数理解析研究所講究録 1207 巻 2001 年 67-78

集合値写像の凸性の遺伝性について

新潟大学大学院 自然科学研究科 数理科学専攻
西澤 正悟 (SHOGO NISHIZAWA)
Department of Mathematical Science, Graduate School of Science and Technology, Niigata University

新潟大学大学院 自然科学研究科 情報理工学専攻
田中　環 (TAMAKI TANAKA)
Division of Information Science, Graduate School of Science and Technology, Niigata University

ソフィア大学 数理・情報学部 数理・情報学科
PANDO GR. GEORGIEV
Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Mathematics and Informatics, Sofia University

Abstract: 集合値写像が順序錐で定義された錐凸性を持つとき、スカラー化によってその性質がスカラー化関数へどのように伝達（遺伝）されるかを体系づけることを目的とする。ここでは、集合を特徴づける 4 つのスカラー化関数においてそれぞれに遺伝される準凸性（準凹性）の関係を示す。

Keywords: 集合値写像、錐凸性、準凸関数。

1　はじめに

実数値関数の凸性は最適化問題の解析において有用な性質であり、数学のさまざまな分野で重要な役割を果たすことはよく知られている。例えば、分離定理や不動点定理、ミニマックス定理などは凸性との関連性が強い。これより、錐凸性を持つ集合値写像をスカラー化し、そのスカラー化関数にどんな凸性が遺伝されるかを調べ体系づけすることによって、集合値写像に対する不動点定理やミニマックス定理などに応用することができると考える。

2　集合値写像のスカラー化

X, Y を線形位相空間、 C を Y のある閉凸錐、S を Y のゼロベクトルの適当な近傍 $B = \operatorname{int} C \cap (2S/\overline{S})$ とし、以降この仮定を用いる。

2.1 スカラー化の指標

スカラー化の指標として次の関数を定義する。この関数は多目的計画法で用いられるチェビシェフ型関数の一般化となっている。([3])

$$h_C(y;k) := \inf\{t \mid y \in tk - C\}$$

ここで、 $h_C(\cdot;k)$ は $k \in \mathrm{int}\, C$ において正斉次性と劣加法性を満たすことが次のようにして分かる。

Lemma 2.1.1. 関数 $h_C(y;k)$ は、任意の実数 $\alpha > 0$ に対して、

$$h_C(\alpha y;k) = \alpha\, h_C(y;k)$$

を満たす（正斉次性）。ただし、$h_C(y;k) = \inf\{t \mid y \in tk - C\}\,, k \in \mathrm{int}\, C$ とする。

Proof.

(i) 任意の実数 $\alpha > 0$ に対して、$h_C(\alpha y;k) \geq \alpha\, h_C(y;k)$ を示す。
任意の実数 $\varepsilon > 0$ に対して、

$$t(\varepsilon) < h_C(\alpha y;k) + \varepsilon, \tag{2.1}$$

かつ

$$\alpha y \in t(\varepsilon)k - C. \tag{2.2}$$

を満たすような $t(\varepsilon)$ が存在する。
(2.2) より $y \in \frac{1}{\alpha}t(\varepsilon)k - C$ であるから、

$$h_C(y;k) \leq \frac{1}{\alpha}t(\varepsilon)$$

$\alpha > 0$ より、

$$\alpha\, h_C(y;k) \leq t(\varepsilon). \tag{2.3}$$

(2.1),(2.3) より、

$$\alpha\, h_C(y;k) < h_C(\alpha y;k) + \varepsilon$$

ここで、$\varepsilon > 0$ は任意なので、

$$\alpha\, h_C(y;k) \leq h_C(\alpha y;k).$$

(ii) 任意の実数 $\alpha > 0$ に対して、$h_C(\alpha y;k) \leq \alpha\, h_C(y;k)$ を示す。
任意の実数 $\varepsilon > 0$ に対して、

