

# 多期間在庫モデルについての研究

大阪府立大学 総合科学部 北條 仁志 (Hitoshi Hohjo)

寺岡義伸 (Yoshinobu Teraoka)

Department of Mathematics and Information Sciences,  
Osaka Prefecture University

## 1 Introduction

企業において余剰品は在庫となるため在庫維持費用がかかり、発注量が需要量を下まわった場合は品切れとなる。後者の損失を防ぐために、期間のある時点で不足している場合には不足分を許容限度内で追加発注することが許される。発注は期首と期間のある時点でのみ可能である。過剰需要は後期需要とみなされるが、次期の発注量で満たされなければならない。本稿では、これらの仮定の下で、需要量が連続的であり、2期間で腐敗する商品における多期間在庫モデルについての考察を行う。

## 2 仮定と記号

単一施設単一製品の有限期間における在庫問題について考える。2期間で腐敗する商品(発注した期と次の期で販売可能)を扱う。1期間長を $t$ とおくと、商品の販売可能期間は $2t$ であり、期限を過ぎた商品は廃棄される。商品の発注は期首および与えられた時点 $t_0$ でのみ可能である。各期の期首に在庫レベルが $z$ となるまで発注される。もし時点 $t_0$ で過剰需要が生じていると、与えられた最大量 $R$ 以内で追加発注することができる。それらの発注量は即時的に満たされる(リードタイム 0)。発注には段取り費用を考慮せず、期首の発注では単位当たり $c_i$ が課せられ、追加発注では単位当たり $c_i^0$ の費用が課せられる。販売に対して通常単位当たり $r_i$ を受け取る。期間のある時点までの累積需要量はその期間の総需要量 $b_i$ の関数で表される。商品は必ず古いものから販売される(First In First Out)。この施設は在庫量0から出発し、不足分はすべてバックログする。追加発注時点以降にある過剰需要に対しては次期の期首発注により満たされる。次期発注によりバックログされる単位当たりの販売価格は $r_i^0$ である。ただし、最後の期間では期末にバックログされるものとする。また、保持されている在庫には単位時間単位当たりの在庫維持費用 $h_i$ がかかり、不足に対しては単位時間単位当たりのペナルティ費用 $p_i$ がかかる。

さらに、以下のような記号を用いる。

第 $i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) 期に対して

- $\phi(b_i)$  :  $b_i$ の確率密度関数
- $x_i$  : 末期在庫量
- $y_i$  : 期首発注量
- $w_{ij}$  : 第 $i$ 期から第 $j$ 期への持ち越し在庫量
- $g(x)$  :  $g(0) = 0, g(1) = 1, \frac{dg(x)}{dx} > 0$ なる $x$ の関数 ( $0 \leq x \leq 1$ )

$$G(x) = \int_0^x g(y) dy$$

確率的に変化するのには需要量 $b_i$ だけである。 $x_0$ は初期在庫量である。

利益と費用、時刻や量のパラメータに関する関係を整理すると、次のようになる。

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 < t_0 < t \\ z \geq 0, b_i \geq 0, R \\ h_i \geq 0, p_i \geq 0 \\ 0 \leq r_i^0 \leq r_i, 0 \leq c_i \leq c_i^0 \leq r_i, c_{i+1} \leq r_i^0 \\ (1 - t_0/t)p_i - c_i^0 + r_i - r_i^0 \geq 0 \\ x_0 = 0, y_i \geq 0, w_{0,1} = 0, w_{-1,1} = 0, w_{ij} \geq 0 \end{array} \right.$$

$x_i$ は負の値もとりうる。仮定  $(1 - t_0/t)p_i - c_i^0 + r_i - r_i^0 \geq 0$ は追加発注の有効性より得られる。

多期間問題では、しばしば割引率 $\alpha$ が用いられる。しかしながら、費用は一定の割合で価値が増加するとは限らない。我々のモデルは、割引率を用いるよりより一般的な費用であると考えられる。このモデルにおいて  $r_i^0 = r_{i+1}, r_i = \alpha r_{i+1}, c_i = \alpha c_{i+1}, c_i^0 = \alpha c_{i+1}^0, h_i = \alpha h_{i+1}, p_i = \alpha p_{i+1}$ とくと割引率 $\alpha$ をもつモデルとなる。

