数理解析研究所講究録 1206 巻 2001 年 55-82

対称空間の幾何理論

長野 正 (Tadashi Nagano)

1 はじめに

E. Cartan(1869-1951) の業績はおよそ Lie 群論，微分幾何，微分式系 (などと呼ばれる実解析的偏微分方程式の) 理論の三分野に分かれ，没後５０年の現在も活発な研究を刺激している．この三分野相互の深い関係に彼は関心を向けていた．実単純 Lie 環の分類も彼が行ったが，それはコンパクト型リーマン対称空間と非コンパクトなものとの双対関係の発見によりコンパクト型のものの分類と同じだと洞察した．Lie 群は微分式系で定義したし，微分式系ではその解全体を不変に保つ群に注目した．たとえばシンプレクティック形式を保つ (局所) 変換群は無限次元なので，無限次元 Lie 群の研究にも進む．不変微分方程式は物理への関心にも拡がり，彼自身の業績の紹介文にはスピノール群やその表現を特殊相対論をふまえた Dirac 理論との関連で説明している．アインシュタインが彼を訪問したとき「曲率が 0 でねじれが 0 でない接続を知っていますか？」と彼は気さくに尋ねたそうだ．しかし統一場の理論は２０世紀後半にも大きな進歩を遂げたものの未解決の難問である．Lie 群と微分幾何，殊に対称空間論とでトポロジーの必要を見た Cartan は重要な発見をいろいろ行った．若手に「Chevalley 君，ホモロジー群とは何かね？説明してくれないか.」と言って学んだり，学位論文の課題を探していた弟子の de Rham に (現代用語で言えば) 「de Rham 理論を作り給え.」と指示した．(これらの発言は，故 矢野 健太郎先生からセミナーの後などに聞いたものである．)

この文では対称空間の幾何理論を少し説明するが，前半の基本的な部分はほとんど全部 Cartan の仕事の一部である．１８６の論文や著書を残した Cartan([C]) は多様体やファイバー束などの定義をする暇がなかった．Hadamard や Weyl でさえ「難しくて読むのが大変」と書いている．彼を深く尊敬していた A. Weil や Chevalley それに息子の H. Cartan らのブルバキが Cartan の研究を理解するためのセミナーを行った．彼自身も楽しそうに出席していたそうである．その成果は Chevalley の例外型単純群の Betti 数の発表 (1950) や Weil の層 (sheaf) のコホモロジーの芽のようなアイデアの de Rham 理論の改良 (1952) などに止まらない．

この文の前半で証明を略した定理その他足りない所は [H] や [KN] やそれに日本語のよい本 [S] などがよい参考になるであろう．それに用語の問題もある．たとえば，ケーラー多様体はエルミット多様体だが逆ではないのに，Cartan からの伝統でエルミット対称空間という用語が使われているが，ケーラー対称空間と呼ぶ方

が現代の用語法に調和するであろう.「存在する」を「在る」(ある) と書いたのは,短くするのと動詞の「ある」は漢字を使う方が速く読むのに便利と考えているからである. こんな考えは賛成する人が少ければ自然消滅するもので大問題ではなかろう.

後半は Cartan より後の研究のごく一部を論じている. 一つには研究集会で最後に受けた重要な質問に時間がなくて答えられなかったので, より十分に答えるためである. また「古人の跡を求めず, 古人の求めたる所を求めよ」(芭蕉) という思想に応じようとしたものでもある.

研究集会を組織された古畑 仁氏や世話をして下さった方々や話を聴いて下さった方々に深く感謝する. 田中 真紀子氏には表の作製その他で大変お世話になって恐縮している.

2 対称空間とは

2.1 基礎概念

対称空間の圏 (category) $\mathcal{C}_S$ を次の４公理で定義する.

1. $\mathcal{C}_S$ は C^∞ 多様体の圏 $\mathcal{C}_\infty$ の部分圏である.
2. **対称空間** M の各点 x に**点対称** $s_x : M \to M$ が対応し, ２条件
   (a) $s_x \circ s_x = 1_M$ (M の恒等写像),
   (b) s_x の固定点集合 $F(s_x, M) := \{y \in M | s_x(y) = y\}$ の中で x は孤立点 (その中で $\{x\}$ は開.)
   を満たす.
3. 対称空間の間の写像 $f : M \to N$ は各点対称と可換なら**準同型**である, つまり M の各点 x に対し $f \circ s_x = s_{f(x)} \circ f$.
4. 各点対称 s_x は準同型 (したがって自己同型) である.

注意と課題. 上で明記しなかったが C^∞ 多様体は有限次元パラコンパクトである. 無限次元の例も２０世紀後半にはいろいろ現れている. C^∞ 級と仮定したのは微分幾何を応用するためで, その結果 C^ω 多様体であることが判る. C^0 級と仮定しても２０世紀初頭の Hilbert の第５問題の解決 (世紀半ば) を考慮すれば C^∞ 級と結論できるのではないか.

例.

(1) ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$, 球 S^n, トーラス (輪環面) $T^n = S^1 \times \cdots \times S^1$ は明らかに対称空間になれる.

(2) (グラスマン多様体) 線形空間 V の p 次元線形部分空間の全体 $G_p(V)$ は, V に内積を指定して, 点 $x \in G_p(V)$ での点対称 s_x を, V の $x \subset V$ に関する対

称写像で定義できる．$G_p(\mathbb{R}^n)=\frac{O(n)}{O(p)\times O(n-p)}, G_p(\mathbb{C}^n)=\frac{U(n)}{U(p)\times U(n-p)}, G_p(\mathbb{H}^n)=\frac{Sp(n)}{Sp(p)\times Sp(n-p)}$ など．

(3) 離散空間 D の各点の点対称 = 恒等写像 1_D と定めれば D は自明な対称空間になる．(応用例は定理5.4)

(4) Lie 群 G は $s_x: G\to G: y\mapsto xy^{-1}x$ により対称空間となる．これは単位元 1_G での点対称を $y\mapsto y^{-1}$ と決めて，G の G への左からの作用が空間 G の自己同型であるように s_x を決めたものである．そうすると右からの作用も自己同型になる．

注意と課題．この例は，有限群はすべて対称空間になることを示している．有限単純群 G の分類は２０世紀後半に完結したが，証明が恐しく長いし，理論の改善が望まれる．単純群 G は (巡回群を除き) 位数２の元 s を含む．$F:=F(\mathrm{ad}(s),G), \mathrm{ad}(s): x\mapsto sxs^{-1}$, による商集合 G/F には，点 $[1_G]=1_GF$ での点対称：$[x]=xF\mapsto[\mathrm{ad}(s)x]$ を使い，G が G/F の一つの自己同型群であるような対称空間の構造が入る．また，有限群はある直交群 $O(n)$ の部分群に同型であるし，幾何理論が進展して有限群の理解を深められればよい．

定義．準同型 $f: M\to N$ が単射 (中への同型) であるとき，$f(M)$ や M を N の**部分空間**と呼ぶ．また対称空間を以下では単に **空間**と (誤解の恐れがない限り) 呼ぶことがある．

例題１．準同型 $f: M\to N$ の像 $f(M)$ は N の部分空間である．(だからすべての準同型は全射準同型 $f: M\to f(M)$ と単射準同型 $f(M)\to N: f(x)\mapsto f(x)$ との合成である．) $f(M)$ が N の部分多様体になることは後に証明するが，それを仮定すれば，$a=f(x)$ での $f(M)$ の点対称は，$s_a: N\to N$ の $f(M)$ への制限として決まる．実際，$s_{f(x)}(f(y))=f\circ s_x(y)$.

例題２．自己同型 $f: M\to M$ の固定点集合 $F(f,M)$ は部分空間になる．

$F:=F(f,M)$ が部分多様体であることの証明は容易だが後に行う．F の点 $x=f(x)$ での点対称も同様に $s_x: M\to M$ の制限として定まる．$x=f(x), y=f(y)$ なら，$f(s_x(y))=s_{f(x)}\circ f(y)=s_x(y)$ だから．

2.2 接続 ∇

周知のように関数 $f: M\to\mathbb{R}$ の微分の定義には差 $f(x)-f(y)$ を使う．しかし，たとえば，ベクトル場 $v: M\to TM$ (= 接ベクトル束) には差 $v(x)-v(y)$ が定まらない．$x\neq y$ なら T_xM は T_yM と交わらないから．

M 中の曲線 $c:\mathbb{R}\to M$ (各 $c'(t)\neq 0$ としよう) に対し，その水平リフトと呼べるような曲線 $c_H:\mathbb{R}\to TM$ が，各 $v\in T_x(M), x:=c(0)$, に対し一つあっ

て，$c_H(t,v)$ は射影 $\pi : TM \to M$ で $c(t)$ に落ち，さらにそれでつながる接ベクトルの対応で線形同型 $T_xM \to T_{c(t)}M : c_H(0,v) \mapsto c_H(t,v)$ があれば，これにより $T_{c(t)}M$ 中のベクトルを T_xM に移して問題の差が定まることになる．これは c に依存する．水平リフト c_H の T_xM での接ベクトルが定まれば十分である．TM の v での接空間 T_vTM の線形部分空間 H_v を射影の微分 $d\pi : TTM \to TM$ が $T_xM, x = \pi(v)$, に同型に移す (だから $\dim H_v = \dim T_xM = \dim M$) ように選べばよいだろう．すべての v に対応する H_v の和集合が TTM の部分束 $H = \bigcup H_v$ になっているようにする．H を水平束と呼ぶ．H があれば，曲線 c の各点 $c(t)$ で各ベクトル $w \in T_{c(t)}M$ に対し $d\pi(u) = c'(t)$ となるベクトル $u \in H_w$ が決まる．水平リフトは初期条件 $c_H(0,v) = v$ を満たす常微分方程式 $\frac{d}{dt}c_H(t,v) = u$ の解として決まる．(線形) 接続はこのように異なる接空間の間に (c に依存する) つながり (連絡) を与えるもの H である．(水平リフト : $t \mapsto c_H(t,v)$ は曲線 c に沿う v に平行なベクトル，つまり v の平行移動を与えるもので，共変微分 $\nabla_{c'}c_H(t,v) = 0$ である．)

方程式 $\nabla_{c'}c' = 0$ の解を測地線と呼ぶ．(パラメタ t を $s \mapsto c(as+b)$ に変えたものは「同じ」測地線である．a, b は定数で $a \neq 0$．) 測地線は任意の接ベクトル $u \in TM$ に対する初期条件 $c'(0) = u$ で一意的に定まる．

∇ に関する**アフィン変換**は接続を保つ変換 $f : M \to M$, つまり H を保つ変換，さらに言い換えると任意の曲線 c の任意の水平リフト : $t \mapsto c_H(t,v)$ を $f \circ c$ の水平リフトに移す変換である．アフィン変換の全体 $\mathrm{Aff}(M)$ は Lie 群であり ([KN]I, p.229)，したがって C^ω 構造が入る．アフィン変換 f が点 $x \in M$ を固定し，T_xM に恒等写像として作用するなら，連結成分 $M_{(x)}$ 上で f は恒等写像である．

これで，線形接続 ([KN], [S]) の説明が終った．

これから対称空間 M を調べる．接続は連結成分に定義され，一般には異る連結成分の接続は無関係なので M は連結としよう．

便利な記号 $Q = Q_o : M \to \mathrm{Aut}(M) =$ 自己同型群 : $x \mapsto s_x \circ s_o$ を導入しよう．$\mathrm{Aut}(M)$ は Lie 群である (後述)．$M = \mathbb{R}$ のとき，$Q_a(b)(t) = s_b(-t+2a) = t + 2(b-a)$.

接ベクトル $u, v \in T_xM$ に対し，水平空間 $H_v \subset T_vTM$ を定めよう．曲線 $c : \mathbb{R} \to M$ の初期接ベクトル $c'(0) = u$ として，c から TM 中の曲線 : $t \mapsto Q_x(c(t))(v)$(この $Q_x(c(t))$ はその微分 $dQ_x(c(t))$ の作用) の $t = 0$ での接ベクトル $H(u,v)$ の全体 $\{H(u,v) | u \in T_xM\}$ を水平空間 $H_v \subset T_vTM$ と決める．これで M に接続が決まった．$f \in \mathrm{Aut}(M)$ なら，$f \circ Q_x(c(t)) = Q_{f(x)}(f \circ c(t)) \circ f$ だから，df は水平束 $H = \bigcup H_v$ の自己同型である．つまり $f \in \mathrm{Aff}(M)$.

また，c が測地線なら，$Q_{c(t)}c(0)$ は「同じ」測地線である (初期接ベクトルが 2 倍だが)．特に測地線は $\mathbb{R}$ 全体で定義される．また $\{Q(c(t)) | t \in \mathbb{R}\}$ は c に推移的に働く自己同型群である．

補題 2.1 点対称 s_o は接空間 T_oM に -1 として作用する．

$s_o \circ s_o = 1_M$ だから，T_oM に働く ds_o の固有値は ± 1 であり T_oM は固有空間の直和である．だから 1 も固有値なら，その固有ベクトル $X \neq 0$ を初期接ベクトルとする測地線の各点を s_o が固定する．つまり o が孤立固定点でないことになり矛盾．

系 2.2 M 上の奇数次のテンソル場が $\mathrm{Aff}(M)$ で不変なら 0 である．

これから多くの基本的な結果が出る．

定理 2.3 (i) M の $\mathrm{Aut}(M)$ で不変な接続 ∇ はただ一つである，

(ii) ∇ のねじれ (torsion，ねじれ率形式) は 0 であり (つまりベクトル場 u, v のブラケット積 $[u,v] = \nabla_u v - \nabla_v u$)，曲率テンソル R の共変微分 $\nabla R = 0$.

