delta\frac{1}{|x-x_0|^3} = -8\pi^2\delta(x-x_0)$ に注意すると, (2.15) を用いて $g \in L^\infty_{loc}(\Omega)$ が得られる. さらに,

$$\overline{g} = \frac{1}{|A_R(x_0)|}\int_{A_R(x_0)} g(x)dx$$

とおき, (2.17) の test 関数として今度は $\zeta(g-\overline{g})/|x-x_0|^3$ を取ると, 上で導いた $g\in L^\infty_{loc}(\Omega)$ および $A_R(x_0)$ 上での Poincaré の不等式によって,

$$\int_{B_R(x_0)}\frac{|\nabla g|^2}{|x-x_0|^3}dx \le C\int_{A_R(x_0)}\frac{|\nabla g|^2}{|x-x_0|^3}dx + C\|g\|_{L^\infty(\Omega_1)}\int_{B_{2R}(x_0)}\frac{|w|}{|x-x_0|^3}dx \tag{2.27}$$

を得る. (2.26) + (1 + C_3)(2.27) により,

$$\int_{B_R(x_0)}\left(\frac{|\nabla u|^2}{|x-x_0|}+\frac{|u|^2+|\nabla g|^2}{|x-x_0|^3}\right)dx \tag{2.28}$$

$$\leq C_4 \int_{A_R(x_0)} \left(\frac{|\nabla u|^2}{|x-x_0|} + \frac{|u|^2 + |\nabla g|^2}{|x-x_0|^3} \right) dx + C_4 \int_{B_{2R}(x_0)} \frac{|w|}{|x-x_0|^3} dx + C_3 R^6.$$

あとは, $|w|/|x-x_0|^3$ の $B_R(x_0)$ 上での積分を評価して, $v_{x_0}(x)$ について閉じた hole filling inequality をつくればよい. そのために, 再び圧力方程式 (2.4) を用い, その test 関数として, $\zeta/|x-x_0|$ を取る. η を ζ に取り替えた (2.16) の右辺において, ζ の導関数を含む積分項 I は, $p = w - |u|^2/2$ と表すことによって,

$$|I| \leq C \int_{A_R(x_0)} \frac{|u|^2 + |w|}{|x-x_0|^3} dx + C\|f\|_\infty R^3$$

と評価される. もう一度 (2.3) によって

$$\int_\Omega \frac{\zeta w_+}{|x-x_0|^3} dx \leq \|w_+\|_{L^\infty(\Omega_1)} \int_{B_{2R}(x_0)} \frac{1}{|x-x_0|^3} dx$$

となるので, $|I|$ の評価と併せて,

$$\text{(2.29)} \qquad \int_{B_R(x_0)} \frac{|w|}{|x-x_0|^3} dx \leq C \int_{A_R(x_0)} \frac{|u|^2 + |w|}{|x-x_0|^3} dx + C\|f\|_\infty R^3 + C\|w_+\|_{L^\infty(\Omega_1)} R^2$$

が得られる. (2.28) + $(1 + C_4)$(2.29) により, (2.18) が導かれる. □

参考文献

[1] Beirão da Veiga, H., *Remarks on the smoothness of the $L^\infty(0,T;L^3)$ solutions of the 3-D Navier-Stokes equations*, Portugaliae Math. **54** (1997), 381–391.

[2] Brezis, H., *Remarks on the preceding paper by M. Ben-Artzi "Global solutions of two-dimensional Navier-Stokes and Euler equations"*, Arch. Rational Mech. Anal. **128** (1994), 359–360.

[3] Caffarelli, L., Kohn, R. and Nirenberg, L., *Partial regularity of suitable weak solutions of the Navier-Stokes equations*, Comm. Pure Appl. Math. **35** (1985), 771–831.

[4] Chiarenza, F. and Frasca, M., *Morrey spaces and Hardy-Littlewood maximal function*, Rend. Mat. Appl. **7(7)** (1987), 273–279.

