数理解析研究所講究録 1206 巻 2001 年 83-95

G_2-Geometry of Overdetermined Systems of Second Order

山口佳三　　北海道大学大学院理学研究科

この講演では，次の E.Cartan の論文を出発点として，二階の接触幾何学について話したいと思います．

[C1] Les systèmes de Pfaff à cinq variables et les équations aux derivèes partielles du second ordre, Ann. Ec. Normale, 27 (1910), 109-192

実際、Cartan は，この論文の中で，つぎの過剰決定系（involutive system）：

$$\text{(A)} \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1}{3}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)^3, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)^2.$$

ないし、つぎの放物型方程式　：

$$\text{(B)} \qquad 9r^2 + 12t^2(rt - s^2) + 32s^3 - 36rst = 0.$$

（ここに $r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ は古典的記号法です.）のシンメトリー，すなわちこれらの二階偏微分方程式（系）を保つ無限小接触変換のなすリー環，が 14 次元例外型単純リー環 G_2 であることを見いだしています．この事実の検証を目標に，表題の内容を明らかにして行きたいと思います．

§1. 二階の接触多様体．ここでは，二階のジェット空間の幾何についておさらいをします（[Y1], [Y3]）．接触多様体の起源はつぎの接触要素（contact element）の空間 [Grassmann Bundle] にあります．M を $(m+n)$ 次元の多様体とします．$J(M,n)$ を次で定めます．

$$J(M,n) = \bigcup_{x\in M} J_x, \qquad J_x = Gr(n,T_x(M)).$$

ここに，$Gr(n,T_x(M))$ は，$T_x(M)$ の n 次元部分空間（すなわち，M の n 次元接触要素）の成すグラスマン多様体です．$J(M,n)$ には自

然に $T(J(M,n))$ の部分束 C がつぎのように定まっています：$J(M,n)$ の各点 u において，射影 $\pi : J(M,n) \to M$ の微分 $\pi_* : T_u(J(M,n)) \to T_x(M)$ を考えると $T_x(M)$ の n 次元部分空間 u は，$T_u(J(M,n))$ の余次元 m の部分空間 $C(u)$ をつぎで定めます．

$$C(u) = \pi_*^{-1}(u) \subset T_u(J(M,n)).$$

C は $J(M,n)$ 上の canonical system と呼ばれます．$J(M,n)$ の任意の点 u_0 の近傍には，つぎのような座標（inhomogeneous Grassmann coordinate）が入ります：$x_0 = \pi(u_0)$ のまわりの M の座標近傍 $U' : (z^1, \cdots, z^m, x_1, \cdots, x_n)$ を $dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \,|_{u_0} \neq 0$ なるように取ると u_0 の近傍 $U = \{u \in \pi^{-1}(U') \mid \pi(u) = x \in U' \ \ \& \ \ dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \,|_u \neq 0\}$ における座標 $(z^1, \cdots, z^m, x_1, \cdots, x_n, p_1^1, \cdots, p_n^m)$ がつぎで定まります．

$$dz^\alpha \,|_u = \sum_{i=1}^{n} p_i^\alpha(u)\ dx_i \,|_u \qquad (\alpha = 1, \cdots, m).$$

明らかに，この座標系（正準座標系とよびます）で，C は，つぎで与えられます．

$$C = \{\varpi^1 = \cdots = \varpi^m = 0\},$$

ここに，$\varpi^\alpha = dz^\alpha - \sum_{i=1}^n p_i^\alpha\, dx_i$ $(\alpha = 1, \cdots, m)$ です．

$(J(M,n),C)$ は幾何学的な一階のジェット空間で，$m = 1$ の時，接触多様体（すなわち，C は $T(J)$ の余次元 1 の部分束で，局所的に $C = \{\varpi = 0\}$ なる時，$\varpi \wedge (\varpi)^n$ は volume form．ここに，$J = J(M,n)$.）となっています．二つの $(m+n)$ 次元多様体 M，$\hat{M}$ とその間の可微分同相写像 $\varphi : M \to \hat{M}$ に対して，φ は同型射 $\varphi_* : (J(M,n),C) \to (J(\hat{M},n),\hat{C})$（すなわち，$\varphi_* : J(M,n) \to J(\hat{M},n)$ は可微分同相写像で C を $\hat{C}$ に移す）を誘導します．$m = 1$ が特別なのは，つぎの定理によります（cf. [Y3]）．