補足．条件 (ii) は対称空間の局所的特性である．

定理 2.4 M の $\mathrm{Aut}(M)$ で不変なリーマン計量 g があれば，不変 ∇ は g の Levi-Civita 接続である．

定理 2.5 $\mathrm{Aut}(M)$ 不変な概複素構造 J があれば，$\nabla J = 0$ であり J は複素構造を定める．さらに J に関するエルミット計量 g があれば (J, g) はケーラー構造を定める．

測地線を使えば $\mathrm{Aut}(M)$ がまず局所的に M に推移的であること，それから大局的に推移的であることが判る．$\mathrm{Aff}(M) \supset \mathrm{Aut}(M)$ も推移的である．$\mathrm{Aff}(M)$ は Lie 群だから，それが推移的に作用する M に C^ω(実解析的) 構造が入り M への作用も (実) 解析的である．

自己同型 $f : M \to M$ は $f \circ s_x = s_{f(x)} \circ f$ をすべての点 x に対し満たす (定義)．だから $\{s_x | x \in M\}$ の生成する群 $\subset \mathrm{Aff}(M)$ は $\mathrm{Aff}(M)$ の正規部分群である．他方 $f \in \mathrm{Aff}(M)$ は，2 点 y, z を通る測地線 c があれば y, z の中点 x を $f \circ c$ 上の点 $f(y), f(z)$ の中点 $f(x)$ に移す，つまり $f \circ s_x(y) = s_{f(x)} \circ f(y)$ が成立する．少なくとも y が x に十分近ければこれが成立する．

だから作用の解析性により，すべての x, y に対し上の式が成立する．

定理 2.6 $\mathrm{Aff}(M) = \mathrm{Aut}(M)$.

$M = \mathbb{R}^n$ の場合，$\mathrm{Aut}(M)$ は M の初等的意味のアフィン変換群であり，$\{Q(x) | x \in \mathbb{R}^n\}$ が生成する群は平行移動群 (したがって推移的) である．これに s_o を付加した群はこれと局所同型で $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n)$ の正規部分群である．

命題 2.7 (i) 写像 $Q : M \to \mathrm{Aut}(M) : x \mapsto s_x \circ s_o$ は準同型である．

(ii) 「核」$Q^{-1}(1) = \{p \in M | s_p = s_o\}$ は離散的部分空間で $Q : M \to Q(M)$ は被覆準同型である．

証明. $\mathrm{Aut}(M)$ は Lie 群だから対称空間である. Q が準同型であるのは $Q \circ s_y(x) = s_y \circ s_x \circ s_y \circ s_o = (s_y \circ s_o)(s_x \circ s_o)^{-1}(s_y \circ s_o) = s_{Q(y)}(Q(x))$ だから. (ii) は明らかであろう.

$s_p = s_o$ を満たす点 $p \neq o$ を M 中 o の極 (pole) と呼ぶ. $M = S^2$ の時, 北極 o の極は南極である. $M = S^n$ なら像 $Q(S^n)$ は実射影空間 $\mathbb{R}P^n$ で Q は $\mathbb{R}P^n$ の 2 重被覆写像である.

注意. この $Q : M \to \mathrm{Aut}(M)$ は Cartan はめこみと実質的に同じである.

命題 2.8 空間 M の自己同型 t の固定点集合 $F(t, M)$ は部分空間である.

証明. t の固定点 o, x が互いに近いとき, o, x を通る測地線 c が存在し, さらに c の各点は t の固定点である. 逆に, $dt : T_oM \to T_oM$ の核 $\{X \in T_oM | dt(X) = 0\}$ は線形部分空間で, その元 X を初期接ベクトルにする測地線の各点は t の固定点である. だからこの核が o での $F(t, M)$ の接空間であるような C^ω 構造が在る. あとは例題 2 で説明した.

命題 2.9 (i) 準同型 $f : M \to N$ の像 $f(M)$ は N の部分空間である.
(ii) その各点 $q \in f(M)$ の逆像 $f^{-1}(q)$ は M の部分空間である.
(iii) $f : M \to f(M)$ は沈めこみ (submersion) である.

証明. $f(M)$ が N の部分多様体であることを示せば, 例題 1 の説明から (i) の証明が終る. 線形写像 $df : T_pM \to T_{f(p)}N$ の階数 $r(p)$ は p によらない定数 r である. なぜなら各 $x \in M$ に対し $f \circ s_x = s_{f(x)} \circ f$ だから, ds_x は p での df の核を $s_x(p)$ での核に移すからである. したがって階数定理 ([H] では p.86 の定理 15.5) により, $f(M)$ は N の部分多様体である. また逆像 $f^{-1}(q)$ も M の部分多様体である. $f(x) = q = f(y)$ なら $f(s_x(y)) = s_{f(x)}(f(y)) = s_q(q) = q$ で, s_x が $f^{-1}(q)$ を保つ. 制限 $s_x|f^{-1}(q)$ を x での点対称に採れば $f^{-1}(q)$ は対称空間である. (iii) は明らかである.

定理 2.10 (M が連結でなくても) 準同型 $f : M \to N$ の像 $f(M)$ は N の部分空間であり, f は全射準同型 $f : M \to f(M)$ と単射準同型: $f(M) \to N$ の合成である. より精密に, M の点 a, b を含む連結成分 $M_{(a)}, M_{(b)}$ に対し, その像 $f(M_{(a)}), f(M_{(b)})$ は一致するか互いに交わらない.

証明. $f(M_{(a)})$ が $f(M_{(b)})$ と交わり, $f(a) = f(b)$ と仮定する. $M_{(a)}$ の中の測地線 $c : \mathbb{R} \to M, c(0) = a$ と, $M_{(b)}$ 中の測地線 $y : \mathbb{R} \to M : u \mapsto y(u), y(0) = b$, とに対し曲線 $u \mapsto Q_a(c(t))y(u)$ を作る. $t = 0$ のとき, これは y に一致しているので, 任意の t に対しても連結成分 $M_{(b)}$ 中の曲線である. その像 $f \circ Q_a(c(t))y(u) = Q_{f(a)}(fc(t))f(y(u))$ は $f(M_{(b)})$ 中にあるが, $u = 0$ のとき $Q_{f(a)}(fc(t))f(a) =$

$f(Q_a(c(t)(a)))$ で $f(M_{(a)})$ 中にある．$t \mapsto Q_a(c(t))(a)$ は c と「同じ」測地線である．だから $M_{(a)}$ 中の測地線 c は f で $f(M_{(b)})$ 中に移る．したがって少なくとも $M_{(a)}$ 中の a の近傍の像は $f(M_{(b)})$ 中にある．これにより $f(M_{(a)}) \subset f(M_{(b)})$．$a, b$ を取り換えた議論で $f(M_{(a)}) \supset f(M_{(b)})$．ゆえに $f(M_{(a)}) = f(M_{(b)})$．したがって $f(M)$ は N の部分多様体である．

補足．像 $f(M)$ はもちろん全測地的部分多様体である．

$\mathrm{Aut}(M)$ は Lie 群である．Lie 群 G の演算 (積) は微分によって接束 TG に延長でき G は Lie 群 TG の部分群である．単位元での接ベクトル $X \in T_1G$ は G 上のベクトル場 $X_G : G \to TG : a \mapsto aX$ に延長できる．これは左不変ベクトル場である，つまり $b(aX) = (ba)X$．ベクトル場のブラケット積により $[X_G, Y_G]$ が定まる，$Y \in T_1G$．$[X_G, Y_G]$ も左不変ベクトル場だから，ある $Z \in T_1G$ により，$[X_G, Y_G] = Z_G$ となり，T_1G にもブラケット積 $[X, Y] = Z$ が定まる．X_G の全体もそれと同一視できる T_1G も Lie 環 $\mathcal{L}G$ で G 上のベクトル場全体のなす Lie 環の部分環である．G が多様体 M に作用するとき，Lie 群 TG は TM に作用する．$X \in T_1G$ からベクトル場 $X_M : p \mapsto Xp$ が定まる．X_M の全体も Lie 環で，$X_G \mapsto X_M$ は準同型である．G の作用が効果的のとき，$\mathcal{L}G$ と同型である．その場合 X を X_G, X_M と同一視しよう (記号を単純にするため)．

M が連結な対称空間の場合に戻る．$G := \mathrm{Aut}(M)$ は M に推移的だから，M は等質空間 G/K である，K はある点 $o \in M$ の固定部分群 (等方群) $\{k \in G | ko = o\}$ である．点対称 s_o は M の自己同型なので随伴 (adjoint) 作用素 $\mathrm{ad}(s_o) : G \to G : a \mapsto s_o \circ a \circ s_o^{-1}$ は G の自己同型で，この作用は Lie 環にも自己同型として作用する．その固有値 ± 1 に応じて $\mathfrak{g} := \mathcal{L}G$ は分解する．$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{m}$(Cartan 分解)，$\mathfrak{k}$ が $\sigma := \mathrm{ad}(s_o)$ の固有値 1 の固有空間である．当然 $[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \subset \mathfrak{k}, [\mathfrak{k}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}, [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{k}$ となる．$\mathfrak{k}$ の元 Y は $\sigma(Y) = Y$ なので M 上のベクトル場 Y_M として点 o で $Y = 0$．他方 $\mathfrak{m}$ の元 X は $\sigma(X) = -X$ なので o で $\nabla X = 0$．G はアフィン変換だから，o で $Z = 0, \nabla Z = 0$ となる $Z \in \mathfrak{g}$ は 0 に限る．これで，当然のことながら，$\mathfrak{m}$ は接空間 T_oM と線形同型である．だから，$\dim M = n$ なら，$\dim G = \dim \mathfrak{g} \leq \dim \mathrm{Aut}(\mathbb{R}^n)$．ベクトル場 $X = X_M \in \mathfrak{g}$ は M に 1 階常微分方程式を定める．初期条件が点 p であるときその解を $e^{tX}p = \exp(tX)p$ と表わす．$e^{tX} \in G$ で $e^{(s+t)X} = e^{sX}e^{tX}, e^0 = 1_G$．$X \in \mathfrak{m}$ なら，曲線 $t \mapsto e^{tX}o$ は測地線である．

3 コンパクト対称空間

3.1 コンパクト性の仮定

以下，連結対称空間 $M = G/K$ がコンパクトと仮定する．$G = \mathrm{Aut}(M)$ もコンパクトになるが，M の代りに G がコンパクトと仮定してもよい．G がコンパクト

なら，G のすべての表現空間 V に G-不変な正定値内積が存在する．任意の正定値内積に G を働かせて，それを (両側不変測度を使って) 積分すれば不変なものが得られる．不変部分空間 $\subset V$ の直交補空間は G 不変だから，V は G-不変で既約な部分空間の直和に分解する．Lie 環 $\mathfrak{g} = \mathcal{L}G$ への随伴表現 $\mathrm{ad}(b)X = bXb^{-1}, b \in G, X \in \mathfrak{g}$, で不変な正定値内積 $\langle , \rangle$ が存在する．G の随伴表現の「微分」で $\mathfrak{g}$ の $\mathfrak{g}$ 上の表現ができる．$\mathrm{ad}(e^{tY})X = e^{tY}Xe^{-tY}$ を $t = 0$ で微分すれば分るように，$\mathrm{ad}(Y)X = YX - XY = [Y, X]$ となる．この表現での $\mathfrak{g}$ の不変部分空間が $\mathfrak{g}$ のイデアルである．イデアルは部分 Lie 環である．イデアルが既約であるとき，その部分環は単純である．だから $\mathfrak{g}$ はいくつかの単純 Lie 環と随伴表現が自明な極大線形部分空間の直和になる．それに対応して G は単純 Lie 群と可換 Lie 群との局所積になる．これらの正規部分群はすべてコンパクトである．さらに随伴表現を $\mathfrak{k} = \mathcal{L}K$ に制限すると，$[\mathfrak{k}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$ により $\mathfrak{k}$ は $\mathfrak{m}$ を保ち，$\mathfrak{m}$ は同様に単純空間の接空間とトーラスのそれとの直和になる．単純空間を既約空間と呼ぶことが多い ([H],[KN]) が．G が単純なら M も単純だが，逆は単純な M が群のときには成立しない (群 M には右と左とからの作用があるので G は $M \times M$ と局所同型)．さらに $\mathfrak{m} = T_oM$ の上の内積 $\langle , \rangle$ の制限が K 不変な正定値内積なので，M には G-不変なリーマン計量が在る．不変接続 ∇ は Levi-Civita 接続である．G は等長変換群である．また M の 2 点は測地線で結べる．したがって $\exp(\mathfrak{m}) = M, \exp(\mathfrak{g}) = G_{(1)}$ ($= G$ の単位元 1_G を含む連結成分)．さらに曲率テンソルは点 o で $R(X, Y)Z = -[[X, Y], Z]$ と表わせる $(X, Y, Z \in \mathfrak{m})$([H],[KN],[S])．$X, Y$ が正規直交していれば，対応する断面曲率 $\langle X, R(X, Y)Y\rangle = -\langle X, [[X, Y], Y]\rangle = \langle [X, Y], [X, Y]\rangle \geq 0$.