仮定でも述べたように、次のような政策に基づいて在庫管理を行う。

政策：各期間の期首に在庫量が $z$ になるように発注し、時点 $t_0$ において品切れと判断されると最大 $R$ の範囲内で追加注文される。

このとき我々の目的は、 $g(x)$ を需要形態を表すモデルとして使用した時の最適在庫基準およびそれに関連する発注量の性質を考察することにある。ここでは、評価基準として総費用の最小化を用いる。

### 3 モデルと定式化

このモデルにおいては各 $i, i = 1, 2, \dots, n$ 期に次のような4つの在庫推移の状態が存在する。

(I) 1期間中に不足が生じない場合

与えられた期首在庫量 $z$ に対して需要量 $b_i$ が  $0 \leq b_i \leq z$ であるとき、その期間の終わりには商品がまだ残っている。もしこれらの中で前期に発注された商品が存在すれば、それらは次の期間で商品として販売することができない。この推移を表わしている図が図1である。

(II) 時点 $t_0$ では在庫があるが、期末には不足している場合

与えられた期首在庫量 $z$ に対して需要量 $b_i$ が  $z < b_i \leq z/g(t_0/t)$ であるとき、この在庫状態が起こる。時点 $t_0$ では在庫を保持しているため、追加注文はされない。さらなる需要により期末には在庫が不足してしまう。この不足分は次期の発注によりバックログされる。図2にこの推移を表わす。

(III) 時点 $t_0$ における不足量が $R$ 以下の場合

与えられた期首在庫量 $z$ に対して需要量 $b_i$ が  $z/g(t_0/t) < b_i \leq (z + R)/g(t_0/t)$ であるとき、この在庫状態になる。時点 $t_0$ における在庫不足量は $R$ 以下であるので、時点 $t_0$ 以前の不足量は時点 $t_0$ における追加発注によりすべてバックログされる。さらなる過剰需要は次期の発注でバックログされる。図3はこの推移を表わした図である。

(IV) 時点 $t_0$ における不足量が $R$ 以上の場合

与えられた期首在庫量 $z$ に対して需要量 $b_i$ が  $b_i > (z + R)/g(t_0/t)$ であるとき、図4に示されるような在庫推移の状態となる。時点 $t_0$ ではすでに $R$ 以上の商品が不足しているため、最大追加量 $R$ だけの商品が発注され、それまでの需要の一部に対してバックログされる。その後の需要によりさらに過剰需要量が増えるが、これらは次の期間の期首発注によりバックログされる。

1期間問題では、上記のような4つの在庫推移状態の中の1つが起こる。多期間問題では、これらの中の1つの状態が逐次に起こるのである(図5参照)。このとき、第 $i, i = 1, 2, \dots, n$ 期において在庫量に関するパラメータの関係は次のように表される。