$$\alpha\, t(\varepsilon) < \alpha\, h_C(y;k) + \varepsilon, \tag{2.4}$$

$$y \in t(\varepsilon)k - C. \tag{2.5}$$

を満たすような $t(\varepsilon)$ が存在する。
(2.5) より $\alpha y \in \alpha\, t(\varepsilon)k - C$ であるから、

$$h_C(\alpha y; k) \leq \alpha\, t(\varepsilon) \tag{2.6}$$

(2.4),(2.6) より、

$$h_C(\alpha y; k) < \alpha\, h_C(y; k) + \varepsilon$$

ここで、$\varepsilon > 0$ は任意なので、

$$h_C(\alpha y; k) \leq \alpha\, h_C(y; k).$$

よって、(i),(ii) より、任意の実数 $\alpha > 0$ に対して、

$$h_C(\alpha y; k) = \alpha\, h_C(y; k)$$

∎

Lemma 2.1.2. 関数 $h_C(y; k)$ は、任意のベクトル $y_1, y_2 \in Y$ に対して、

$$h_C(y_1 + y_2; k) \leq h_C(y_1; k) + h_C(y_2; k)$$

を満たす（劣加法性）。ただし、$h_C(y; k) = \inf\{t \,|\, y \in tk - C\}, k \in \operatorname{int} C$ とする。
Proof. 任意の実数 $\varepsilon > 0$ に対して、

$$t_1(\varepsilon) < h_C(y_1; k) + \varepsilon, \tag{2.7}$$

かつ

$$y_1 \in t_1(\varepsilon)k - C. \tag{2.8}$$

を満たすような $t_1(\varepsilon)$ が存在する。また、
任意の実数 $\varepsilon > 0$ に対して、

$$t_2(\varepsilon) < h_C(y_2; k) + \varepsilon, \tag{2.9}$$

かつ

$$y_2 \in t_2(\varepsilon)k - C. \tag{2.10}$$

を満たすような $t_2(\varepsilon)$ が存在する。
任意のベクトル $y_1, y_2 \in Y$ と、任意の実数 $\lambda \in [0, 1]$ に対して、(2.8) より、

$$\lambda y_1 \in \lambda t_1(\varepsilon)k - C \tag{2.11}$$

(2.10) より、

$$(1-\lambda)y_2 \in (1-\lambda)t_2(\varepsilon)k - C \tag{2.12}$$

(2.11),(2.12) より、

$$\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2 \in \{\lambda t_1(\varepsilon) + (1-\lambda)t_2(\varepsilon)\}k - C$$

これより、

$$h_C(\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2; k) \leq \lambda t_1(\varepsilon) + (1-\lambda)t_2(\varepsilon)$$

よって、

$$h_C(\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2; k) < \lambda h_C(y_1) + (1-\lambda)h_C(y_2) + \varepsilon$$

ここで、$\varepsilon > 0$ は任意なので、

$$h_C(\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2; k) \leq \lambda h_C(y_1) + (1-\lambda)h_C(y_2)$$

ゆえに、

$$\begin{aligned} h_C(\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2; k) &\leq \lambda h_C(y_1; k) + (1-\lambda)h_C(y_2; k) \\ &= h_C(\lambda y_1; k) + h_C((1-\lambda)y_2; k) \quad (\text{Lemma 2.1.1.より}) \end{aligned}$$

∎

更に、

$$-h_C(-y; k) := \sup\{t \mid y \in tk + C\}$$

となることも容易に示すことが可能である。

2.2 スカラー化関数

関数 $h_C(y;k)$ より集合を特徴づける４つのタイプのスカラー化関数を考える。

(1) $\psi_C^F(x;k) := \sup\{h_C(y;k) \mid y \in F(x)\}$
(2) $\varphi_C^F(x;k) := \inf\{h_C(y;k) \mid y \in F(x)\}$
(3) $-\varphi_C^{-F}(x;k) := \sup\{-h_C(-y;k) \mid y \in F(x)\}$
(4) $-\psi_C^{-F}(x;k) := \inf\{-h_C(-y;k) \mid y \in F(x)\}$