3.2 ヤコビ方程式から $\mathfrak{g}$ の構造へ

ここでのヤコビ方程式は，リーマン多様体 M 中の測地線 c に対し，c を動かす，つまりパラメタ $s, |s| < \epsilon$，に依存する測地線 $c_s : \mathbb{R} \to M$ の任意の族を考え ($c_0 = c$)，各 t に対し曲線 $s \mapsto c_s(t)$ の $s = 0$ での接ベクトル $v(t) \in T_{c(t)}M$ の満たす方程式である．計算は簡単で ([KN], [S]),

$$\nabla_{c'}\nabla_{c'}v + R(v, c')c' = 0$$

となる．これは 2 階線形常微分方程式で，任意の $v(0), \nabla_{c'}v(0)$ に対し解が一意的に定まる．

M が連結コンパクト対称空間 G/K の場合に戻る．G の元は M 中の測地線を測地線に移すので，任意の $X \in \mathfrak{g}$ に対し $X = X_M$ の c への制限は c に沿うヤコビ場 (ヤコビ方程式の解) である．

$c(0) = o$ とすると，$c(t) = e^{tH}o$ と書ける ($H \in \mathfrak{m}$)．c の水平リフトを利用してヤコビ方程式を T_oM 内の微分方程式に書きなおせる．

$$\frac{d^2}{dt^2}v + R(v, H)H = 0$$

R は一定 $(\nabla R = 0)$ だから o での公式 $R(X,Y)Z = -[[X,Y],Z]$ (ここで $X,Y,Z \in \mathfrak{m}$) が使えて，v が X の制限であるときには，

$$\frac{d^2}{dt^2}X(t) - \mathrm{ad}(H)^2 X(t) = 0$$

となる．ここで $\mathrm{ad}(H) : X \mapsto [H,X]$ を使って $R(X(t),H)H = -[H,[H,X(t)]]$ を書きなおした．

この方程式が極めて単純であることを見よう．まず $\mathrm{ad}(H) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ は交代行列である．これは $\mathrm{ad}(e^{tH})$ が内積を保つことから，$\langle \mathrm{ad}(e^{tH})X, \mathrm{ad}(e^{tH})Y\rangle = \langle X,Y\rangle$ を t で微分して $t=0$ とおけば判る $(X,Y \in \mathfrak{g})$．典型的な例は $G = SO(2)$ ($\mathbb{R}^2$ の回転群) である．$\mathbb{R}^2$ の正規直交底 (ϵ_1,ϵ_2) を使って線形変換 J を $J(\epsilon_1) = \epsilon_2, J(\epsilon_2) = -\epsilon_1$ で決める．J は交代行列で $J^2 = -1_2$ である．まず $e^{tJ} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}J^n$．$n$ が偶数 $2k$ の項と奇数 $2k+1$ の項に分けると，

$$\begin{aligned} e^{tJ} &= \sum_{k\geq 0} \frac{t^{2k}}{(2k)!}(-1)^k 1_2 + \sum_{k\geq 0} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}(-1)^k J \\ &= (\cos t)1_2 + (\sin t)J \in SO(2) \end{aligned}$$

もう等式 $SO(2) = \{e^{tJ} | t \in \mathbb{R}\}$ も明白だろう．Lie 環 $\mathcal{L}SO(2)$ は交代行列 J が張る 1 次線形空間である．

補足．これで e^{tJ} はこの場合，この記号が指数関数に一致することが判った．一般に Lie 群が線形群 $\subset GL(\mathbb{R}^n)$ のとき全く同じ事情にある．コンパクト Lie 群 G はある直交群 $O(n)$ の部分群と同型である．

$\mathrm{ad}(H)$ が交代だから，$\mathrm{ad}(H)^2$ は対称であり，固有値はすべて 0 以下である．(これは M の断面曲率が 0 以上であることに符合する．) 固有値 $-\alpha(H)^2$ の固有空間は微分作用素 $\dfrac{d^2}{dt^2} - \mathrm{ad}(H)^2$ が保つので，固有値毎に $X''(t) + \alpha(H)^2 X(t) = 0$ となる．この解は，$\alpha(H) \neq 0$ なら，$X(t) = \cos(t\alpha(H))X_1 + \sin(t\alpha(H))X_2$ である ($X_1 := X(0), \alpha(H)X_2 := X'(0)$)．このように $H \in \mathfrak{m}$ に対する (c に沿う) ヤコビ場が完全に決まる．

しかし，まだ H の特殊性，つまり H を変えたらヤコビ場がどう変るかという問題が残る．そこで $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{m}$ を可換で最大の線形部分空間 $\subset \mathfrak{m}$ だとする，つまり $H_1, H_2 \in \mathfrak{a}$ なら $[H_1,H_2] = 0$．$\mathfrak{a}$ を **Cartan 部分環**と呼ぶ．$\mathfrak{a}$ はトーラス部分群 $A \subset G$ の Lie 環である．$\mathrm{ad}(H_1), \mathrm{ad}(H_2)$ が可換なので同時対角化，$\mathfrak{m}$ の直和分解を各部分空間が $\mathrm{ad}(H_1)^2, \mathrm{ad}(H_2)^2$ の固有空間に含まれるようにできる．固有値 $-\alpha(H)^2$ は，1 次形式 $\alpha : \mathfrak{a} \to \mathbb{R}$ で決まる．

$\alpha \neq 0$ のとき α を ($\mathfrak{a}$ に関する) M の**根** (root) と呼ぶ．根の全体を $R(M)$ と記そう．$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{m}$ は，さらに細かく分解する．

$$\mathfrak{k} = \mathfrak{k}(0) + \sum_{\alpha\in R(M)} \mathfrak{k}(\alpha), \qquad \mathfrak{m} = \mathfrak{a} + \sum_{\alpha \in R(M)} \mathfrak{m}(\alpha)$$

この分解では，$\mathfrak{k}(-\alpha)=\mathfrak{k}(\alpha),\mathfrak{m}(-\alpha)=\mathfrak{m}(\alpha)$ である．また現れている部分空間は互いに直交する．$\mathrm{ad}(H)$ は $\mathfrak{k}$ と $\mathfrak{m}$ とを入れ替える，$\mathrm{ad}(H)\mathfrak{k}\subset\mathfrak{m},\mathrm{ad}(H)\mathfrak{m}\subset\mathfrak{k}$. そして任意の $X\in\mathfrak{m}(\alpha)$ に対し，$Y\in\mathfrak{k}(\alpha)$ が一意的に決まり，すべての $H\in\mathfrak{a}$ に対し，

$$[H,X]=\alpha(H)Y,\qquad [H,Y]=-\alpha(H)X$$

が成立する．特に $\dim\mathfrak{m}(\alpha)=\dim\mathfrak{k}(\alpha)$ であり，この次元 $m(\alpha)$ を根 α の重複度と呼ぶ．$R(M)$ と重複度 $m:R(M)\to\mathbb{Z}_+$ を合わせた情報を $R^m(M)$ と記す.

補足１．G が単純のとき，重複度 $m\geq 2$ であるためには，恒等写像 1_M が調和写像として不安定 (したがって 1_M と他の調和写像との合成も不安定) であることが必要十分である (大仁田義裕の定理から)．なお M が単純のとき，重複度 $m=2$ のために M が群であるのが必要十分.

補足２．**調和写像** $f:M\to N$ は，(簡単のためコンパクト) リーマン多様体 M からリーマン多様 N への写像で，N の計量 g_N の f による引き戻し f^*g_N の M の計量 g_M に関する長さ $\|f^*g_N\|$ の平方の積分

$$E(f):=\frac{1}{2}\int_M\|f^*g_N\|^2$$

の f での微分 (第一変分) が 0 になる写像である．$E(f)$ は係数 1/2 を付けて運動エネルギーに似た感じで，エネルギー関数と呼ぶ．リーマン球 $S^2=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ からの複素解析的 (正則) 関数 $f=u+iv$ の実部 u，虚部 v も調和関数と呼ぶがこれも f 自身も調和写像の例である．u,v を定義するラプラス微分方程式は調和写像の (第一変分) 方程式の例である．リーマンが $\mathbb{C}$ 内の領域に関する写像定理の証明に使った Dirichlet 積分はエネルギー関数である (係数 1/2 なし).

根 α の長さ $\|\alpha\|$ と重複度 $m(\alpha)$ との間には単純な関係がある.

命題 3.1 $\|\alpha\|\leq\|\beta\|$ なら $m(\alpha)\geq m(\beta)$．(証略．[H], [N2], [NT5])

次に Cartan 部分環が $K_{(1)}$ に関し互いに共役 ([H] では p.246 の定理 6.2)，したがって Cartan 部分環はすべて実質的に「同じ」で，たとえば $\dim\mathfrak{a}$ を M の階数 $r(M)$ と呼んでもよい．この結果は $M=K_{(1)}A=\bigcup_{b\in K_{(1)}}b(A)$，あるいは $G_{(1)}=K_{(1)}AK_{(1)}$ とも書ける (Cartan の定理).

その証明には，すべての $\alpha\in R(M)$ に対し $\alpha(H)\neq 0$ となる $H\in\mathfrak{a}$ を採ると，H 方向の測地線のほとんどすべての点 x で軌道 $K_{(1)}(x)$ の $\dim K_{(1)}(x)=\dim\sum\mathfrak{k}(\alpha)=\dim\sum\mathfrak{m}(\alpha)=\dim M-\dim\mathfrak{a}$ であるから，$A=\exp\mathfrak{a}$ 中の x のある近傍 U を採れば $K_{(1)}(U)$ は M 中で開．M はコンパクトなのでこれから $M=K_{(1)}A$ が判る．もっと具体的に共役性を知るには，極大トーラス $\ni o$ 中の稠密 (dense) な測地線を使えばよい．たとえば，$A=\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ のとき，ベクトル $(1,x)$ (x は無理数) 方向の測地線は A 中稠密である.

定理 3.2 根の集合 $R(M)$ は根系 (*root system*) である．つまり
(1) $R(M)$ は，正定値内積を指定した線形空間 $\mathfrak{a}$ の双対空間 $\mathfrak{a}^*$ の部分集合である．以下ではその内積により $\mathfrak{a}^*$ を $\mathfrak{a}$ と同一視する．
(2) 根 $\alpha \in R(M)$ の定める鏡映 (*reflection*) $\rho_\alpha : \mathfrak{a} \to \mathfrak{a} : H \mapsto H - \dfrac{2\langle H, \alpha\rangle}{\langle \alpha, \alpha\rangle}\alpha$ は $R(M)$ を保つ．
(3) β も根なら，$\dfrac{2\langle \beta, \alpha\rangle}{\langle \alpha, \alpha\rangle}$ は整数である．

証明． (2) 単位ベクトル $Y \in \mathfrak{k}(\alpha)$ の定める同型写像 $\mathrm{ad}(e^{tY}) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ をまず計算する．$\mathfrak{m}(\alpha)$ 中の単位ベクトル X と合わせて，$[Y, X] = -\alpha$, $[Y, \alpha] = \|\alpha\|^2 X$ が成立するので，各 $H \in \mathfrak{a}$ を

$$\mathrm{ad}(e^{tY})H = H + \frac{\alpha(H)}{\|\alpha\|}\sin(t\|\alpha\|)X + \frac{\alpha(H)}{\|\alpha\|^2}(\cos(t\|\alpha\|) - 1)\alpha$$

に移す．そこで $t\|\alpha\| = \pi$ と t の値を決める．右辺は $\rho_\alpha(H)$ になる．だからこのときの $\mathrm{ad}(e^{tY})$ は $\mathfrak{a}$ を保つような $\mathfrak{g}$ の自己同型である．だから $R(M)$ を保つ．