定理 1.1（**Bäcklund**）　M，$\hat{M}$ を $(m+n)$ 次元多様体とする．$m \geqq 2$ ならば，同型射 $\Phi : (J(M,n),C) \to (J(\hat{M},n),\hat{C})$ に対して，可微分同相写像 $\varphi : M \to \hat{M}$ が存在して，$\Phi = \varphi_*$ となる．

$m = 1$ の時，接触変換（同型射）の全体が M の可微分同相写像のリフトより真に増大することは，よく知られた事実です．従って，幾何学的な二階のジェット空間を考えるとき，未知関数の個数 m が 1 かそれ以上かで様子が異なって来ます．$m = 1$ の時，接触多様体 (J,C)

を出発点として，(J,C) 上の Lagrange-Grassmann Bundle $(L(J),E)$ を考えます．

$$L(J) = \bigcup_{u\in J} L_u, \quad L_u = \{\text{Legendrian subspaces of} \quad (C(u),d\varpi)\}.$$

$L(J)$ 上には，canonical system E がつぎのように定まります．

$$E(v) = \pi_*^{-1}(v) \subset T_v(L(J)) \qquad \text{for } v \subset T_u(J), \quad u = \pi(v).$$

ここに，$\pi : L(J) \to J$ は射影．$L(J)$ の各点 v の近傍には，$u = \pi(v)$ の近傍の (J,C) の正準座標系 $(x_1,\cdots,x_n,z,p_1,\cdots,p_n)$ を適当に取ることによって，正準座標系 (x_i,z,p_i,p_{ij}) が入ります（$p_{ij} = p_{ji}$）．正準座標系で，E は，つぎで与えられます．

$$E = \{\varpi = \varpi_1 = \cdots = \varpi_n = 0\}$$

ここに，$\varpi = dz - \sum_{i=1}^n p_i\,dx_i$，$\varpi_i = dp_i - \sum_{j=1}^n p_{ij}\,dx_j$ $(i = 1,\cdots, n)$ です．二つの接触多様体 (J,C)，$(\hat{J},\hat{C})$ とその間の接触変換 $\varphi : (J, C) \to (\hat{J},\hat{C})$ に対して，φ は同型射 $\varphi_* : (L(J),E) \to (L(\hat{J}),\hat{E})$ を誘導します．逆に，つぎが成り立ちます（cf. [Y1]）．

定理 1.2 (J,C)，$(\hat{J},\hat{C})$ を接触多様体とする．同型射 $\Phi : (L(J), E) \to (L(\hat{J}),\hat{E})$ に対して，接触変換 $\varphi : (J,C) \to (\hat{J},\hat{C})$ が存在して，$\Phi = \varphi_*$ となる．

我々の最初の目標は，$(L(J),E)$ の部分多様体論を定式化することです．

§2. 微分式系の幾何（田中理論）．

ここでは，微分式系の幾何に対する田中理論（[T1]，[T2]）についておさらいをします．

2.1. 派生系と特性系． M を次元 N の多様体とし，D を M 上の微分式系とします．すなわち，D は M の接束 $T(M)$ の（階数 r の）部分束です．M の各点の近傍では，一次独立な $s = N - r$ 個の 1-微分形式 $\omega_1,\cdots,\omega_s$ が取れて，局所的には，D はつぎで与えられます．

$$D = \{\omega_1 = \cdots = \omega_s = 0\}.$$

Frobenius の定理より、(M,D) が完全積分可能（すなわち，局所座標系 $(x_1,\cdots,x_N)$ が取れて，$D=\{dx_1=\cdots=dx_s=0\}$ ）であるための条件はつぎで与えられます：

$$\Longleftrightarrow \quad d\omega_i \equiv 0 \pmod{\omega_1,\cdots,\omega_s} \quad \text{for} \quad i=1,\cdots,s,$$
$$\Longleftrightarrow \quad [\mathcal{D},\mathcal{D}] \subset \mathcal{D}, \quad \text{where} \quad \mathcal{D}=\Gamma(D)\ .$$

従って，non-integrable な微分式系に対する最初の手がかりとして，D の派生系（derived system）∂D が考えられます．派生系 ∂D は，セクションのことばで，つぎで与えられます．

$$\partial\mathcal{D}=\mathcal{D}+[\mathcal{D},\mathcal{D}].$$

また，(M,D) の Cauchy 特性系 $Ch(D)$ は各点 x に於いて，つぎで定義されます．

$$Ch(D)(x)=\{X\in D(x) \mid X\rfloor d\omega_i\equiv 0 \pmod{\omega_1,\cdots,\omega_s} \quad \text{for} \quad i=1,\cdots,s\}$$