[5] Fabes, E. B., Jones, B. F. and Riviere, N. M., *The initial value problem for the Navier-Stokes equations with data in L^p*, Arch. Rational Mech. Anal. **45** (1972), 222–240.

[6] Frehse, J. and Ružička, M., *On the regularity of the stationary Navier-Stokes equations*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa **21** (1994), 63–95.

[7] Frehse, J. and Ružička, M., *Weighted estimates for the stationary Navier-Stokes equations*, Acta Appl. Math. **37** (1994), 53–66.

[8] Frehse, J. and Ružička, M., *Regularity for the stationary Navier-Stokes equations in bounded domains*, Arch. Rational Mech. Anal. **128** (1994), 361–381.

[9] Frehse, J. and Ružička, M., *Existence of regular solutions to the stationary Navier-Stokes equations*, Math. Ann. **302** (1995), 699–717.

[10] Frehse, J. and Ružička, M., *Regular solutions to the steady Navier-Stokes equations*, Proceedings of the 3rd International Conference on Navier-Stokes Equations and Related Nonlinear Problems (ed. Sequeira, A.), 131–139, Plenum, New York, 1995.

[11] Frehse, J. and Ružička, M., *Existence of regular solutions to the steady Navier-Stokes equations in bounded six-dimensional domains*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa **23** (1996), 701–719.

[12] Frehse, J. and Ružička, M., *Weighted estimates for the stationary Navier-Stokes equations*, Mathematical Theory in Fluid Mechanics (ed. Galdi, G. P., Málek, J. and Nečas, J.), 1–29, Pitman Res. Notes Math. Ser. **354**, Longman, Harlow, 1996.

[13] Fujita, H. and Kato, T., *On the Navier-Stokes initial value problem. I*, Arch. Rational Mech. Anal. **16** (1964), 269–315.

[14] Galdi, G. P., An Introduction to the Mathematical Theory of the Navier-Stokes Equations, Vol. II: Nonlinear Stationary Problems, Springer, New York, 1994.

[15] Gerhardt, C., *Stationary solutions to the Navier-Stokes equations in dimension four*, Math. Z. **165** (1979), 193–197.

[16] Giga, Y., *Solutions for semilinear parabolic equations in L^p and regularity of weak solutions of the Navier-Stokes system*, J. Differential Equations **62** (1986), 186–212.

[17] Giga, Y. and Miyakawa, T., *Solutions in L_r of the Navier-Stokes initial value problem*, Arch. Rational Mech. Anal. **89** (1985), 267–281.

[18] Giga, Y. and Sohr, H., *Abstract L^p estimates for the Cauchy problem with applications to the Navier-Stokes equations in exterior domains*, J. Funct. Anal. **102** (1991), 72–94.

[19] Hishida, T. and Izumida, K., *Remarks on a regularity criterion for weak solutions to the Navier-Stokes equations in $\boldsymbol{R}^n$*, Analysis (to appear).

[20] Hopf, E., *Über die Anfangswertaufgabe für die Hydrodynamischen Grundgleichungen*,Math. Nachr. **4** (1950/51), 213–231.

[21] Iwashita, H., *L_q-L_r estimates for solutions of the nonstationary Stokes equations in an exterior domain and the Navier-Stokes initial value problems in L_q spaces*, Math. Ann. **285** (1989), 265–288.

[22] Kato, T., *Strong L^p-solution of the Navier-Stokes equation in $\boldsymbol{R}^m$, with applications to weak solutions*, Math. Z. **187** (1984), 471–480.

[23] Kozono, H. and Sohr, H., *Remarks on uniqueness of weak solutions to the Navier-Stokes equations*, Analysis **16** (1996), 255–271.

[24] Kozono, H. and Sohr, H., *Regularity criterion on weak solutions to the Navier-Stokes equations*, Adv. Differential Equations **2** (1997), 535–554.

[25] Leray, J., *Étude de diverses équations intégrales non linéaires et de quelques problémes que pose l'hydrodynamique*, J. Math. Pures Appl. **12** (1933), 1–82.