(3) 2 根 α, β に対し $[\mathfrak{m}(\alpha), \mathfrak{m}(\beta)] \subset \mathfrak{k}(\alpha+\beta) + \mathfrak{k}(\alpha-\beta)$ が成立する．($\alpha+\beta \neq 0$ が根でなければ $\mathfrak{k}(\alpha+\beta) = 0$ など．) 根 α に対し，2α が根でなければ，α と $\mathfrak{m}(\alpha)$ の張る空間はある部分空間 $S(\alpha)$ の接空間である．実際 $[\mathfrak{m}(\alpha), \mathfrak{m}(\alpha)] \subset \mathfrak{k}(\alpha+\alpha) + \mathfrak{k}(\alpha-\alpha) = \mathfrak{k}(0)$ となるので，$[\mathfrak{m}(\alpha), \mathfrak{m}(\alpha)] + \mathfrak{k}(\alpha)$ がそれの等方群の Lie 環であるような部分空間ができる．$S(\alpha)$ の Cartan 部分環は α だけが張るので階数は 1 である．後で説明するが断面曲率は正の定数 $\|\alpha\|^2$ である．つまり定曲率空間である，したがって $S(\alpha)$ はユークリッド空間内の半径 $\dfrac{1}{\|\alpha\|}$ の球 $S^{1+m(\alpha)}$ と等長的であるか，または $\mathbb{R}P^{1+m(\alpha)}$ と同型で 2 重被覆空間が $S^{1+m(\alpha)}$ と等長的である．だから初期接ベクトル α の測地線 c (の像) は周が $2\pi\|\alpha\|$ の円である．$t_0\|\alpha\| = \dfrac{2\pi}{\|\alpha\|}$ のとき $c(t_0)$ は $c(0)$ に一致する．だから $\mathrm{ad}(e^{t\alpha})$ は，$t = t_0$ のとき M の等方群の Lie 環 $\mathfrak{k}$ を保つ．だからヤコビ場の計算により，各根 β に対し $t_0\alpha(\beta) = t_0\langle \alpha, \beta\rangle$ は π の整数倍である．t_0 の値を代入すると，$\dfrac{2\langle \alpha, \beta\rangle}{\|\alpha\|^2}$ が整数になる．$n(\beta, \alpha) := \dfrac{2\langle \beta, \alpha\rangle}{\langle \alpha, \alpha\rangle}$ と記そう．2α も根の場合，$2^2\alpha$ が根でなければ，上により $n(\beta, 2\alpha)$ が整数なので $n(\beta, \alpha) = 2n(\beta, 2\alpha)$ も整数である．($2^2\alpha$ も根で $2^3\alpha$ が根でない場合，$\cdots$ も同様．) $R(\alpha)$ は有限集合なので，証明が終る．

□

$R(M)$ は制限 (restricted) 根系 ([H]) と実質的に同じである．(理由は階数 $r(\mathfrak{g}) = r(M) + r(\mathfrak{k}(0))$ による．) 制限根系が根系であることは大島 利雄・関口 次郎が証明した．以上では $R(M)$ をヤコビ場を見て幾何的に定義し根系であることを幾何的に証明した．

上で使った断面曲率の計算を念のため説明しよう．$\mathfrak{m}$ 中のベクトル X, Y, Z に対し $R(X,Y)Z$ は原点 o で $-[[X,Y],Z]$ に等しいことを使う．X, Y が正規直交なら，X, Y の張る平面の断面曲率は

$$\langle X, R(X,Y)Y\rangle = \langle X, -[[X,Y],Y]\rangle = \langle [X,Y],[X,Y]\rangle = \|[X,Y]\|^2$$

である．単位ベクトル $H \in \mathfrak{a}$ および $X \in \mathfrak{m}(\alpha)$ に対し，断面曲率 $\|[H,X]\|^2 = \|\alpha(H)Y\|^2 = \alpha(H)^2$．$\|\alpha\|H = \alpha$ のときこれは $\alpha(H)^2 = \langle\alpha, H\rangle^2 = \|\alpha\|^2$．$\alpha$ が最長の根なら $\|\alpha\|^2$ が M 上の断面曲率の最大値である．他方 $X, Y \in \mathfrak{a}$ なら $[X,Y] = 0$ だから，階数 $r(M) > 1$ なら，断面曲率の最小値は 0 である．

$\alpha, 2\alpha$ が根の場合，上からすぐわかるように，断面曲率の最大値は最小値の 4 倍である．そこで「では，コンパクト 1 -連結のリーマン多様体の断面曲率の最大値が最小値の 4 倍より小さいなら，M は S^n だろうか？」という問題を提起した人，その問題に飛びついた人々もいた．(ここでは「S^n だろうか」は「S^n と等長的か」とは違うが，「S^n と同相的か？」と「S^n と C^∞ 同相的か？」とは異る問題だが，そういう細部にこだわらない．) このピンチング (pinching) 問題は前世紀後半にほぼ解決した．

最長の根 α に戻る．$\mathbb{R}\alpha + \mathfrak{m}(\alpha)$ は球 $S^{m(\alpha)+1} \subset M$ の接空間であるか M 自身が $\mathbb{R}^{m(\alpha)+1}$ である．([H])．これは [H] の中の Helgason 自身の最大の定理である．一般には $[\mathfrak{m}(\alpha), \mathfrak{m}(\beta)] \subset \mathfrak{k}(\alpha+\beta) + \mathfrak{k}(\alpha-\beta)$ である ([H]) が，今は 2α が根でないので，$[\mathfrak{m}(\alpha), \mathfrak{m}(\alpha)] \subset \mathfrak{k}(0)$ である．反対に $\mathfrak{k}(0)$ は $\mathfrak{m}(\alpha)$ に $\mathcal{L}O(m(\alpha))$ として作用する ([NT5])．$\mathfrak{k}(0) + \mathfrak{k}(\alpha)$ は $\mathbb{R}\alpha + \mathfrak{m}(\alpha)$ に $\mathcal{L}O(m(\alpha)+1)$ として作用する．部分空間 $S^{m(\alpha)+1}$ を Helgason 球 (略して H 球) と呼ぼう．

具体的な例を説明するのに必要だから，個別的対称空間の記号を導入する．ほぼ Cartan および [H] のと同じ記号である．

$AI(n) = SU(n)/SO(n)$, $UI(n) = U(n)/O(n)$, $AII(n) = SU(2n)/Sp(n)$, $UII(n) = U(2n)/Sp(n)$, $CI(n) = Sp(n)/U(n)$, $DIII(n) = SO(2n)/U(n)$, 例外型の単連結コンパクト単純群 E_6, E_7, E_8, F_4, G_2 (下付きの数は階数) が自己同型群として作用する単純空間は，$EI = E_6/Sp(4)^{\%}$, $EII = E_6/Sp(1)\cdot SU(6)$, $EIII = E_6/T\cdot SO(10)^{\sim}$, $EIV = E_6/F_4$, $EV = E_7/SU(8)/\mathbb{Z}_2$, $EVI = E_7/Sp(1)\cdot SO(12)^{\sim}$, $EVII = E_7/T\cdot E_6$, $EVIII = E_8/SO(16)^{\sharp}$, $EIX = E_8/Sp(1)\cdot E_7$, $FI = F_4/Sp(1)\cdot Sp(3)$, $FII = F_4/SO(9)^{\sim}$, $GI = G_2/SO(4)$.

上に使ったドット (dot) 積 $M \cdot N$ を説明する．これは，M, N の両方に自由に (つまり単位元以外はどの点も固定しない) 作用する自己同型のある巡回群 $\mathbb{Z}_k$ (上の例では群 M, N の中心の部分群) の各元 c を $M \times N$ に $c: (x,y) \mapsto (cx, cy)$ と作用させた時の軌道空間 $\dfrac{M \times N}{\mathbb{Z}_k}$ である．$\mathbb{Z}_k$ の定義があいまいに見えるが，実際には $k = 2$ か 3 がほとんどである．($U(n) = U(1)\cdot SU(n)$ は珍しい例外．) また T は 1 次元トーラス群 $U(1) \cong SO(2)$．$SO(16)^{\sharp}$ は半スピン群．

単純根系 $A_r, B_r, BC_r, C_r, D_r, E_6, E_7, E_8, F_4, G_2$ を記述しよう (互いに相似なのは同型). 正規直交系 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots \varepsilon_r, \cdots$ を使う. コンパクト単純群を例示する.

$$A_r = R(SU(r+1)) = \{\varepsilon_j - \varepsilon_k \mid 1 \leq j \neq k \leq r+1\}$$

$$D_r = R(O(2r)) = \{\pm\varepsilon_j \pm \varepsilon_k \mid 1 \leq j \neq k \leq r\} \quad (r \geq 2)$$

ただし D_2 は単純でない.

$$B_r = R(O(2r+1)) = D_r \cup \{\pm\varepsilon_j \mid 1 \leq j \leq r\} \quad (r \geq 2)$$

$$C_r = R(Sp(r)) = D_r \cup \{\pm 2\varepsilon_j \mid 1 \leq j \leq r\} \quad (r \geq 2)$$

$$BC_r = B_r \cup C_r \quad (r \geq 2), \quad BC_1 = \{\pm\varepsilon_1, \pm 2\varepsilon_1\}$$

また $A_r = \{\alpha \in D_{r+1} \mid$ 内積 $\langle \alpha, \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_{r+1} \rangle = 0\}$. 残りの $E_6, \cdots, G_2$ は群 $E_6, \cdots, G_2$ の根系である.

$$E_8 = D_8 \cup \{\frac{1}{2}(\pm\varepsilon_1 \pm \varepsilon_2 \pm \cdots \pm \varepsilon_8) \mid \text{負の係数は偶数個}\}$$

$$E_7 = \{\alpha \in E_8 \mid \langle \alpha, \varepsilon_7 + \varepsilon_8 \rangle = 0\}$$

$$E_6 = \{\beta \in E_7 \mid \langle \beta, 2\varepsilon_6 - \varepsilon_7 + \varepsilon_8 \rangle = 0\}$$

$$F_4 = B_4 \cup \{\frac{1}{2}(\pm\varepsilon_1 \pm \varepsilon_2 \pm \varepsilon_3 \pm \varepsilon_4)\}$$

$$G_2 = A_2 \cup \{\pm(2\varepsilon_i - \varepsilon_j - \varepsilon_k) \mid \{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}\}$$

$R(M)$ の生成する整数環 $\mathbb{Z}$ 上の加群の基底として, $R(M)$ の元から成る基底 $(\alpha_1, \cdots, \alpha_r)$ で, すべての根 β に対し, $\beta = \sum b_j\alpha_j$ の係数 b_j がすべて整数で, しかもすべて 0 以上か 0 以下であるものが在る. $R(M)$ が根系だからである. $R(M)$ **の基底** ([B]) あるいは $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ を**単純根**とも呼ぶ.

A_r の場合は $\alpha_j = \varepsilon_j - \varepsilon_{j+1}, 1 \leq j \leq r$, D_r の場合は A_{r-1} の基底に $\varepsilon_{r-1} + \varepsilon_r$ を追加, B_r の場合は A_{r-1} の α_j に ε_r を追加, BC_r なら B_r と同じ基底, C_r なら A_{r-1} のに $2\varepsilon_r$ を追加して基底が得られる. $R(M)$ の**最大根** $\tilde{\alpha} = \sum n_j\alpha_j$, つまりすべての根 $\beta = \sum b_j\alpha_j$ に対し各 $n_j \geq b_j$ が成立する根 $\tilde{\alpha}$ がただ一つ在る.

	A_r	B_r	BC_r	C_r	D_r
$\tilde{\alpha}$	$\varepsilon_1 - \varepsilon_r$	$\varepsilon_1 + \varepsilon_2$	$2\varepsilon_1$	$2\varepsilon_1$	$\varepsilon_1 + \varepsilon_2$

係数 n_j は, A_r の場合, $(n_j) = (1, \cdots, 1)$, B_r なら $(1, 2, \cdots, 2)$, BC_r なら $(2, \cdots, 2)$, C_r なら $(2, \cdots, 2, 1)$, D_r なら $(1, 2, \cdots, 2, 1, 1)$.

なお $\beta = \sum b_j\alpha_j$ の係数がすべて 0 以上のとき (その基底に関し), β を**正根**と

4 重要な部分空間

4.1 極地 M^+ と中心小体

点対称を基礎にする対称空間 M では，固定点集合 $F(s_o, M)$ が重要である．M がコンパクト連結なら部分空間 $F(s_o, M)$ は o 以外の点を含む．それは o を含む極大トーラス $A \subset M$ が円 $S^1 \ni o$ を含み $F(s_o, M)$ は o の他にその極を含むからである．部分空間 $F(s_o, M)$ の連結成分を M 中 o の**極地**と呼び，$M^+ = M^+(p) = M^+(p; o)$ などと記す，p は M^+ の点．(([CN1]，[N1]．)

補足．$\{o\}$ は M^+ の重複度 $= \dim M^+$ の焦点である．このような焦点が別にあれば o の極である．

原点 o は極地であり，o の極 $p, s_o = s_p$, があれば $\{p\}$ も極地である．M が射影空間なら点 o に双対的な超平面は o の極地である．[H] には２例がある．一つは $r(M) = 1$ の場合 (射影空間か球) の中で o から最遠の点全体 (antipodal set)，他の例は反対に o に最も近い点の全体 (midpoint locus) である．極しか極地のない空間はいくつかの球の直積である．M が群の場合には，1_M の各 $M^+ \neq \{o\}$ は M の位数２の元の共役類である．$M = U(n)$ なら M^+ はグラスマン空間 $G_p(\mathbb{C}^n), 0 \leq p \leq n$, である．しかし，$M = SU(n)$ なら p は偶数である．$M = Sp(n)$ でも $M^+ = G_p(\mathbb{H}^n), 0 \leq p \leq n$, $O(n)$ (非連結) なら $G_p(\mathbb{R}^n), 0 \leq p \leq n$, だが $SO(n)$ なら，$G_p(\mathbb{R}^n), 0 \leq p \leq n$ で p は偶数．