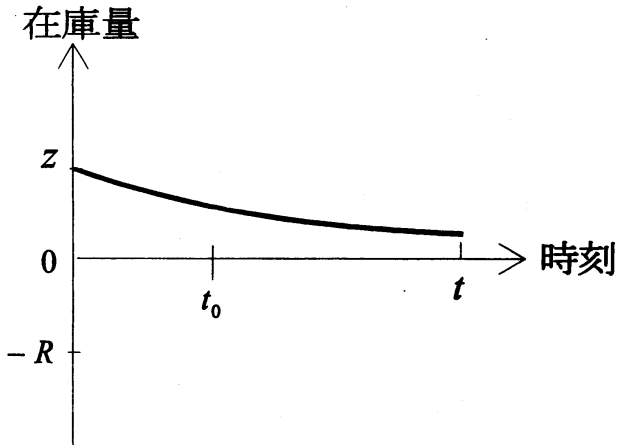


図1 在庫推移 (I)  $0 \leq b_i \leq z$

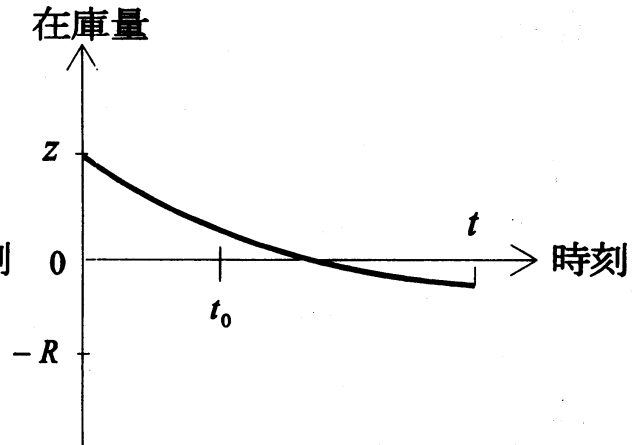


図2 在庫推移 (II)  $z < b_i \leq z/g(t_0/t)$

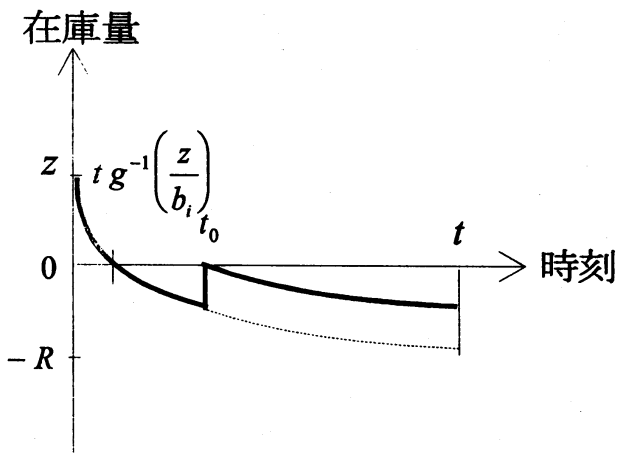


図3 在庫推移 (III)  $z/g(t_0/t) < b_i \leq (z+R)/g(t_0/t)$

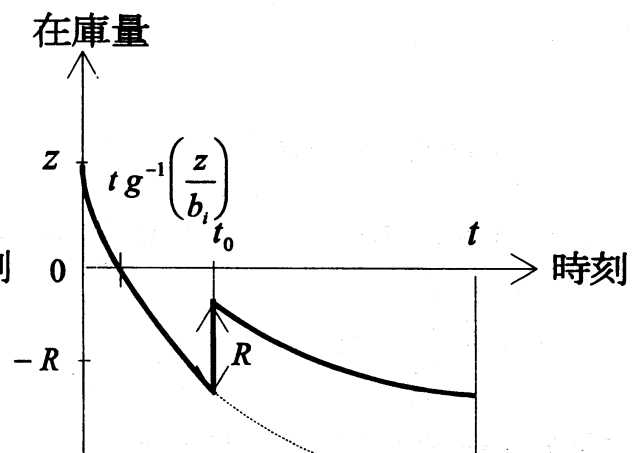


図4 在庫推移 (IV)  $b_i > (z+R)/g(t_0/t)$

前期の期末在庫量  $x_{i-1}$  は

$$x_{i-1} = \begin{cases} z - b_{i-1} (\geq 0), & 0 \leq b_{i-1} \leq z \\ z - b_{i-1} (< 0), & z < b_{i-1} \leq z/g(t_0/t) \\ \{g(t_0/t) - 1\}b_{i-1} (< 0), & z/g(t_0/t) < b_{i-1} \leq (z+R)/g(t_0/t) \\ z + R - b_{i-1} (< 0), & b_{i-1} > (z+R)/g(t_0/t) \end{cases}$$

で与えられる。もし  $x_{i-1} > 0$  ならば、このうちの  $w_{i-2,i}$  が腐敗し、商品として使用不可能となる。よって第  $i$  期の期首発注量は  $y_i = z - x_{i-1} + w_{i-2,i}$  となる。

第  $i-1$  期から第  $i+1$  期への持ち越し在庫量  $w_{i-1,i+1}$  は

$$w_{i-1,i+1} = \begin{cases} w_{i-1,i} - b_i (> 0), & 0 \leq b_i < w_{i-1,i} \\ 0, & o.w. \end{cases}$$