$Ch(D)$ は，微分式系となる時（ランク一定の時），常に完全積分可能です（cf. [Y1]）．

さらに高次（k 次）の派生系 $\partial^k D$ が通常，帰納的につぎで与えられます（cf.[BCG$_3$]）．

$$\partial^k D=\partial(\partial^{k-1}D).$$

これに対して，k 次の弱派生系（k-th weak derived system）$\partial^{(k)}D$ がつぎで定められます．

$$\partial^{(k)}\mathcal{D}=\partial^{(k-1)}\mathcal{D}+[\mathcal{D},\partial^{(k-1)}\mathcal{D}].$$

弱派生系を用いるのが，田中理論の一つのポイントです（[T1]）．この時，微分式系 (M,D) が 正則（regular） であるとは，すべての自然数 k に対して $D^{-(k+1)}=\partial^{(k)}D$ が $T(M)$ の部分束となっていることで定めます．

正則な (M,D) に対してつぎが成り立ちます．

(S1) ある $\mu\geqq 1$ が存在して，

$$D=D^{-1}\subset D^{-2}\subset\cdots\subset D^{-\mu}=\cdots=D^{-k}$$

(S2) $\quad [\mathcal{D}^p,\mathcal{D}^q] \subset \mathcal{D}^{p+q} \quad$ for any $\quad p,q<0.$

2.2. Symbol Algebras. (M,D) を正則な微分式系で，$T(M)=D^{-\mu}$ とします．(M,D) の最初の不変量として，M の各点 x における (M,D) の表象代数（symbol algebra）がつぎのように決まります（[T1]）：

$$\mathfrak{m}(x)=\bigoplus_{p=-1}^{-\mu}\mathfrak{g}_p(x),$$

ここに，$\mathfrak{g}_{-1}(x)=D(x)$，$\mathfrak{g}_p(x)=D^p(x)/D^{p+1}(x)$ $(p<-1)$．また，$\mathfrak{m}(x)$ の bracket 積がつぎで定められます．

$$[X,Y]=\varpi_{p+q}([\tilde{X},\tilde{Y}]_x), \qquad \text{for} \quad X\in\mathfrak{g}_p(x),Y\in\mathfrak{g}_q(x).$$

ここに，$\tilde{X}\in\Gamma(D^p)$，$X=\varpi_p(\tilde{X}_x)$，$\tilde{Y}\in\Gamma(D^q)$，$Y=\varpi_q(\tilde{Y}_x)$．$(S2)$ より，これによって $\mathfrak{m}(x)$ は，階別べき零（nilpotent）リー環となり，つぎを満たします．

$$[\mathfrak{g}_{p+1}(x),\mathfrak{g}_{-1}(x)]=\mathfrak{g}_p(x), \qquad \text{for} \quad p<-1.$$

逆に，生成条件（$\mathfrak{g}_p=[\mathfrak{g}_{p+1},\mathfrak{g}_{-1}]$ for $p<-1$）を満たす階別べき零リー環 $\mathfrak{m}=\bigoplus_{p=-1}^{-\mu}\mathfrak{g}_p$ に対して，$M(\mathfrak{m})$ を $\mathfrak{m}$ をリー環とする単連結べき零リー群とします．$\mathfrak{m}$ を $M(\mathfrak{m})$ 上の左不変ベクトル場の成すリー環と同一視するとき，$\mathfrak{g}_{-1}$ は，$M(\mathfrak{m})$ 上の左不変微分式系 $D_{\mathfrak{m}}$ を定めます．明らかに，$(M(\mathfrak{m}),D_{\mathfrak{m}})$ の各点での symbol algebras は $\mathfrak{m}$ と同型となります．$(M(\mathfrak{m}),D_{\mathfrak{m}})$ を Standard differential system of type $\mathfrak{m}$ と呼びます．$(M(\mathfrak{m}),D_{\mathfrak{m}})$ の無限小自己同型の成すリー環 $\mathfrak{g}(\mathfrak{m})$ は，$\mathfrak{m}$ の prolongation として，代数的に定められます．§4 では，$\mathfrak{g}(\mathfrak{m})$ がいつ有限次元単純リー環になるかを議論します．