極地と M の位相との関係の例をあげよう．M の向き付け可能性と各 M^+ の次元が偶数であることと同等である．また極地の Euler 数の総和は s_o の Lefschetz 数 $=:$ Lef(s_o) に等しい (Atiyah-Singer の一般化した Lefschetz 不動点定理)．s_o が 1_M とイソトープなら Lef(s_o) は Euler 数 χM に等しい．M が群なら Lef$(s_o) = 2^{r(M)}$ ($r(M)$ は階数)．χM は 0 以上であるが，0 より大きくなるのは，周知のように，次のそれぞれの条件と同等である．(1) $r(G) = r(K)$ ただし $M = G/K$．(2) s_o は 1_M とイソトープ．(3) s_o は連結成分 $G_{(1)}$ の元 (つまり s_o は inner)．signature(トポロジーの指数) についてもほぼ同様の加法公式が成立 (M^+ の向きが問題になるが．[NT4])

準同型 $f : M \to N$ は極地 $M^+(p; o)$ を極地 $N^+(f(p); f(o))$ の中に移す．

f が被覆準同型なら像 $f(M^+(p; o))$ は $N^+(f(p); f(o))$ に一致するが，被覆度が偶数のとき $N^+(q; f(o))$ は M の極地の像とは限らない．f が２重被覆写像のとき，o のある極 p は o と同じ点に行く，$f(o) = f(p)$．o, p を結ぶ測地弧の中点の全体 $C(o, p)$ を**中心体**と呼び，その連結成分を極の対 (o, p) に対する**中心小体**と呼ぼう．中心体も中心小体も部分空間である．実際，中心小体は f で極地に移る．心小体の像を合わせると，N のすべての極地が得られる．$f : S^n \to \mathbb{R}P^n$ の場合，S^n の「赤道」が中心小体である．これが $\mathbb{R}P^n$ の極地に落ちる．

次の二つの写像列は，(o,p) に対する M の中心体 C からの埋め込み準同型 $f:C\to M$ でできている．

(1) $U(n)\to G_n(\mathbb{C}^{2n})\to U(2n)\to\cdots$.

(2) $SO(n)\to G_n(\mathbb{R}^{2n})\to UI(2n)\to CI(2n)\to Sp(2n)\to G_{2n}(\mathbb{H}^{4n})\to UII(4n)$
$\to DIII(8n)\to SO(16n)\to\cdots$.

一種の周期性は明白であろう．中心小体 C の中の位相的球 S^k の各点 m に対し m が中点である o から p への測地弧を採れば M 中の位相的球 S^{k+1} が出来る．それでホモトピー群の準同型 $\pi_k(C)\to\pi_{k+1}(M)$ が出来る．k が n に比べて十分小さいとき，これは同型である (Bott)．だから各空間の n を無限大にする帰納極限では，同型 $\pi_k(C)\cong\pi_{k+1}(M)$ したがって (2) では $\pi_{k+8}(M)\cong\pi_k(M)$，(1) では $\pi_{k+2}(M)\cong\pi_k(M)$ が成立する (Bott の周期性定理)．

１０個の極限空間が無限次元の対称空間であることは明白な感じだろう．(公理 1 は，CW 複体とホモトピー同型な空間の圏の部分圏に変更すればよい．) その後の微分幾何の無限次元対称空間の例は異っている．

極地 M^+ に話を戻そう．

命題 4.1 ([CN1]) 連結コンパクト空間 $M=G/K$ の点 $o=K(o)$ の極地 $M^+(p)$ は p を通る K の軌道 $K(p)=\{a(p)|a\in K\}$ である．

証明．$M^+(p)$ は $F(s_o,M)$ の連結成分だから，K の連結成分 $K_{(1)}$ の軌道 $K_{(1)}(p)$ は $M^+(p)$ に含まれる．実際，$b\in K_{(1)}$ なら $b(p)=b\circ s_o(p)=s_{b(o)}\circ b(p)=s_o(b(p))$．さらに接ベクトル $X\in T_pM^+$ も s_o は固定するから，X は $\mathfrak{k}=\mathcal{L}K$ の元の p での値である．したがって $K_{(1)}(p)$ は $M^+(p)$ に一致する．最後に各 $a\in K$ に対し $a(p)\in M^+(p)$ を示そう．そのために先ず o と p とを含む極大トーラス A を見る．$a(A)$ も o を通る極大トーラスなので，$K_{(1)}$ のある元 b で A に移る，つまり $ba(A)=A$．だから $ba(p)=p$ と見てよい，A と $M^+(p)$ との交点は p だけと限らないが．

Cartan の定理のうちでは小さいものに，$SO(n)$ の任意の元は $\mathbb{R}^n$ の鏡映のいくつか (n か) 以内の積だというのがある．鏡映の作用は単位球 $S^{n-1}\subset\mathbb{R}^n$ への作用に忠実に反映される．それを射影空間 $\mathbb{R}P^{n-1}=S^{n-1}/\{\pm1\}$ に落せば点対称である．$\mathbb{R}P^n$ の自己同型が最大何個の点対称の積であるかを見るのは n に関する帰納法で容易に可能である．$\mathbb{R}P^n$ の極地 $\neq\{o\}$ は $\mathbb{R}P^{n-1}$ だからである．M の性質を調べるのに極地 M^+ との関係を媒介に「帰納法」が使えることが多いのは想像できよう．

命題 4.2 K が連結なら，$M=G/K$ の極地 $M^+(p)$ のオイラー数 $\chi M^+(p)>0$.

証明．$Q(p) = s_p \circ s_o$ は K の元で，$M^+(p) = K/F(\mathrm{ad}(Q(p)), K)$．だから，$\chi M^+(p) > 0$.

$\mathbb{H}$-ケーラー対称空間(コンパクト)の分類はコンパクト単連結な単純群の原点に最も近い極地を採ればよい．これは最晩年の Lichnerowicz が「$\mathbb{H}$-ケーラー対称空間の幾何的分類法」を求めた問題に答えているだろうか．

4.2 子午空間 $M^-(p)$

重要な部分空間である極地 M^+ の各点 p に，別の部分空間 $M^-(p)$ を次のように選ぶ．$M^-(p)$ も p を含み，p での接空間 $T_pM^-(p)$ は T_pM の中で T_pM^+ の直交補空間である．その存在は自然に判る．M の原点 o と p とを通る極大トーラス A の中で p は o の極である．だから T_pA は T_pM^+ に直交する．言い替えると，A は $Q(p) = s_p \circ s_o$ の固定点集合 $F(Q(p), M)$ に含まれる．この固定点集合の p を含む連結成分が $M^-(p)$ である．特に，**子午空間** $M^-(p)$ の階数 $r(M^-(p)) = r(M)$.

例．$M = G/K$ が射影空間の場合．$M = \mathbb{R}P^n, \mathbb{C}P^n, \mathbb{H}P^n$ ($\mathbb{H}$ は四元数環) か FII. 極地 $M^+ \neq \{o\}$ は超平面，子午空間は直線 (つまり部分空間 S^1, S^2, S^4 か S^8．すべて H 球)．FII は射影平面で極地も S^8 である．階数 $r(M) = 1$ であるから，o を通る測地線は M の極大トーラスで，$K_{(1)}$ の元で互いに移れる．だから o を通る測地線は o と M^+ の点 p とを結ぶ最短測地弧を含む円 S^1 である．S^1 中 p は o の極．この S^1 は $M^-(p)$ 中の極大トーラスである．$M^+(p)$ は M 中 o の最小跡 (cut locus) でもある．だから，S^1 の点 $x \neq o, p$ を通る K-軌道 $K(x) = \{kx | k \in K\}$ は余次元 $= 1$ の球 S^{pn-1} ($\neq$ 部分空間)($p = 1, 2, 4$ か 8) である．射影空間 M の根系 $R(M)$ は，$\mathbb{R}P^n$ を除き，BC_1 である．逆に $R(M) = BC_1$ なら M は上記の射影空間に限る．上のように K-軌道は球 S^{pn-1} と同相である．さらに S^{pn-1} は M^+ 上のファイバー束でファイバーも球 S^{p-1} である．トポロジーの Adams の定理「ファイバー束 $S^{p-1} \to S^{2p-1} \to S^p$ が在れば，p は 1,2,4 か 8 に限る」を基礎に「帰納法」で射影空間に限ることが証明できる．ついでながら，$M^-(p)$ は BC_1 型 M の H 球である．

次に単純空間 $M = G/K$ の子午空間 M^- の構造を調べよう．M^- の決定 (分類) がその結果できる．

Cartan 分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{m}$ の $\mathfrak{k}, \mathfrak{m}$ を $\mathrm{ad}(Q(p))$ の固有空間に分解する．

$$\mathfrak{k} = \mathfrak{k}_+ + \mathfrak{k}_-, \qquad \mathfrak{m} = \mathfrak{m}_+ + \mathfrak{m}_-.$$

$\mathfrak{k}_+ + \mathfrak{m}_- = F(\mathrm{ad}(Q(p)), \mathfrak{g})$ である．$\mathfrak{m}_-$ は $M^-(p)$ の o での接空間に対応する．$\mathfrak{a}$ を $\mathfrak{m}_-$ 中に採る．$H \in \mathfrak{a}$ の定める測地線 $c(t) := e^{tH}(o)$ が o, p 間の最短測地弧 $c([0, \pi])$ を含むように，H を選ぶ．$c(\pi) = p$ で $c(2\pi) = o$. 根系 $R(M)$ の基底 $(\alpha_1, \cdots \alpha_r)$ を各 $\alpha_j(H) \geq 0$ となるよう採れる．根 α に対する根空間 $\mathfrak{k}(\alpha) \subset \mathfrak{k}$ の

任意の元 $Y \neq 0$ のベクトル場としての値 $Y(c(t))$ を c の水平リフトで $\mathfrak{m}$ に移したものを $Y(t)$ と記す.

$$Y(t) = \sin(t\alpha(H))X,$$

ここで, $[H, X] = \alpha(H)X \in \mathfrak{m}$, $\alpha(H) = 0$ なら $Y(t)$ は恒等的に 0 だから, $\alpha(H) > 0$ と仮定しよう. $c([0,\pi])$ が最短弧なので, 途中 $c((0,\pi))$ に o の共役点がないから,

$$0 < \alpha(H) \leq 1$$

である. 他方 $c(2\pi) = o$ だから, $2\pi\alpha(H)$ は π の整数倍である. つまり

$$2\alpha(H) \in \mathbb{Z}_+ \qquad \text{(正の整数)}.$$

したがって,

$$\alpha(H) > 0 \text{ なら, } 2\alpha(H) = 1 \text{ または } 2.$$

$2\alpha(H) = 0$ か 2 なら $\mathfrak{k}(\alpha) \subset \mathfrak{k}_+$ で $\mathfrak{m}(\alpha) \subset \mathfrak{m}_-$ である. $2\alpha(H) = 1$ なら $\mathfrak{k}(\alpha) \subset \mathfrak{k}_-$ で $\mathfrak{m}(\alpha) \subset \mathfrak{m}_+$ である.

次に $\mathfrak{a}$ の基底 $(H_1, \cdots, H_r)$ を条件 $\alpha_j(H_k) = \delta_{jk}$ で定め, $H = \sum h_j H_j$ の成分を h_j と記す. また最大根 $\tilde{\alpha} = \sum n_j \alpha_j$ の成分を n_j と記す. 各 n_j は正の整数. 上により

$$2h_j = 0,\ 1 \text{ または } 2.$$

$$2\sum n_j h_j = 1 \text{ または } 2.$$

$h_j > 0$ なら, $2h_j = 1$ か 2 である. $2h_j = 1$ なら $n_j = 1$ か 2. この場合, $n_j = 2$ なら他の $n_k = 0$. $2h_j = 2$ なら, $n_j = 1$ で他の $h_k = 0$.

ここで M から $M^{\%}$ へ移行する. すると $H = H_j, n_j = 1$ か 2, と簡単になる. M^- は $M^{\%}$ 中の子午空間 $(M^{\%})^-$ の被覆空間である.
補足. その理由は省略するが, 例で説明しよう. $M = SO(2r), r > 3$ の場合, $H = H_{r-1} + H_r$ で決まる M^- は $M^+ \cong G_{2r-2}(\mathbb{R}^{2r})$ に対応する. $H = \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_{r-1}$ である. つまり, $M^- = M^-(I_{2r-2})$, 記号 I_{2r-2} は対角行列で対角元の最初の $2r-2$ 個が -1 で最後の 2 個が 1. $SO(2r)^{\%} = SO(2r)/\{\pm 1_{2r}\}$ に落とすと, $M^-(I_{2r-2})$ は $M^-(I_2)$ と同じ像に重なる. $M^+(I_2) \cong G_2(\mathbb{R}^{2r}) \cong G_{2r-2}(\mathbb{R}^{2r})$ である. $M^+(I_2)$ の方は $H = H_1 = \varepsilon_1$ であって, $SO(2r)^{\%}$ に落したとき, この H の方が $H_{r-1} + H_r$ より短い極地への測地弧を与える.