である。右辺の第1式目は第  $i$  期の期末に第  $i-1$  期の期首に発注した商品のうち、 $w_{i-1,i} - b_i$  だけ腐敗して、第  $i+1$  期での販売には使用できないことを表している。第2式目は第  $i$  期の終わりにはその在庫がなくなっていることを示している。

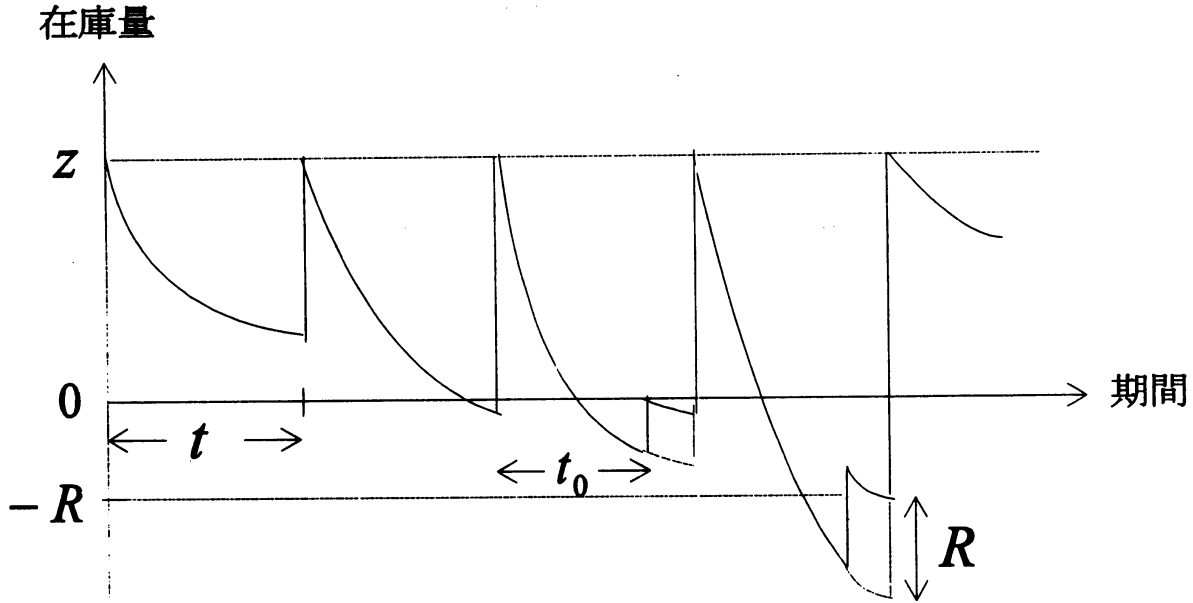


図5 多期間の在庫推移

また、第*i*期から第*i*+1期への持ち越し在庫量 $w_{i,i+1}$ は

$$w_{i,i+1} = \begin{cases} y_i, & w_{i-1,i+1} > 0 \\ \min\{z, y_i\} + w_{i-1,i} - b_i, & w_{i-1,i+1} = 0, w_{i-1,i} \leq b_i < \min\{z, y_i\} + w_{i-1,i} \\ 0, & o.w. \end{cases}$$

である。右辺の第1式目は第*i*-1期の期首に発注した商品が第*i*期の期末でもまだなお残っており、第*i*期の期首発注分がすべて残っていることを表している。第2式目は第*i*期の需要で第*i*-1期の期首に発注した商品は使い尽くしたが、第*i*期の期首に発注した商品が残っていることを述べている。第3式目は第*i*期の需要によって第*i*-1期と第*i*期に発注した商品すべてが使い尽くされたことを示している。

期末在庫量 $x_i$ は

$$x_i = \begin{cases} z - b_i (\geq 0), & 0 \leq b_i \leq z \\ z - b_i (< 0), & z < b_i \leq z/g(t_0/t) \\ \{g(t_0/t) - 1\}b_i (< 0), & z/g(t_0/t) < b_i \leq (z + R)/g(t_0/t) \\ z + R - b_i (< 0), & b_i > (z + R)/g(t_0/t) \end{cases}$$