表象代数の例として，$(L(J),E)$ では，各点でつぎの $\mathfrak{c}^2(n)$ と同型になります．

$$\mathfrak{c}^2(n)=\mathfrak{c}_{-3}\oplus\mathfrak{c}_{-2}\oplus\mathfrak{c}_{-1}$$

ここに，$\mathfrak{c}_{-3}=W$，$\mathfrak{c}_{-2}=W\otimes V^*$，$\mathfrak{c}_{-1}=V\oplus W\otimes S^2(V^*)$ であり；V，W は，それぞれ次元 n と 1 のベクトル空間です．bracket 積は，V と V^* の pairing から誘導されるもので，他は，0 とします．実際，この同型は，$(L(J),E)$ の正準座標系を用いて，任意の点での coframe $\{\varpi,\varpi_i,dx_i,dp_{ij}\}$ $(1\leqq i\leqq j\leqq n)$ に対する dual frame

$\{\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial p_i},\frac{d}{dx_i},\frac{\partial}{\partial p_{ij}}\}$ を用いて容易に計算されます．$\{\frac{d}{dx_i},\frac{\partial}{\partial p_{ij}}\}$ $(1 \leqq i \leqq j \leqq n)$ が，$\Gamma(E)$ の free base となっていることに注意します．ここに，$\frac{d}{dx_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} + p_i\frac{\partial}{\partial z} + \sum_{j=1}^{n} p_{ij}\frac{\partial}{\partial p_j}$ は，古典的記号法です．また，E の派生系 ∂E がつぎを満たすことが容易にわかります．

$$\partial E = \{\varpi = 0\} = \pi_*^{-1}C, \qquad Ch(\partial E) = \mathrm{Ker}\pi_*.$$

§3. *PD*-多様体の幾何．ここでは，$(L(J),E)$ の部分多様体論を定式化します（[Y1]）．R をつぎを満たす $L(J)$ の部分多様体とします．

$(R.0)$ $\quad p : R \to J$ submersion.

ここに，$p = \pi\,|_R$ で，$\pi : L(J) \to J$ は射影です．二階のジェット空間 $L(J)$ 上には，二つの微分式系 $C^1 = \partial E$ と $C^2 = E$ があります．これらを，R に制限したものを D^1，D^2 とします．Canonical system E を定める 1-形式達 $\{\varpi,\varpi_1,\cdots,\varpi_n\}$ の R への制限を同じ記号であらわすことにしますと，条件 $(R.0)$ よりこれらは一次独立であり，つぎが成り立ちます．

$$D^1 = \{\varpi = 0\}, \qquad D^2 = \{\varpi = \varpi_1 = \cdots = \varpi_n = 0\}.$$

実際，さらに $(R;D^1,D^2)$ は，つぎを満たします．

$(R.1)$ D^1 と D^2 はそれぞれ余次元が 1 と $n+1$ の微分式系である．

$(R.2)$ $\partial D^2 \subset D^1$.

$(R.3)$ $Ch(D^1)$ は D^2 の余次元 n の部分束である．

$(R.4)$ R の各点 v に於いて，$Ch(D^1)(v) \cap Ch(D^2)(v) = \{0\}$.

逆に，この 4 つの条件が，$(R.0)$ を満たす $(L(J),E)$ の部分多様体を特徴付けます．すなわち，我々は，多様体とその上の二つの微分式系の triplet $(R;D^1,D^2)$ が，4 つの条件 $(R.1)$ から $(R.4)$ を満たす時，**PD 多様体** と呼びます．*PD* 多様体には，つぎのような（局所的な）実現定理が成り立ちます：条件 $(R.1)$ と $(R.3)$ より，完全積分可能系 $Ch(D^1)$ の定める foliation の余次元は，$2n+1$ ですが，今，R は $Ch(D^1)$ について regular，すなわち leaves の空間 $J = R/Ch(D^1)$ は $2n+1$ 次元の多様体であるとします．この時，D^1 は J に落ちます．すなわち，J 上の余次元 1 の微分式系 C があって，$D^1 = p_*^{-1}C$ となります．ここに，$p : R \to J = R/Ch(D^1)$ は射影で，(J,C) は接