注意. ここでの議論は Lie 環だけを見ているわけではない. 与えられた H に対し, $c(\pi)$ が実際に極地の点か原点 o かは群 G あるいは M を見る必要がある. $M = SO(2r)$ の例では, $H = H_r$ で $c(\pi)$ は極 -1_{2r} であり, $M^{\%}$ では $c(\pi) = o$ である. $M^{\%}$ に落して考察するのはその混同を避けるためでもある.

次の結論が出る.

定理 4.3 連結コンパクト単純空間 $M = M^{\%}$ の中で，
(i) 各子午空間 M^- に，$n_j = 1$ または 2 の H_j が対応する．逆に，このような H_j に子午空間 M^- が対応する．
(ii) M^- の根系 $R(M^-)$ は $R(M)$ の部分集合であり，重複度 : $R(M^-) \to \mathbb{Z}_+$ は M の方の重複度 $m : R(M) \to \mathbb{Z}_+$ の制限である．
(iii) $\mathfrak{m}_- = \mathfrak{a} + \sum \mathfrak{m}(\alpha)$，$\mathfrak{k}_+ = \mathfrak{k}(0) + \sum \mathfrak{k}(\alpha)$，どちらも和は $\alpha \in R(M^-)$ について行う．
(iv) $\mathfrak{k}_+ + \mathfrak{m}_-$ の作用は効果的でなく $\mathfrak{k}(0)$ のイデアル $\neq \{0\}$ が $\mathfrak{m}_-$ に自明に (0 として) 働くことがある．
(v) $n_j = 1$ の場合，$R(M)$ の基底 $(\alpha_1, \cdots, \alpha_r)$ から α_j を除いたものが $R(M^-)$ の基底であり，M^- はそれの定める空間と H_j の定める円 S^1 との (ドット) 積である．
(vi) $n_j = 2$ の場合，$(\alpha_1, \cdots, \alpha_r)$ から α_j を除き，$-\tilde{\alpha}$ を追加したものが $R(M^-)$ の基底となる．
(vii) 対応する M^+ の *Cartan* 分解 $\mathfrak{k}_+ + \mathfrak{k}_- \cong \mathfrak{k}_+ + \mathfrak{m}_+$ について，$\mathfrak{k}_- = \sum \mathfrak{k}(\lambda), \mathfrak{m}_+ = \sum \mathfrak{m}(\lambda)$，どちらも和は $\lambda \in R(M) \backslash R(M^-)$ について行う．$\mathfrak{k}(0)$ のイデアル $\neq \{0\}$ が $\mathfrak{k}_-, \mathfrak{m}_+$ に自明に働くことがある．

補足．M が単純でない場合には別の考慮が必要になる．M が球面 S^m, S^n のドット積 $S^m \cdot S^n$ だとしよう．これは球の点 x をその極 $-x$ に移す自己同型の群 $\mathbb{Z}_2$ が S^m, S^n 共に働いているので，$S^m \times S^n$ に $(x, y) \mapsto (-x, -y)$ として働く自己同型の生成する群 $\mathbb{Z}_2$ による商空間 $(S^m \times S^n)/\mathbb{Z}_2 = S^m \times_{\mathbb{Z}_2} S^n$ である．(つまり点 (x, y) を $(-x, -y)$ と同一視したもの．) $S^m \times S^n$ の原点 (o, o) の像 $[o, o]$ の極地は極 $[-o, o]$ と中心小体 S^{m-1}, S^{n-1} の積の像 $[S^{m-1} \times S^{n-1}] = S^{m-1} \cdot S^{n-1}$ と原点 $[o, o]$ である．どん底空間は $\mathbb{R}P^m \times \mathbb{R}P^n$ で，被覆空間には $\mathbb{R}P^m \times S^n$ と $S^m \times \mathbb{R}P^n$ がある．$m = n = 3$ の場合，$S^3 \cong SU(2) \cong Sp(1) \cong SO(3)^\sim$ (これは $Spin(3)$ と記すこともある) で $S^3 \cdot S^3 \cong SO(4)$ である．$SO(4)$ の点 1_4 の極地は極 -1_4 と $G_2(\mathbb{R}^4)$ である．普遍被覆群 $SO(4)^\sim \cong S^3 \times S^3$ の中心は $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ に同型である．

4.3 (M^+, M^-) の対から M を

単純空間 M は極地とそれに対する子午空間のただ一つの対 (M^+, M^-) から決まる．その意味でも極地と子午空間は重要な部分空間である．まず局所的に決まることを証明したい．

定理 4.4 連結なコンパクト単純対称空間 M の一つの極地 $M^+(p)$，子午空間 $M^-(p)$ から M が決まる．つまり他の空間 N の中の一つの対 $(N^+(q), N^-(q))$ と同型 $M^+(p) \cong N^+(q)$，$M^-(p) \cong N^-(q)$ ならば M は N と局所同型である．

証明. 一つの証明法はすべての M の対 (M^+, M^-) の表を見ることである．表が正しいならば，見終った時に論理的には証明が終る．しかし成立の理由を知るには別の証明が必要だろう．証明のアイデアは $M = KM^-(p) = \{ky | k \in K, y \in M^-(p)\}$ であること，つまり $M^-(p)$ を K で回せば M 全体になることを使って同型写像 $M^-(p) \to N^-(q)$ を拡張して局所同型 : $M \to N$ を作ることである．M は局所的に $\mathfrak{k} = \mathcal{L}K$ の $\mathfrak{m}$ への作用によって決まる ([H]).

定理の仮定が与える情報を復習する．Cartan 分解は $\mathrm{ad}Q(p)$ によって，$\mathfrak{k} = \mathfrak{k}_+ + \mathfrak{k}_-, \mathfrak{m} = \mathfrak{m}_+ + \mathfrak{m}_-$ と細分し，M^+ の Cartan 分解 $\mathfrak{k} = \mathfrak{k}_+ + \mathfrak{k}_- \cong \mathfrak{k}_+ + \mathfrak{m}_+$ と M^- に対する $\mathfrak{g}_- := \mathfrak{k}_+ + \mathfrak{m}_-$ とが出来る．必要な情報は $\mathfrak{k}_- \otimes \mathfrak{m}_- \to [\mathfrak{k}_-, \mathfrak{m}_-] : Y \otimes X \mapsto [Y, X]$ である．$\mathfrak{m}_-$ 中の Cartan 部分環 $\mathfrak{a}$ を定めて，根空間分解 $\mathfrak{k}_+ = \mathfrak{k}(0) + \sum \mathfrak{k}(\alpha), \mathfrak{k}_- = \sum \mathfrak{k}(\lambda), \mathfrak{m}_- = \mathfrak{a} + \sum \mathfrak{m}(\alpha), \mathfrak{m}_+ = \sum \mathfrak{m}(\lambda)$ を使うと，知りたいのは $\mathfrak{k}(\lambda) \otimes \mathfrak{m}(\alpha) \to [\mathfrak{k}(\lambda), \mathfrak{m}(\alpha)]$ である．$\mathfrak{a}$ の元 H を $\lambda(H) = \alpha(H) \neq 0$ を満たすように選べれば，既知の同型 $\mathrm{ad}(\exp(tH)), t\alpha(H) = \pi/2$, によって $\mathfrak{k}(\lambda)$ は $\mathfrak{m}(\lambda)$ に，$\mathfrak{m}(\alpha)$ は $\mathfrak{k}(\alpha)$ に移る．$\mathfrak{k}(\alpha) \otimes \mathfrak{m}(\lambda) \to [\mathfrak{k}(\alpha), \mathfrak{m}(\lambda)]$ は $\mathfrak{k}_+$ の $\mathfrak{m}_+$ への作用で与えられた情報に属する．$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{m}$ の構造の決定には $\mathfrak{k}_- \otimes \mathfrak{m}_+ \to [\mathfrak{k}_-, \mathfrak{m}_+]$ と $\mathfrak{m}_- \otimes \mathfrak{m}_+ \to [\mathfrak{m}_-, \mathfrak{m}_+]$ が残っているが，たとえば $Y \otimes X \in \mathfrak{k}_- \otimes \mathfrak{m}_+$ のとき，$[Y, X] \in [\mathfrak{k}_-, \mathfrak{m}_+] \subset \mathfrak{m}_-$ だから $\mathfrak{m}_-$ の任意の元 Z との内積 $\langle [Y, X], Z \rangle$ が判ればよい．

ところで内積の不変性により，$\langle [Y, X], Z \rangle = -\langle X, [Y, Z] \rangle$ で $[Y, Z]$ は上の $\mathfrak{k}_- \otimes \mathfrak{m}_- \to [\mathfrak{k}_-, \mathfrak{m}_-]$ の決定で分っているので終る．そこで上の便利な H が無いのは，$\lambda = \pm 2\alpha$ または $2\lambda = \pm\alpha$ の場合である．これは前に (§3.2 の最初の例で) 説明した射影空間 (根系は BC_1) の場合である．

□

グローバルな同型を結論するには，上の定理の仮定では不十分で，リーマン計量を考慮しなければならない．例えば，$M = SU(3)$ に $(M^+, M^-) = (G_2(\mathbb{C}^3), T \cdot SU(2))$ があるが，$M^\% = SU(3)/\mathbb{Z}_3$ でもこれと ($\mathcal{C}_S$ の中では) 同型である．$M, M^\%$ のリーマン計量を考慮すると，$T \cong S^1$ の長さが $M^\%$ では $1/3$ になるのである．($SU(2)$ はＨ球で，M が局所同型類の中で動いても変らない．) $T \cdot SU(2)$ の T と $SU(2)$ の大きさの関係が異る．M の部分空間には M の計量を誘導したものに決める必要がある．

リーマン計量の関与の重要性はほかにも現れる (次章の R 空間でも) が，ここでは極大トーラス $A \subset M$ を見よう．基本群 $\pi_1(M)$ の元を構成する閉曲線のうちで長さが最小のものは測地円 (か点) である．したがって，うめこみ : $A \to M$ から自然に生ずる準同型 : $\pi_1 A \to \pi_1 M$ は全射である．$\pi_1 M$ が可換群だという結論もでる．この核が判れば $\pi_1 M$ も判るが，その核には形がある．M が単連結なら核の形は $R(M)$ の基底 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ の形 (相互の長さの比，相互の角度) で決まる．トーラス A は対称空間としては円の直積で互いに同型だが計量を考慮すると多様である．M が単純なら M の不変リーマン計量は定数倍を除き一つしかないが，その

計量の極大トーラスへの制限は $\pi_1 M$ によって異る形を与える.

定義.

1. リーマン対称空間の圏 $\mathcal{C}_{RS}$ は対称空間圏 $\mathcal{C}_S$ の部分圏である.
2. $\mathcal{C}_{RS}$ の各空間には自己同型群で不変なリーマン計量が定まっている.
3. $\mathcal{C}_{RS}$ 中の準同型 $f: M \to N$ は定数倍を除き等長的である.
(単射なら N の計量 g_N のひき戻し f^*g_N が g_M の定数倍で, 全射ならリーマン沈めこみである, つまり各点 p での接空間 T_pM 中 $df|T_pM$ の核の直交補空間への f^*g_N の制限が定数倍を除き g_M の制限に等しい.)

定理 4.5 $\mathcal{C}_{RS}$ 内で連結コンパクト単純空間 M の極地 $M^+(p)$, 子午空間 $M^-(p)$ から M が決まる. つまり M 中の一つの対 $(M^+(p), M^-(p))$ から連結空間 N 中の対 $(N^+(q), N^-(q))$ への (等長的) 同型 $f^+ : M^+(p) \to N^+(q), f^- : M^-(p) \to N^-(q)$ があれば, M は N と同型である.

証明. 前の定理から, M, N は局所同型である. 子午空間によって M (の局所同型類中の位置) が決まる.

□

課題. M 中の極地 $M^+(p)$, 子午空間 $M^-(p)$ から N 中の $N^+(q), N^-(q)$ への準同型 $f^+ : M^+(p) \to N^+(q), f^- : M^-(p) \to N^-(q)$ が存在するとき, どんな仮定を追加すれば, f^+, f^- を準同型 $f: M \to N$ に延長できるだろうか.

5 対称R空間

5.1 その生い立ち

１９５０年代にはリーマン多様体の (等長変換群を含む) 共形変換群や射影変換群を研究していた. 平行して独立に田中 昇も研究していた. 二人の結果を合わせるとコンパクト対称空間 M でそれらの群が $G = \mathrm{Aut}(M)$ より実際に大きいのが S^n と $\mathbb{R}P^n$ とに限ることなどが分かった. M の $G := \mathrm{Aut}(M)$ 含む大きな変換群 L ($\dim L > \dim G$) が存在しないだろうかと考えた. 田中も考えていて作った諸例の話をしてくれた. L が保つ M の幾何構造は何だろうと長年気にした. 最近 Gindikin・金行が一つのよい解釈を示した.