と表せる。 $x_i$ はそれまでの期間のパラメータとは無関係であり、 $b_i$ にのみ依存する。

次に、最適在庫レベルを調べるのに必要となる期待総費用を計算する。時点*T*における在庫量 $Q(T)$ と期平均在庫量 $I_i^1(z, b_i)$ 、期平均在庫不足量 $I_i^2(z, b_i)$ および期待費用 $C_i(z, y_i, b_i)$ は次のようになる：

(I) 1期間中に不足が生じない場合

$$Q(T) = z - g(T/t)b_i, \quad 0 \leq T \leq t;$$

$$\begin{aligned} I_i^1(z, b_i) &= \frac{1}{t} \int_0^t \{z - g(T/t)b_i\} dT \\ &= z - G(1)b_i; \end{aligned}$$

$$I_i^2(z, b_i) = 0;$$

$$C_i(z, y_i, b_i) = c_i y_i + h_i I_i^1(z, b_i) + p_i I_i^2(z, b_i) - r_i b_i;$$

(II) 時点  $t_0$  では在庫があるが、期末には不足している場合

$$Q(T) = z - g(T/t)b_i, \quad 0 \leq T \leq t;$$

$$\begin{aligned} I_i^1(z, b_i) &= \frac{1}{t} \int_0^{g^{-1}(z/b_i)t} \{z - g(T/t)b_i\} dT \\ &= z g^{-1}(z/b_i) - G(g^{-1}(z/b_i))b_i; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_i^2(z, b_i) &= \frac{1}{t} \int_{g^{-1}(z/b_i)t}^t \{g(T/t)b_i - z\} dT \\ &= b_i[G(1) - G(g^{-1}(z/b_i))] - z[1 - g^{-1}(z/b_i)]; \end{aligned}$$

$$C_i(z, y_i, b_i) = c_i y_i + h_i I_i^1(z, b_i) + p_i I_i^2(z, b_i) - r_i z - r_i^0(b_i - z);$$

(III) 時点  $t_0$  における不足量が  $R$  以下の場合

$$Q(T) = \begin{cases} z - g(T/t)b_i, & 0 \leq T < t_0 \\ \{g(t_0/t) - 1\}b_i, & t_0 \leq T \leq t \end{cases};$$

$$\begin{aligned} I_i^1(z, b_i) &= \frac{1}{t} \int_0^{g^{-1}(z/b_i)t} \{z - g(T/t)b_i\} dT \\ &= z g^{-1}(z/b_i) - G(g^{-1}(z/b_i))b_i; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_i^2(z, b_i) &= \frac{1}{t} \int_{g^{-1}(z/b_i)t}^{t_0} \{g(T/t)b_i - z\} dT + \frac{1}{t} \int_{t_0}^t \{g(T/t) - g(t_0/t)\}b_i dT \\ &= z[g^{-1}(z/b_i) - t_0/t] + b_i[G(1) - G(g^{-1}(z/b_i)) - (1 - t_0/t)g(t_0/t)]; \end{aligned}$$

$$C_i(z, y_i, b_i) = c_i y_i + c_i^0 \{g(t_0/t)b_i - z\} + h_i I_i^1(z, b_i) + p_i I_i^2(z, b_i) - r_i g(t_0/t)b_i - r_i^0 \{1 - g(t_0/t)\}b_i;$$

(IV) 時点  $t_0$  における不足量が  $R$  以上の場合

$$Q(T) = \begin{cases} z - g(T/t)b_i, & 0 \leq T < t_0 \\ z + R - g(T/t)b_i, & t_0 \leq T \leq t \end{cases};$$

$$\begin{aligned} I_i^1(z, b_i) &= \frac{1}{t} \int_0^{g^{-1}(z/b_i)t} \{z - g(T/t)b_i\} dT \\ &= z g^{-1}(z/b_i) - G(g^{-1}(z/b_i))b_i; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_i^2(z, b_i) &= \frac{1}{t} \int_{g^{-1}(z/b_i)t}^{t_0} \{g(T/t)b_i - z\} dT + \frac{1}{t} \int_{t_0}^t \{g(T/t)b_i - (z + R)\} dT \\ &= b_i[G(1) - G(g^{-1}(z/b_i))] - z[1 - g^{-1}(z/b_i)] - (1 - t_0/t)R; \end{aligned}$$

$$C_i(z, y_i, b_i) = c_i y_i + c_i^0 R + h_i I_i^1(z, b_i) + p_i I_i^2(z, b_i) - r_i(z + R) - r_i^0(b_i - z - R)$$