触多様体です．条件 $(R.1)$ と $(R.2)$ はつぎの写像 ι の像が (J,C) の Legendrian subspace となることを保証しています．

$$\iota(v) = p_*(D^2(v)) \subset C(u), \qquad u = p(v)$$

最後に条件 $(R.4)$ は $\iota : R \to L(J)$ が immersion であることを示しています．さらに，つぎが成り立ちます．

定理 **3.1.** $(R;D^1,D^2)$, $(\hat{R};\hat{D}^1,\hat{D}^2)$ を PD 多様体とし，R, $\hat{R}$ はそれぞれ $Ch(D^1)$, $Ch(\hat{D}^1)$ について regular とする．(J,C), $(\hat{J},\hat{C})$ を同伴する接触多様体とする．この時，同型射 $\Phi : (R;D^1,D^2) \to (\hat{R};\hat{D}^1,\hat{D}^2)$ は，接触変換 $\varphi : (J,C) \to (\hat{J},\hat{C})$ を誘導し，つぎの可換図式が成り立つ．

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\iota} & L(J) \\ \Phi\big\downarrow & & \big\downarrow\varphi_* \\ \hat{R} & \xrightarrow{\hat{\iota}} & L(\hat{J}). \end{array}$$

これによって，$(L(J),E)$ の条件 $(R.0)$ を満たす部分多様体論が，PD 多様体の幾何として定式化されました．

PD 多様体 $(R;D^1,D^2)$ に於いて，$D^1 = \partial D^2$ が成立すると，(R, D^2) の幾何となり田中理論が直接適用可能です．これについては，つぎの compatibility condition (C) のもとでつぎの定理が知られています．

(C) $\quad p^{(1)} : R^{(1)} \to R$ は上への写像である．

ここに，$R^{(1)}$ は $(R;D^1,D^2)$ の first prolongation です（[Y1]）．

定理 **3.2.** $(R;D^1,D^2)$ を条件 (C) を満たす PD 多様体とする．この時，R の各点 v に於いてつぎが成り立つ．

$$\dim D^1(v) - \dim \partial D^2(v) = \dim Ch(D^2)(v).$$

特に，$D^1 = \partial D^2 \iff Ch(D^2) = \{0\}$.

rank $Ch(D^2) > 0$ の場合には，PD 多様体 $(R;D^1,D^2)$ の幾何は，さらに (X,D) の幾何に reduction 可能です．ここに，$X = R/Ch(D^2)$ であり，$D^2 = \rho_*^{-1}D$, $\rho : R \to X$ です．実際，(A) はこの例であり，$\dim X = 5$, rank $D = 2$ となっています．

§4. 単純階別リー環に付随する微分式系. ここでは，その prolongation が有限次元単純リー環となる Standard differential system を分類します（[Y5]）．話を簡単にするため，この節では，すべて複素数体上のリー環を考えます．

4.1. ルート系による単純階別リー環の分類． $\mathfrak{g}$ を（$\mathbb{C}$ 上の）有限次元単純リー環とします．$\mathfrak{h}$ を $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分環とし，$\mathfrak{h}$ に関するルート系を $\Phi \subset \mathfrak{h}^*$ とします．Φ の 1 組の基底（単純ルート系）$\Delta = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_\ell\}$ を取ると，すべての $\alpha \in \Phi$ は，Δ の（一斉に非負または一斉に非正の）整係数一次結合でかかれ，$\mathfrak{g}$ はつぎのようにルート空間分解されます．

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{\alpha\in\Phi^+} \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha\in\Phi^+} \mathfrak{g}_{-\alpha}.$$

ここに，$\mathfrak{g}_\alpha = \{X \in \mathfrak{g} \mid [h,X] = \alpha(h)X \quad \text{for} h \in \mathfrak{h}\}$ は，($\alpha \in \Phi$ に対応する 1 次元の）ルート空間で，Φ^+ は正のルートの集合です．

今，Δ の空でない部分集合 Δ_1 を選ぶと，つぎのように Φ^+ が分割され，$\mathfrak{g}$ に gradation が入り，$\mathfrak{g} = \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} \mathfrak{g}_p$ は階別リー環となります；

$$\Phi^+ = \cup_{p\geqq 0}\Phi^+_p, \qquad \Phi^+_p = \{\alpha = \sum_{i=1}^{\ell} n_i\alpha_i \mid \sum_{\alpha_i\in\Delta_1} n_i = p\}$$

$$\mathfrak{g}_p = \bigoplus_{\alpha\in\Phi^+_p} \mathfrak{g}_\alpha, \quad \mathfrak{g}_0 = \bigoplus_{\alpha\in\Phi^+_0} \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha\in\Phi^+_0} \mathfrak{g}_{-\alpha}, \quad \mathfrak{g}_{-p} = \bigoplus_{\alpha\in\Phi^+_p} \mathfrak{g}_{-\alpha},$$

$$[\mathfrak{g}_p, \mathfrak{g}_q] \subset \mathfrak{g}_{p+q} \qquad \text{for} \quad p,q \in \mathbb{Z}.$$