補足. リーマン球 $S^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ からの正則関数 f は等角 (conformal) 写像である. $f = u + iv$ の正則性を示すコーシー・リーマン微分方程式 $\partial_x u = \partial_y v, \partial_y u = -\partial_x v$ を見ると, 各点 p での df が, $\sqrt{-1}$ 倍を表す行列 J と可換, つまり df_p は直交行列 $\in SO(2)$ の正のスカラー倍であることを示している. 等角写像は向きを保つ共

形 (conformal) 写像である．等角写像 $f: S^2 \to S^2$ が微分同相であれば，f は 1 次分数変換 $f(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$ である．行列式 $\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=1$ としてよい．S^2 の等角写像全体は Lie 群 $SL(\mathbb{C}^2)/\{\pm 1\}$ と同型である．これは共形変換群の連結成分で，$\mathrm{Aut}(S^2)$ の連結成分 $SU(2)/\{\pm 1\} \cong SO(3)$ はその極大コンパクト部分群である．

学位論文の計画を立てようとしていた竹内 勝に大きな L のある M を調べたらどうかと提案した．その頃は駒場の教養学部に勤務していたこともあり，その後彼には助言など全くしなかったが，立派な学位論文 [T1] を完成した．ただその題名に長野空間とあったので，それは消してもらうことにした．後のロシアの論文に「長野空間とも言う」とあったが，竹内は Tits の理論の中の用語を流用して対称 R 空間と後に名付けた．

5.2 L と M との関係 ([N1])

M が単純なら，L も単純である．L は M に対し一つしかない．Lie 環 $\mathfrak{l} := \mathcal{L}L$ は $\mathfrak{l} = \mathfrak{l}_{-1} + \mathfrak{l}_0 + \mathfrak{l}_1, [\mathfrak{l}_j, \mathfrak{l}_k] = \mathfrak{l}_{j+k}$, と分解される (graded Lie algebra である．上の分解で $\mathfrak{l}_{j+k}=0$ なら $\mathfrak{l}_{j+k}$ は省略してある．$\mathfrak{l}_2$ はないから，$[\mathfrak{l}_1, \mathfrak{l}_1]=0$ と読める．)

次元 $\dim \mathfrak{l}_{-1} = \dim \mathfrak{l}_1 = \dim M$．$\mathfrak{l}_0$ 中に Z があって，$X \in \mathfrak{l}_j$ は $[Z, X] = jX$ と同等である．つまり $\mathfrak{l}_j$ は $\mathrm{ad}(Z)$ の固有値 j の固有空間．$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{m}$ は部分環だが，$\mathfrak{k} \subset \mathfrak{l}_0$ で $\mathfrak{l}_e = \{X + e[Z, X] | X \in \mathfrak{m}\}, e = \pm 1$ である，つまり $\mathfrak{l}_{-1} + \mathfrak{l}_1 = \mathfrak{m} + [Z, \mathfrak{m}]$.

L は余接束 T^*M のアフィン変換群である．また，$L/L_0 \cong T^*M$ が対称空間であることも見えよう．$\mathrm{ad}(s_o)$ は L にも作用する．M 上の K 不変な球関数という名の関数 f が在って $Z = \mathrm{grad} f$．この f は，面白いことに，M 上の Bott-Morse 関数でその臨界 (critical) 多様体 (微分 df の消える点の集まり) は極地 $M^+(p)$ にぴたりと一致し，p でのヘシアン $\partial\partial f$ は $T_pM^-(p)$ 上で非退化である．(だから Bott-Morse 理論を適用できる．) するとその上で正の固有値の固有空間の和と負のものの和との分解に応じ，$M^-(p)$ が局所的に部分空間の直積でないかと想像できよう．いろいろ述べたが，もっと単純なイメージを持つ方がよい．上の Z は注目に値する．特性元 (characteristic element) と Z を呼ぶ．

まず例を考えよう．M が実グラスマン多様体 $G_p(\mathbb{R}^n)$ だとしよう．これは，ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ 中の p 次元部分ベクトル空間の全体だった．点対称を $\mathbb{R}^n$ の内積を使って定義したので $SO(n)$ が $G = \mathrm{Aut}(M)_{(1)}$ として働く．しかし $\mathbb{R}^n$ の任意の線形変換は自然に $G_p(\mathbb{R}^n)$ に作用する．だから $GL(\mathbb{R}^n)$ が L として $M = G_p(\mathbb{R}^n)$ に作用する．$GL(\mathbb{R}^n)$ が行列群なので，L の構造は見易い．ベクトル $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_p\}$ の張る p 次元空間 $\mathbb{R}^p$ を M の点 o として，o を固定する L の元全体がどんな行列全体か直ぐ判る．その中で $\{\varepsilon_{p+1}, \cdots, \varepsilon_n\}$ の張る補空間も保つ部分群 L_0 も判る．

固定部分群の中で $\mathbb{R}^p$ 中の各ベクトルを固定し，補空間中の各 ε_j を $\varepsilon_j + \sum_{k \le p} a_{jk}\varepsilon_k$ の形のベクトルに移す変換全体 L_1 も部分群である．その Lie 環 $\mathfrak{l}_1$ の元は各 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p$

を 0 に移し，各 $\varepsilon_{p+1},\cdots,\varepsilon_n$ を $\mathbb{R}^p$ 中に移す変換全体である．L_1 の次元は $p(n-p) = \dim M$ である．反対に各 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_p$ を $\{\varepsilon_{p+1},\cdots,\varepsilon_n\}$ が張る補空間に移し，各 $\varepsilon_{p+1},\cdots,\varepsilon_n$ を 0 に移す行列全体が $\mathfrak{l}_{-1}$ である．これで $\mathfrak{l} = \mathfrak{l}_{-1} + \mathfrak{l}_0 + \mathfrak{l}_1$ のすべての部分環 $\mathfrak{l}_{-1}, \mathfrak{l}_0, \mathfrak{l}_1$ が出来た．特性元 Z を求めるのも難しくない．対角行列で $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_p$ を固定し $\varepsilon_{p+1},\cdots,\varepsilon_n$ を 0 に移すものが Z である．

5.3 対称R空間の定義と特性

そこで次に M は複素グラスマン多様体 $G_p(\mathbb{C}^n)$ だとしよう．これは定義に使うベクトル空間を $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{C}^n$ に変更するだけなので，$\mathfrak{l}_{-1}, \mathfrak{l}_0, \mathfrak{l}_1$ も上の行列の成分を複素数にしてしまえば出来る．Z は同じ行列でよい．しかし $G_p(\mathbb{C}^n)$ はケーラー (Kaehlerian)([KN], [S]) 対称空間である．というのは，第一に $G_p(\mathbb{C}^n)$ は複素多様体で座標変換は複素解析的である．$o \in G_p(\mathbb{C}^n)$ での複素座標は，$\mathfrak{l}_{-1}$ の元 X に対する点 $e^X(o) = (1_n + X)(o)$ の座標を X (の成分，定数 0 でないもの) にすればよい．$GL(\mathbb{C}^n)$ の作用は複素行列の積だから，複素解析的．第二にリーマン多様体．第三に複素構造という名のテンソル場 $I : TM \to TM : X \mapsto \sqrt{-1}X$ が条件 $\nabla I = 0$ を満たすことである．$M = G_p(\mathbb{C}^n)$ の場合には，$I = \sqrt{-1}Z \in \mathfrak{k} \subset \mathfrak{g}$ とおけばよい．より正確には，上の行列表示での $\sqrt{-1}Z$ が $\mathfrak{k}$ の元であり，その $\mathfrak{m}$ への作用が原点 o での I の値に等しい．

$\sqrt{-1}Z$ は $\mathfrak{k}$ の中心を張る (中心は 1 次元)．これは単純ケーラー空間 $M = G/K$ の重要な性質である (K の中心は 1 次元)．そのほかに単連結でもある ([H])．単純ケーラー G/K の複素解析的変換群は G の複素化 G^c である ($\dim G^c = 2\dim G$)．$G_p(\mathbb{C}^n)$ の場合 $U(n)$ の複素化 $U(n)^c = GL(\mathbb{C}^n)$ が複素解析的変換群として働く．

また，$G_p(\mathbb{R}^n)$ は $G_p(\mathbb{C}^n)$ の部分空間であるが各点 x での接空間 $T_xG_p(\mathbb{R}^n) \subset T_xG_p(\mathbb{C}^n)$ に $G_p(\mathbb{C}^n)$ の複素構造 $I = \sqrt{-1}\ 1$ を作用させると，$I(T_xG_p(\mathbb{R}^n))$ は $T_xG_p(\mathbb{C}^n)$ 中 $T_xG_p(\mathbb{R}^n)$ の直交補空間になる．一般にこのような多様体はケーラー多様体の最高次元の**全実的** (totally real) または**ラグランジュ** (Lagrangian) 部分多様体と呼ぶ．

コンパクト空間 $M = G/K$ が単純か単純空間と S^1 とのドット積であるとき，大きな群 L が作用するなら，M と局所同型なある空間 M_R は単純ケーラー対称空間 M^c の最高次元の全実的部分多様体であり，L は M^c の複素解析的変換群の部分群，M_R を保つ複素解析的変換の全体である (より正確には，連結成分 $\ni 1$ が一致する)．この空間 M_R を**対称R空間**と呼ぶ，と竹内 勝が定義した．

対称R空間は，言わば対称複素空間の「実部」である．
補足．上の場合 L は単純．

定理 5.1 圏 $\mathcal{C}_{RS}$ 内で，単純または単純空間と S^1 とのドット積である連結コンパクト空間 M が対称 R 空間であるためには，M の極大トーラス A が立方体的 (つまり A が，長さが等しく互いに直交する S^1 の直積 $S^1 \times \cdots \times S^1$) であることが

必要十分である.

補足. これは竹内 勝が発見し O. Loosが証明し用語「立方体的(cubic)」を導入した(1971). M が群なら $U(n), SO(n), Sp(n)$ である ($SU(n)$ は除く). $R(M) = BC_r$ なら M は(必ず単連結)R空間である. これは $R(M) = C_r$ の部分空間を含むから である. だから (例外型に対する) 古典型の根系の空間はR空間と局所同型で逆も成立する.

例. 単純ケーラー空間 M はR空間である. M の複素構造 I に対し $-I$ で複素構造を決めた空間 $(M, -I)$ (言わば M の複素共役空間) と M との直積 $(M, -I) \times M$ の中の対角集合は M と同型である. この M はケーラー空間 $(M, -I) \times M$ 中のラグランジュ多様体で $\mathcal{C}_{RS}$ 中定理の条件を満たしている.

補足. 単純空間 M がケーラーであるためには, 次の3条件を満たすことが必要十分である ([NT5]).
(1) M は単連結.
(2) $R(M) = C_r$または BC_r.
(3) 最長根の重複度 $= 1$. (最大根は最長根.)

5.4 対称R空間の性質

命題 5.2 M の極大トーラスが立方体的なら, 極地の総数は $r(M) + 1$ で原点からの距離はすべて異る. (距離の計算も簡単.)

定理 5.3 M が対称 R 空間であるためにはある子午空間 M^- が対称 R 空間であることが必要十分. すべての子午空間が R 空間であることとも同等である.

証明. M が M^- と極大トーラスを共有するので §3 の定理から明白. (別の証明法もあるが.)
次に竹内 勝の定理を説明しよう.

定理 5.4 ([T2]) M が対称 R 空間なら, $\mathbb{Z}_2$ 係数ホモロジー群の次元は

$$\natural_2 M = \dim\, H_*(M, \mathbb{Z}_2) = \sum \dim\, H_*(M^+(p), \mathbb{Z}_2).$$

ここで第3辺の $\sum$ はすべての極地に対し和をとる. $\natural_2 M$ は M の *2-number*で次のように定義する. 自明な対称空間 $\{1, 2, \cdots, n\}$ から M への単射準同型の在る n の最大数を M の **2-number** と呼ぶ ([CN2]).

補足. 単射準同型 $f : m \to N$ が在るためには, $\natural_2 M \leq \natural_2 N$ が必要である.
($\dim\, M \leq \dim\, N$ や $r(M) \leq r(N)$ が必要であるように.)
補足. 群 M に 2-torsion が無いためには $\natural_2 M = 2^{r(M)}$ が必要十分 (Borel-Serre).