そこで総費用において第 $i+1$ 期の期首発注により満たされる第 $i$ 期のバックログ分の販売費用は第 $i$ 期の利得として計算されている。

第 $n$ 期の期末に過剰需要をもつならば仮定によりそれらもバックログされなければならない。この発注費用は架空の期間、第 $n+1$ 期に発注のみされたと考えることができる。よって期末発注費用 $C_{n+1}$ は

$$C_{n+1} = \begin{cases} 0, & x_n \geq 0 \\ c_{n+1}(-x_n), & x_n < 0 \end{cases}$$

第 $i$ 期の総期待費用 $C_i(z, y_i, b_i)$ の期待値 $E[C_i(z, y_i, b_i)]$ は

$$\begin{aligned} E[C_i(z, y_i, b_i)] &= \int_0^\infty C_i(z, y_i, b_i) \phi(b_i) db_i \\ &= c_i E[y_i] + \int_0^z \{h_i(z - G(1)b_i) - r_i b_i\} \phi(b_i) db_i + \int_z^{z/g(t_0/t)} \{(h_i + p_i)(z g^{-1}(z/b_i) \\ &\quad - G(g^{-1}(z/b_i))b_i) - p_i(z[1 - g^{-1}(z/b_i)]) - r_i z - r_i^0(b_i - z)\} \phi(b_i) db_i \\ &\quad + \int_{z/g(t_0/t)}^{(z+R)/g(t_0/t)} \{c_i^0 \{g(t_0/t)b_i - z\} + h_i(z g^{-1}(z/b_i) - G(g^{-1}(z/b_i))b_i) \\ &\quad + p_i(z[g^{-1}(z/b_i) - t_0/t] + b_i[G(1) - G(g^{-1}(z/b_i))] - (1 - t_0/t)g(t_0/t)) \\ &\quad - r_i g(t_0/t)b_i - r_i^0 \{1 - g(t_0/t)\}b_i\} \phi(b_i) db_i + \int_{(z+R)/g(t_0/t)}^\infty \{c_i^0 R + h_i(z g^{-1}(z/b_i) \\ &\quad - G(g^{-1}(z/b_i))b_i) + p_i(b_i[G(1) - G(g^{-1}(z/b_i))] - z[1 - g^{-1}(z/b_i)] - (1 - t_0/t)R) \\ &\quad - r_i(z + R) - r_i^0(b_i - z - R)\} \phi(b_i) db_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

である。ここで、 $E[y_i]$ は第 $i$ 期の発注量の期待値であり、特に

$$E[y_1] = z$$

である。第 $n$ 期の期末に発注される期待費用 $C_{n+1}$ の期待値 $E[C_{n+1}]$ は

$$\begin{aligned} E[C_{n+1}] &= c_{n+1} \left\{ \int_0^z 0 \cdot \phi(b_n) db_n + \int_z^{z/g(t_0/t)} \{b_n - z\} \phi(b_n) db_n \right. \\ &\quad \left. + \int_{z/g(t_0/t)}^{(z+R)/g(t_0/t)} (1 - g(t_0/t))b_n \phi(b_n) db_n + \int_{(z+R)/g(t_0/t)}^\infty (b_n - z - R) \phi(b_n) db_n \right\} \\ &= c_{n+1} \left\{ - \int_z^\infty (b_n - z) \phi(b_n) db_n + \int_{z/g(t_0/t)}^{(z+R)/g(t_0/t)} (z - g(t_0/t)b_n) \phi(b_n) db_n \right. \\ &\quad \left. - \int_{(z+R)/g(t_0/t)}^\infty R \phi(b_n) db_n \right\} \end{aligned}$$

である。よって総期待費用の期待値は

$$\sum_{i=1}^n E[C_i(z, y_i, b_i)] + E[C_{n+1}]$$

である。これを用いると問題は

$$\min_{z \geq 0} \left\{ \sum_{i=1}^n E[C_i(z, y_i, b_i)] + E[C_{n+1}] \right\}$$