[26] Leray, J., *Sur le mouvement d'un fluide visqueux emplissant l'espace*, Acta Math. **63** (1934), 193–248.

[27] Masuda, K., *Weak solutions of Navier-Stokes equations*, Tôhoku Math. J. **36** (1984), 623–646.

[28] Miyakawa, T. and Sohr H., *On energy inequality, smoothness and large time behavior in L^2 for weak solutions of the Navier-Stokes equations in exterior domains*, Math. Z. **199** (1988), 455–478.

[29] Nečas, J., Ružička, M. and Šverák, V., *On Leray's self-similar solutions of the Navier-Stokes equations*, Acta Math. **176** (1996), 283–294.

[30] Ohyama, T., *Interior regularity of weak solutions of the time dependent Navier-Stokes equations*, Proc. Japan Acad. **36** (1960), 273–277.

[31] Ružička, M. and Frehse, J., *Regularity for steady solutions of the Navier-Stokes equations*, Proceedings of the 3rd International Conference on Theory of the Navier-Stokes Equations (ed. Heywood, J. G., Masuda, K., Rautmann, R. and Solonnikov, V. A.), 159–178, Ser. Adv. Math. Appl. Sci. **47**, World Sci., River Edge, NJ, 1998.

[32] Scheffer, V., *Turbulence and Hausdorff dimension*, Lecture Notes in Math. **565** (1976), Springer, 94–112.

[33] Scheffer, V., *Partial regularity of solutions to the Navier-Stokes equations*, Pacific J. Math. **66** (1976), 535–552.

[34] Scheffer, V., *Hausdorff measure and the Navier-Stokes equations*, Commun. Math. Phys. **55** (1977), 97–112.

[35] Scheffer, V., *The Navier-Stokes equations in space dimension four*, Commun. Math. Phys. **61** (1978), 41–68.

[36] Scheffer, V., *The Navier-Stokes equations on a bounded domain*, Commun. Math. Phys. **73** (1980), 1–42.

[37] Serrin, J., *On the interior regularity of weak solutions of the Navier-Stokes equations*, Arch. Rational Mech. Anal. **9** (1962), 187–195.

[38] Sohr, H., *Zur Regularitätstheorie der instationären Gleichungen von Navier-Stokes*, Math. Z. **184** (1983), 359–375.

[39] Struwe, M., *On partial regularity results for the Navier-Stokes equations*, Comm. Pure Appl. Math. **41** (1988), 437–458.

[40] Struwe, M., *Regular solutions of the stationary Navier-Stokes equations on $\boldsymbol{R}^5$*, Math. Ann. **302** (1995), 719–741.

[41] Takahashi, S., *On interior regularity criteria for weak solutions of the Navier-Stokes equations*, Manuscripta Math. **69** (1990), 237–254.

[42] Taniuchi, Y., *On generalized energy equality of the Navier-Stokes equations*, Manuscripta Math. **94** (1997), 365–384.

[43] Temam, R., Navier-Stokes Equations, 3rd (revised) ed., North-Holland, Amsterdam, 1984.

[44] Tsai, T.-P., *On Leray's self-similar solutions of the Navier-Stokes equations satisfying local energy estimates*, Arch. Rational Mech. Anal. **143** (1998), 29–51. Erratum: **147** (1999), 363.

[45] Ukai, S., *A solution formula for the Stokes equation in* $\mathbf{R}^n_+$, Comm. Pure Appl. Math. **40** (1987), 611-621.

[46] von Wahl, W., *Regularity of weak solutions of the Navier-Stokes equations*, Amer. Math. Soc., Proc. Symposia Pure Math. **45** (1986), 497–503.

[47] von Wahl, W., The Equations of Navier-Stokes and Abstract Parabolic Equations, Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden, 1985.

[48] Widman, K. O., *Hölder continuity of solutions of elliptic systems*, Manuscripta Math. **5** (1971), 299–308.