この時，さらに，負のパート $\mathfrak{m} = \bigoplus_{p<0} \mathfrak{g}_p$ は，生成条件 ；

$$\mathfrak{g}_p = [\mathfrak{g}_{p+1}, \mathfrak{g}_{-1}] \quad \text{for} \quad p < -1$$

を満たします．$\Delta_1 \subset \Delta$ からこうして得られた単純階別リー環 $\mathfrak{g} = \bigoplus_{p=-\mu}^{\mu} \mathfrak{g}_p$ を以降，(X_ℓ, Δ_1) であらわすことにします．ここに，X_ℓ は単純リー環 $\mathfrak{g}$ に対応する Dynkin 図形をあらわし，Δ_1 はその頂点の部分集合をあらわしています．この時，$\mu = \sum_{\alpha_i\in\Delta_1} m_i$ となることに注意します．ここに，$\theta = \sum_{i=1}^{\ell} m_i\alpha_i$ は Φ^+ の最高ルートです．

逆に，つぎが成り立ちます．

定理 **4.1.** $\mathfrak{g} = \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} \mathfrak{g}_p$ を生成条件を満たす $\mathbb{C}$ 上の単純階別リー環とする. $\mathfrak{g}$ の Dynkin 図形を X_ℓ とする. この時, X_ℓ の頂点の部分集合 Δ_1 が存在して, $\mathfrak{g} = \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} \mathfrak{g}_p$ は, (X_ℓ,Δ_1) と同型となる. (X_ℓ,Δ_1) の同型類はその diagram automorphisms で定まっている.

4.2. 単純階別リー環に付随する微分式系. 定理 4.1 により, 結果的に, 生成条件を満たす単純階別リー環 $\mathfrak{g} = \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} \mathfrak{g}_p$ の分類は, $\mathfrak{g}$ の parabolic 部分環 $\mathfrak{g}' = \bigoplus_{p\geqq 0} \mathfrak{g}_p$ の分類に一致しています. 従って, 各単純階別リー環 (X_ℓ,Δ_1) に対して, 唯一つの R-space (compact simply connected homogeneous complex manifold) $M_\mathfrak{g} = G/G'$ が定まります. さらに, $\mu \geqq 2$ なる場合には, $M_\mathfrak{g}$ 上に, $\mathfrak{g}_{-1}$ より G-不変な微分式系 $D_\mathfrak{g}$ が定まり, $(M(\mathfrak{m}),D_\mathfrak{m})$ (Standard differential system of type $\mathfrak{m}$) は, $(M_\mathfrak{g},D_\mathfrak{g})$ の open dense 部分多様体となります. $(M_\mathfrak{g},D_\mathfrak{g})$ の (従って, $(M(\mathfrak{m}),D_\mathfrak{m})$ の) infinitesimal automorphism については, つぎが成り立ちます.

定理 **4.2.** 生成条件を満たす $\mathbb{C}$ 上の単純階別リー環 $\mathfrak{g} = \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} \mathfrak{g}_p$ は, つぎの例外 (1), (2), (3) を除いて, $\mathfrak{m} = \bigoplus_{p<0} \mathfrak{g}_p$ の prolongation $\mathfrak{g}(\mathfrak{m})$ に一致する.

(1) $\mu = 1$, i.e., $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$.

(2) contact gradation, i.e., $\mu = 2$ & $\dim \mathfrak{g}_{-2} = 1$.

(3) $(X_\ell,\Delta_1) \cong (A_\ell,\{\alpha_1,\alpha_i\})$ $(i = 2,\cdots,\ell-1)$ or $(C_\ell,\{\alpha_1,\alpha_\ell\})$.