と定式化できる。

総期待費用の期待値が $z$ に関する凸関数であれば、最適解は簡単に求まる。 $E[C_i(z, y_i, b_i)]$ の2階導関数は

$$\frac{d^2}{dz^2} E[C_i] = c_i \frac{d^2}{dz^2} E[y_i] + (h_i + p_i) \int_z^\infty \frac{\partial}{\partial z} g^{-1}(z/b_i) \phi(b_i) db_i + (r_i - r_i^0) \phi(z)$$

$$+ \{(1 - t_0/t)p_i - c_i^0 + r_i - r_i^0\} \{\phi((z+R)/g(t_0/t)) - \phi(z/g(t_0/t))\} / g(t_0/t)$$

であり、 $E[C_{n+1}]$ の導関数は

$$\frac{d^2}{dz^2} E[C_{n+1}] = c_{n+1} \{\phi((z+R)/g(t_0/t)) / g(t_0/t) - \phi(z/g(t_0/t)) / g(t_0/t) + \phi(z)\}$$

であるので、総期待費用の期待値の2階導関数が非負になるとは限らない。

**補題.** もし  $\frac{d^2}{dz^2} E[y_i] \geq 0$  であり、 $\phi(b_i)$  が  $b_i$  の非減少関数であるならば、総期待費用の期待値は  $z$  に関する凸関数である。

この節の最後に、発注量  $y_i$  についての性質を述べておく。もしある  $i$  に対して  $y_i \geq z$  であるならば、第  $i-1$  期までに生産された商品は残っておらず、それ以降の期間は第  $i$  期の期首に生産された商品をもって出発することとなる。この時、発注量  $y_i$  を第  $i-1$  期の在庫不足量  $y_i - z$  と第  $i$  期の期首发注量  $z$  に分割して考えると、次の性質が得られる。

**期間分割の性質.** 今、 $n$  期間における総期待費用を求めているとする。もし、任意の  $i, i=2, \dots, n$  に対して  $y_i \geq z$  であるならば、発注量  $z$  から始まる  $n$  期間の総期待費用は  $i-1$  期間問題と  $n-i+1$  期間問題の総期待費用の和として表すことができる。

$i_1, i_2, \dots, i_m$  を  $y_i \geq z$  を満たしている  $i$  とする。期間分割の性質を適用すると、 $n$  期間問題はある  $j$  に対して  $y_{i_j} = z, y_{i_j+1} < z, \dots, y_{i_j+1-1} < z, y_{i_j+1} = x_{i_j+1-1}$  である部分問題の和として表される。総期待費用を計算するに当たって難しい点は  $E[y_i]$  の計算にある。この性質を用いることにより、発注量が  $z$  未満であるような連続した期間をもつ問題に着目すればよいことがわかる。また、この部分問題において  $y_{i_j} = z$  であるとき、第  $i_j + 2k + 1$  期の期首发注量は  $l = 0, \dots, k-1$  に対して  $b_{i+2l}, z - b_{i+2l+1}, b_{i+2k}$  のうちのどれか1つの値をとり、第  $i_j + 2k$  期の期首发注量は  $l = 0, \dots, k-1$  に対して  $z - b_{i+2l}, b_{i+2l+1}$  のうちのどれか1つの値をとることがわかる。