定理 5.5 ([T3]) 対称 R 空間 M で，
(i) $r(M)=1$ なら，大きい群 L は M の H 球を H 球に移す変換の全体である．
(ii) $r(M)>1$ なら，L は算術的距離を保つ変換の全体である．
ここで算術的距離は 2 点をつなぐ H 球の鎖に必要な H 球の最小値で決まる．

この証明には田中 昇が発展させた Cartan 接続の理論を使う．(証略．)

定理 5.6 ([T4]) 対称 R 空間の点 o の最小跡は $\{o\}$ 以外の極地の上のベクトル束の和である．

参考文献

[B] N. Bourbaki, Groups et algèbres de Lie, Hermann
日本語訳『ブルバキ数学原論，リー群とリー環』(主に 3), 東京図書

[C] E. Cartan, Oeuvres Complètes, CNRS(1984)

[CN1] B. -Y. Chen and T. Nagano, Totally geodesic submanifolds of symmetric spaces, II, Duke Math. J. **45**(1978), 405-425

[CN2] B. -Y. Chen and T. Nagano, A Riemannian geometric invariant and its applications to a problem of Borel and Serre, Trans. A. M. S. **308**(1988), 273-297

[H] S. Helgason, Diferential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces, Academic Press

[KN] S. Kobayashi and K. Nomizu, Foundations of Differential Geometry, I and II, Interscience

[N1] T. Nagano, Transformation groups on compact symmetric spaces, Trans. A. M. S. **118**(1965), 428-453

[N2] T. Nagano, The involutions of compact symmetric spaces, I and II, Tokyo J. Math. **11**(1988), 57-79, **15**(1992), 39-82

[NT3] T. Nagano and M. S. Tanaka, The involutions of compact symmetric spaces, III, Tokyo J. Math. **18**(1995), 193-212

[NT4] T. Nagano and M. S. Tanaka, The involutions of compact symmetric spaces, IV, Tokyo J. Math. **22**(1999), 193-211

[NT5] T. Nagano and M. S. Tanaka, The involutions of compact symmetric spaces, V, Tokyo J. Math. **23**(2000), 403-416

[S] 酒井 隆, リーマン幾何学, 裳華房

[T1] M. Takeuchi, Cell decompositions and Morse equalities on certain symmetric spaces, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. I **12**(1965), 81-192

[T2] M. Takeuchi, Two-number of symmetric spaces, Nagoya Math. J. **115**(1989), 43-46

[T3] M. Takeuchi, Basic transformations of symmetric R-spaces, Osaka J. Math. **25**(1988), 259-297

[T4] M. Takeuchi, On conjugate loci and cut loci of compact symmetric spaces, II, Tsukuba J. Math. **3**(1979), 1-29

極地と子午空間

M	M^+	M^-	
$SU(n)/\mathbf{Z}_\mu$			
$(\mu = \text{odd})$	$G_r(\mathbb{C}^n)$	$\dfrac{T\cdot(SU(r)\times SU(n-r))}{\mathbf{Z}_\mu}$	$(0 \le r = \text{even} \le n)$
$(\mu = \text{even}, n/\mu = \text{odd})$	$G_r(\mathbb{C}^n)^{\%}$	$\dfrac{T\cdot(SU(r)\times SU(n-r))}{\mathbf{Z}_\mu}$	$(0 \le r \le n/2)$
$(\mu = \text{even}, n/\mu = \text{even})$	$G_r(\mathbb{C}^n)^{\%}$ 注 1-1)	$\dfrac{T\cdot(SU(r)\times SU(n-r))}{\mathbf{Z}_\mu}$	$(0 \le r = \text{even} \le n)$
$SO(n)$	$G_r(\mathbb{R}^n)$	$SO(r)\times SO(n-r)$	$(0 \le r = \text{even} \le n)$
$Spin(n)$	$G^o_{2r}(\mathbb{R}^n)$ 注 2)	$Spin(2r)\cdot Spin(n-2r)$	$(0 \le r = \text{even} \le n/2)$
$SO(n)^\sharp$ $(n=4m)$	$G^o_{2r}(\mathbb{R}^n)$ 注 3)	$\dfrac{Spin(2r)\cdot Spin(n-2r)}{\mathbf{Z}_2}$	$(0 \le r = \text{even} \le m)$
	$DIII(2m)^{\%}(\times 2)$ 注 4)	$U^\wedge(2m)/\mathbf{Z}_2$ 注 5-1)	
$SO(n)^{\%}$ $(n=2m)$	$G_r(\mathbb{R}^n)^{\%}$	$SO(r)\cdot SO(n-r)$	$(0 \le r = \text{even} \le m)$
	$DIII(m)^{\%}$ 注 6)	$U(m)/\mathbf{Z}_2$	
$Sp(n)$	$G_r(\mathbb{H}^n)$	$Sp(r)\times Sp(n-r)$	$(0 \le r \le n)$
$Sp(n)^{\%}$	$G_r(\mathbb{H}^n)^{\%}$	$Sp(r)\cdot Sp(n-r)$	$(0 \le r \le n/2)$
	$CI(n)^{\%}$	$U(n)/\mathbf{Z}_2$	
E_6 and $E_6^{\%}$	EII	$Sp(1)\cdot SU(6)$	
	$EIII$	$T\cdot Spin(10)$	
E_7	$EVI(\times 2)$	$Sp(1)\cdot Spin(12)$	
	a pole	M	
$E_7^{\%}$	EVI	$Sp(1)\cdot SO(12)^\sharp$	
	$EV^{\%}$	$SU(8)/\mathbf{Z}_4$	
	$EVII^{\%}$	$T\cdot E_6$	
E_8	$EVIII$	$SO(16)^\sharp$	
	EIX	$Sp(1)\cdot E_7$	
F_4	FI	$Sp(1)\cdot Sp(3)$	
	FII	$Spin(9)$	
G_2	GI	$SO(4)$	

注 1-1, 1-2, 1-3) $G_r(\mathbb{K}^n)^{\%}$ is replaced by 2 copies $2\times G_r(\mathbb{K}^{2r})^{\%}$ for $2r = n$, where $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ for $M = SU(n)$, $\mathbb{R}$ for $AI(n)$ and $\mathbb{H}$ for $AII(n)$.
注 2) $G^o_r(\mathbb{R}^n)$ is a single point for $r = 0$ and 2 points for $r = n$.
注 3) $G^o_{2r}(\mathbb{R}^n)$ is replaced by $G_{2n}(\mathbb{R}^n)^\sharp$ for $r = n/4$.
注 4) $M^+(\times 2)$ means 2 copies of M^+.

M	M^+	M^-	
$AI(n)/\mathbb{Z}_\mu$			
$(\mu = \text{odd})$	$G_r(\mathbb{R}^n)$	$\dfrac{T\cdot(AI(r)\times AI(n-r))}{\mathbb{Z}_\mu}$	$(0 \leq r = \text{even} \leq n)$
$(\mu = \text{even}, n/\mu = \text{odd})$	$G_r(\mathbb{R}^n)^{\%}$	$\dfrac{T\cdot(AI(r)\times AI(n-r))}{\mathbb{Z}_\mu}$	$(0 \leq r \leq n/2)$
$(\mu = \text{even}, n/\mu = \text{even})$	$G_r(\mathbb{R}^n)^{\%}$ 注 1-2)	$\dfrac{T\cdot(AI(r)\times AI(n-r))}{\mathbb{Z}_\mu}$	$(0 \leq r = \text{even} \leq n)$
$AII(n)/\mathbb{Z}_\mu$			
$(\mu = \text{odd})$	$G_r(\mathbb{H}^n)$	$\dfrac{T\cdot(AII(r)\times AII(n-r))}{\mathbb{Z}_\mu}$	$(0 \leq r = \text{even} \leq n)$
$(\mu = \text{even}, n/\mu = \text{odd})$	$G_r(\mathbb{H}^n)^{\%}$	$\dfrac{T\cdot(AII(r)\times AII(n-r))}{\mathbb{Z}_\mu}$	$(0 \leq r \leq n/2)$
$(\mu = \text{even}, n/\mu = \text{even})$	$G_r(\mathbb{H}^n)^{\%}$ 注 1-3)	$\dfrac{T\cdot(AII(r)\times AII(n-r))}{\mathbb{Z}_\mu}$	$(0 \leq r = \text{even} \leq n)$
$DIII(n)$	$G_r(\mathbb{C}^n)$	$DIII(r)\times DIII(n-r)$	$(0 \leq r = \text{even} \leq n)$
$DIII(n)^{\%}$ $(n = 2m)$	$G_r(\mathbb{C}^n)^{\%}$ $UII(m)/\mathbb{Z}_2$	$DIII(r)\cdot DIII(n-r)$ $UII(m)/\mathbb{Z}_2$	$(0 \leq r = \text{even} \leq m)$
$CI(n)$	$G_r(\mathbb{C}^n)$	$CI(r)\times CI(n-r)$	$(0 \leq r \leq n)$
$CI(n)^{\%}$	$G_r(\mathbb{C}^n)^{\%}$ $UI(n)/\mathbb{Z}_2$	$CI(r)\cdot CI(n-r)$ $UI(n)/\mathbb{Z}_2$	$(0 \leq r \leq n/2)$
$G_r(\mathbb{K}^n)$ 注 7)	$G_a(\mathbb{K}^r)\times G_b(\mathbb{K}^{n-r})$	$G_a(\mathbb{K}^{n-2b})\times G_b(\mathbb{K}^{2b})$	$(a+b=r)$
$G_r(\mathbb{K}^{2r})^{\%}$	$G_a(\mathbb{K}^r)\times G_b(\mathbb{K}^r)$ 注 8) $SO(r)^{\%}$ 注 9) $U(r)/\mathbb{Z}_2$ $Sp(r)^{\%}$	$G_a(\mathbb{K}^{2a})\cdot G_b(\mathbb{K}^{2b})$ $UI(r)/\mathbb{Z}_2$ $U(r)/\mathbb{Z}_2$ $UII(r)/\mathbb{Z}_2$	$(0 \leq b = r-a \leq r/2)$ $(\mathbb{K} = \mathbb{R})$ $(\mathbb{K} = \mathbb{C})$ $(\mathbb{K} = \mathbb{H})$
$G^o_r(\mathbb{R}^n)$	$G^o_a(\mathbb{R}^r)\cdot G^o_b(\mathbb{R}^{n-r})$	$G^o_a(\mathbb{R}^{n-2b})\cdot G^o_b(\mathbb{R}^{2b})$	$(0 \leq b = r-a = \text{even} \leq r)$
$G_r(\mathbb{R}^{2r})^{\sharp}$	$G^o_a(\mathbb{R}^r)\cdot G^o_b(\mathbb{R}^r)$ $G_b(\mathbb{R}^r)^{\sharp}\cdot G_b(\mathbb{R}^r)^{\sharp}$ $SO(r)^{\%}(\times 2)$	$\dfrac{G^o_a(\mathbb{R}^{2a})\cdot G^o_b(\mathbb{R}^{2b})}{\mathbb{Z}_2}$ $G_b(\mathbb{R}^r)^{\sharp}\cdot G_b(\mathbb{R}^r)^{\sharp}$ $UI^{\wedge}(r)/\mathbb{Z}_2$ 注 5-2)	$(0 \leq b = r-a = \text{even} < r/2)$ $(b = r/2 = \text{even})$

注 5-1) $U^{\wedge}(n/2)$ is the connected subgroup of $Spin(n)$ which doubly covers $U(n/2)$ in $SO(n)$.
注 5-2) $UI^{\wedge}(r)$ is the connected subspace of $G^o_r(\mathbb{R}^{2r})$ which doubly covers $UI(r)$ in $G_r(\mathbb{R}^{2r})$.
注 6) $DIII(m)^{\%}(\times 2)$ if m=n/2 is even.
注 7) $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ or $\mathbb{H}$
注 8) $G_a(\mathbb{K}^r)\times G_b(\mathbb{K}^r)$ is replaced by $G_b(\mathbb{K}^r)\cdot G_b(\mathbb{K}^r)$ for $b = r/2$.
注 9) $SO(r)^{\%}(\times 2)$ if r is even.

M	M^+	M^-
EI and $EI^{\%}$	$CI(4)^{\%}$ $G_2(\mathbb{H}^4)^{\%}$	$S^2 \cdot AI(6)$ $T \cdot G_5^o(\mathbb{R}^{10})$
EII	$G_2(\mathbb{C}^6)$ $S^2 \cdot G_3(\mathbb{C}^6)$	$G_4^o(\mathbb{R}^{10})$ $S^2 \cdot G_3(\mathbb{C}^6)$
$EIII$	$G_2^o(\mathbb{R}^{10})$ $DIII(5)$	$G_2^o(\mathbb{R}^{10})$ $S^2 \times \mathbb{C}P^5$
EIV	FII	$T \cdot S^9$
EV	$G_4(\mathbb{C}^8)^{\%}(\times 2)$ a pole	$S^2 \cdot G_6^o(\mathbb{R}^{12})$ M
$EV^{\%}$	$G_4(\mathbb{C}^8)^{\%}$ $AI(8)/\mathbb{Z}_4$ $AII(4)^{\%}$	$S^2 \cdot G_6(\mathbb{R}^{12})^{\sharp}$ $AI(8)/\mathbb{Z}_4$ $T \cdot EI$
EVI	$S^2 \cdot DIII(6)$ $G_4^o(\mathbb{R}^{12})$	$S^2 \cdot DIII(6)$ $G_4^o(\mathbb{R}^{12})$
$EVII$	$EIII(\times 2)$ a pole	$S^2 \times G_2^o(\mathbb{R}^{12})$ M
$EVII^{\%}$	$EIII$ $\dfrac{T \cdot EIV}{\mathbb{Z}_2}$	$S^2 \cdot G_2^o(\mathbb{R}^{12})$ $\dfrac{T \cdot EIV}{\mathbb{Z}_2}$
$EVIII$	$G_8(\mathbb{R}^{16})^{\sharp}$ $DIII(8)^{\%}$	$G_8(\mathbb{R}^{16})^{\sharp}$ $S^2 \cdot EV$
EIX	EVI $S^2 \cdot EVII$	$G_4^o(\mathbb{R}^{16})$ $S^2 \cdot EVII$
FI	$S^2 \cdot CI(3)$ $\mathbb{H}P^2$	$S^2 \cdot CI(3)$ $G_4^o(\mathbb{R}^9)$
FII	S^8	S^8
GI	$S^2 \cdot S^2$	$S^2 \cdot S^2$