ここで, 例外 (1), (2), (3) に対応する R-space はつぎの通りです. (1) は, コンパクト既約エルミート対称空間です. (2) は, Boothby type の接触多様体 (Standard contact manifold) で, 各複素単純リー環に対して唯一つ存在します (次節で議論します). (3) の場合, $(A_\ell,\{\alpha_1,\alpha_{i+1}\})$ には, $(J(\mathbb{P}^\ell,i),C)$ が, $(C_\ell,\{\alpha_1,\alpha_\ell\})$ には, $(L(\mathbb{P}^{2\ell-1}),E)$ が対応します. ここに, $\mathbb{P}^\ell$ は, ℓ-次元複素射影空間であり, $\mathbb{P}^{2\ell-1}$ は, Standard contact manifold of type C_ℓ です. (2), (3) は, 共に, 一階ないし二階のジェットの空間であることに注意します.

§**5.** G_2**- Geometry.** ここでは, §3, §4 の議論を踏まえて, (A), (B) の一般化を考えます.

5.1. Standard contact manifolds. 各複素単純リー環 $\mathfrak{g}$ は, 最高ルート θ を持ちます. §4 の構成より, contact gradation (X_ℓ,Δ_θ) は, この最高ルートを峻別する gradation (Φ^+ の分割) です. ここに, Δ_θ は, Extended Dynkin diagram に於いて, $-\theta$ と連結している X_ℓ の

頂点のなす Δ の部分集合です．また，θ を最高ウェイトにもつ既約表現として，$\mathfrak{g}$ の随伴（$\cong$ 余随伴）表現があります．(X_ℓ,Δ_θ) に対応する R-space $J_\mathfrak{g}$ は，θ のルートベクトルを通る G の (co)adjoint orbit の射影化として得られます．この構成より，$J_\mathfrak{g}$ は,（contact gradation (X_ℓ,Δ_θ) に対応する）自然な接触構造 $C_\mathfrak{g}$ を持ちます.（cf. [Y5, §4]）Standard contact manifold $(J_\mathfrak{g},C_\mathfrak{g})$ は，当初，コンパクト単連結等質複素接触多様体として，Boothby によって見いだされています（[Bo]）.

Extended Dynkin Diagram with the coefficient of Highest Root（cf. [Bu]）

5.2. Gradation of G_2. G_2 の Dynkin 図形はつぎで与えられます．

$$\underset{\alpha_1}{\circledcirc} \Lleftarrow \underset{\alpha_2}{\circledcirc}, \qquad \theta = 3\alpha_1 + 2\alpha_2.$$

この場合，$\Delta = \{\alpha_1,\alpha_2\}$ より，Δ_1 の選び方は，つぎの 3 通りです．

$(G1)$ $\Delta_1 = \{\alpha_1\}$. この場合，$\mu = 3$ で，$\dim \mathfrak{g}_{-3} = \dim \mathfrak{g}_{-1} = 2$, $\dim \mathfrak{g}_{-2} = 1$ です．また，$(M_{\mathfrak{g}},D_{\mathfrak{g}})$ は，(A) の (X,D) に一致しています．

$(G2)$ $\Delta_1 = \{\alpha_2\}$. この場合は，contact gradation です．

$(G3)$ $\Delta_1 = \{\alpha_1,\alpha_2\}$. この場合，$\mu = 5$ で，$\dim \mathfrak{g}_{-1} = 2$，他は次元 1 です．

Standard contact manifold $(J_{\mathfrak{g}},C_{\mathfrak{g}})$ of type G_2 に於いて，例外群 G_2 の作用を $L(J_{\mathfrak{g}})$ にリフトすると，$L(J_{\mathfrak{g}})$ は，つぎのように，軌道分解します：

$$L(J_{\mathfrak{g}}) = O \cup R_1 \cup R_2.$$

ここに，O は open orbit で，R_i は，余次元 i の軌道です．この時，R_1，R_2 は，それぞれ (B), (A) の global model と考えられます．さらに，R_2 は，コンパクトな軌道で，$(G_2,\{\alpha_1,\alpha_2\})$ に対応する R-space となっています．この事実から，(A) に対応する PD 多様体 $(R;D^1, D^2)$ は $(G_2,\{\alpha_1,\alpha_2\})$ に対応する R-space を用いて，記述可能となります．