## 4 動的計画法による定式化

割引率  $\alpha$  を用いたモデルについて動的計画法による定式化を行う。

$$\begin{aligned} r_i^0 &= r_{i+1}, r_i = \alpha r_{i+1}, c_i^0 = \alpha c_{i+1}^0, h_i = \alpha h_{i+1}, p_i = \alpha p_{i+1} \quad \text{for } i = 1, \dots, n-1 \\ c_i &= \alpha c_{i+1} \quad \text{for } i = 1, \dots, n \\ r_1 &= r, c_1 = c, c_1^0 = c^0, h_1 = h, p_1 = p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H(y, z) &= cy + \int_0^z \{h(z - G(1)b) - rb\} \phi(b) db + \int_z^{z/g(t_0/t)} \{(h+p)(zg^{-1}(z/b) \\ &\quad - G(g^{-1}(z/b))b) - p(z[1 - g^{-1}(z/b)]) - rz - \alpha r(b-z)\} \phi(b) db \\ &\quad + \int_{z/g(t_0/t)}^{(z+R)/g(t_0/t)} \{c_i^0 \{g(t_0/t)b - z\} + h(zg^{-1}(z/b) - G(g^{-1}(z/b))b) \\ &\quad + p(z[g^{-1}(z/b) - t_0/t] + b[G(1) - G(g^{-1}(z/b))] - (1 - t_0/t)g(t_0/t)) \\ &\quad - rg(t_0/t)b - \alpha r\{1 - g(t_0/t)\}b\} \phi(b) db + \int_{(z+R)/g(t_0/t)}^{\infty} \{c^0 R + h(zg^{-1}(z/b) \\ &\quad - G(g^{-1}(z/b))b) + p(b[G(1) - G(g^{-1}(z/b))] - z[1 - g^{-1}(z/b)] - (1 - t_0/t)R) \\ &\quad - r(z+R) - \alpha r(b-z-R)\} \phi(b) db \end{aligned}$$

$$O(z) = \alpha c \left\{ - \int_z^{\infty} (b-z)\phi(b) db + \int_{z/g(t_0/t)}^{(z+R)/g(t_0/t)} (z - g(t_0/t)b)\phi(b) db \right\}$$

$$- \int_{(z+R)/g(t_0/t)}^{\infty} R\phi(b)db \Big\}$$

とおく。

$f_n(y, w)$  を期首発注量を  $y$ 、前期から次期への繰越在庫量を  $w$  としたとき、 $n$  期間にわたる期待割引費用を最小にするという意味での最適発注政策をとったときの費用関数とする。このとき、最適性の原理により次の関数方程式を得る。

$$\begin{aligned} f_1(y, w) &= \min_{z \geq 0} \{H(y, z) + O(z)\} \\ f_n(y, w) &= \min_{z \geq 0} \left\{ H(y, z) + \alpha \left\{ \int_0^{z/g(t_0/t)} f_{n-1}(b+w, (y-b+w)^+) \phi(b) db \right. \right. \\ &\quad + \int_{z/g(t_0/t)}^{(z+R)/g(t_0/t)} f_{n-1}(z + \{1-g(t_0/t)\}b + w, 0) \phi(b) db \\ &\quad \left. \left. + \int_{(z+R)/g(t_0/t)}^{\infty} f_{n-1}(b-R+w, 0) \phi(b) db \right\} \right\} \end{aligned}$$

そこで、 $w^+ = \max\{0, w\}$  である。

求める解は  $f_n(z, 0)$  である。

## 5 まとめと今後の研究課題

本稿では、2 期間で腐敗する商品における多期間在庫モデルを扱った。期待総費用の最小化という評価基準の下で列挙による総和最小化および動的計画法の定式化を与えた。また、期間分割の性質を用いて発注量のとりうる値が得られた。具体的な計算により、3 期間では需要の分布  $\phi(\cdot)$  が増加関数であれば期待費用は  $z$  の凸関数であることがわかった。4 期間以上では発注量と繰越在庫についての再帰式を含むため、期待費用における性質を調べるのがたいへん困難である。

今後の研究課題として、発注量  $y_i$  の期待値の計算方法、動的計画法から得られる性質、腐敗期間と期待費用との関係についての問題が考えられる。

## 参考文献

- [1] Bellman R., Dynamic Programming, Princeton, N.J., Princeton University Press (1957).
- [2] Heymand D.P. and Sobel M.J., Handbooks in Operations Research and Management Science Vol.2, Elsevier Science Publishers (1990).
- [3] Kodama M. and Kitahara T., A Study of Unified Inventory Model on Various Demand (in Japanese), Society of Political Economy, Kyushu University, Vol.47, No.5-6 (1983) pp.49-72.
- [4] Kodama M., The Basis of Production and Inventory Control Systems (in Japanese), Kyushu University Press, Japan (1996).
- [5] Kodama M., Some Probabilistic Inventory Problems, Proceedings of APORS'94, World Scientific (1994) pp.585-592.
- [6] Ross S.M., Introduction to Stochastic Dynamic Programming, Academic Press, New York (1983).