5.3. G_2-geometry. Extended Dynkin diagram に於いて，A_ℓ type を除いて，Δ_θ は，一つの simple root α_θ からなっています．もちろん，α_θ の最高ルートに於ける係数は，2です．さらに，例外リー環では，例外なく，α_θ の隣に，最高ルートに於ける係数が，3である simple root α_G が存在します．$X_\ell \cong E_6,E_7,E_8,G_2,F_4$ に対して $(X_\ell,\{\alpha_G\})$ の定める gradation は，$\mu = 3$ で，$\dim \mathfrak{g}_{-3} = 2$, $\dim \mathfrak{g}_{-1} = 2\dim \mathfrak{g}_{-2}$ を満たします．さらに，$\mathfrak{g}_{-1}$ 同志の bracket 積を無視すれば，他の部分の積は，

$$\mathfrak{g}_{-3} = W, \quad \mathfrak{g}_{-2} = V, \quad \mathfrak{g}_{-1} = W \otimes V^*$$

と記述されます．この事実が，$(X_\ell,\{\alpha_G\})$ に付随する微分式系 $(M_{\mathfrak{g}}, \partial D_{\mathfrak{g}})$ より (B) の一般化にあたる単独方程式（Goursat 方程式）が構成され得る理由となります（cf. [Ts]）．

また，明らかに $(X_\ell,\{\alpha_\theta,\alpha_G\})$ の定める R-space は，$(X_\ell,\{\alpha_\theta\})$ の定める Standard contact manifold (J_g,C_g) 上のファイバー空間ですが，実際，$L(J_g)$ 内のコンパクト軌道として実現されます．これが，(A) の一般化となる過剰決定系を与えます．ただし，この時，PD 多様体としては，rank $Ch(D^2) = 1$ のケースで，(X,D) としては，$(X_\ell ,\{\alpha_G\})$ が対応します．

参考文献

[Bo] W. M. Boothby, Homogeneous complex contact manifolds, Proc. Symp. Pure Math., Amer. Math. Soc., vol 3, (1961), 144-154.

[Bu] N.Bourbaki, Groupes et algèbles de Lie, Chapitre 4,5 et 6, Hermann, Paris (1968).

[BCG3] R. Bryant, S. S. Chern, R. B. Gardner, H. Goldschmidt, and P. Griffiths, Exterior differential systems, Springer-Verlag, New-York (1986).

[C1] E.Cartan, Les systèmes de Pfaff *à* cinq variables et les équations aux dérivées partielles du second ordre, Ann. Ec. Normale, vol 27 (1910), 109-192.

[C2] E.Cartan, Sur les systèmes en involution d'équations aux dérivées partielles du second ordre *à* une fonction inconnue de trois variables indépendantes, Bull. Soc. Math. France, vol 39 (1911), 352-443.

[T1] N.Tanaka, On differential systems, graded Lie algebras and pseudogroups, J. Math. Kyoto Univ., vol 10 (1970), 1-82.

[T2] N.Tanaka, On the equivalence problems associated with simple graded Lie algebras, Hokkaido Math. J., vol 8 (1979), 23-84.

[Ts] A.Tsuchiya, Geometric Theory of Second Order Partial Differential Equations, Lecture Notes, Nagoya University (1981), (in Japanese).

[Y1] K.Yamaguchi, Contact geometry of higher order, Japanese J. of Math., vol 8 (1982), 109-176.

[Y2] K.Yamaguchi, On involutive systems of second order of codimension 2, Proc. of Japan Acad., vol 58, Ser A, No.7 (1982), 302-305.

[Y3] K.Yamaguchi, Geometrization of Jet bundles, Hokkaido Math. J., vol 12 (1983), 27-40.

[Y4] K.Yamaguchi, Typical classes in involutive systems of second order, Japanese J. Math., vol 11 (1985), 265-291.

[Y5] K.Yamaguchi, Differential systems associated with simple graded Lie algebras, Adv. Studies in Pure Math., vol 22 (1993), 413-494.

[Y6] K.Yamaguchi, G_2-geometry of overdetermined systems of second order, in preparation.

G_2-Geometry of Overdetermined Systems of Second Order

By

Keizo YAMAGUCHI

Introduction.

Discovery of E. Cartan in

[C1] *Les systèmes de Pfaff à cinq variables et les équations aux derivèes partielles du second ordre*, Ann. Ec. Normale. 27 (1910), 109–192

Overdetermined (involutive) system :

(A)
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1}{3}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)^3, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)^2.$$

Single equation of Goursat type:

(B)
$$9r^2 + 12t^2(rt - s^2) + 32s^3 - 36rst = 0,$$

where

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

14-dimensional Exceptional Simple Lie Algebra G_2

The Plan of This TALK

Main Theme **Contact Geometry of Second Order**