集合値写像 F の x における像 $F(x)$ が１点から成る集合の場合は、これら４つの関数の値は一致するが、一般の場合は一致するとは限らず、その集合を支えるいくつかの支持点を持つことになる。この意味で、ベクトル値関数のチェビシェフ型スカラー化関数よりもスカラー化による情報の欠落が少ないと言える。この論文では、関数の凸性の遺伝性に注目しているためこれらの４つのタイプの支持点を解析の対象とする。

3 集合値写像の錐凸性

Difinition 3.1. 集合値写像 $F: X \to 2^Y$ とする。 任意の $a \in Y$ に対して、集合

$$\{x \in X \mid F(x) \cap (a - C) \neq \emptyset\}$$

が凸または空であるとき、F は C-*quasiconvex* と言われる。もし、$-F$ が C-*quasiconvex* ならば、F を C-*quasiconcave* と呼び、それは F が $(-C)$-*quasiconvex* であるのと同値である。

Remark 3.1. 上の定義の C-*quasiconvex* というのは、正確には [2, Definition 3.5] の *Ferro type* (-1)-*quasiconvex* のことであり、ここではそれを C-*quasiconvex* と呼ぶことにする。

Difinition 3.2. 集合値写像 $F: X \to 2^Y$ とする。

(a) F が任意のベクトル $x_1, x_2 \in X$ と、任意の実数 $\lambda \in [0,1]$ に対して、

$$F(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \subset F(x_1) - C$$

または

$$F(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \subset F(x_2) - C$$

を満たすとき、F は *type*-(v) C-*properly quasiconvex* と言われる。

(b) F が任意のベクトル $x_1, x_2 \in X$ と、任意の実数 $\lambda \in [0,1]$ に対して、

$$F(x_1) \subset F(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) + C$$

または

$$F(x_2) \subset F(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) + C$$

を満たすとき、F は *type*-(iii) C-*properly quasiconvex* と言われる。

もし、$-F$ が *type*-(v)[type-(iii)] C-*properly quasiconvex* ならば、F を *type*-(v)[type-(iii)] C-*properly quasiconcave* と呼び、それは F が *type*-(v)[type-(iii)] $(-C)$-*properly quasiconvex* であるのと同値である。

Difinition 3.3. 集合値写像 $F: X \to 2^Y$ とする。F が任意のベクトル $x_1, x_2 \in X$ と、任意の実数 $\lambda \in (0,1)$ に対して、

$$F(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \subset \mu F(x_1) + (1-\mu)F(x_2) - C$$

を満たすような $\mu \in [0,1]$ が存在するとき、F は *type*-(v) C-*naturally quasiconvex* と言われる。もし、$-F$ が *type*-(v) C-*naturally quasiconvex* ならば、F を *type*-(v) C-*naturally quasiconcave* と呼び、それは F が *type*-(v) $(-C)$-*naturally quasiconvex* であるのと同値

4 凸性の遺伝性

4.1 C-properly quasiconvexity からの遺伝性

Theorem 4.1.1. 集合値写像 $F : X \to 2^Y$ が *type-*(v) *C-properly quasiconvex* ならば、関数

$$\psi_1(x) := \inf_{k \in B} \psi_C^F(x;k) = \inf_{k \in B} \sup \{h_C(y;k) \mid y \in F(x)\}$$

は、準凸 (*quasiconvex*) である。

Proof. 定義より、任意のベクトル $x_1, x_2 \in X$ と、任意の実数 $\lambda \in [0,1]$ に対して、

$$F(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \subset F(x_1) - C$$

または

$$F(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \subset F(x_2) - C$$

であるから、ここで $F(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \subset F(x_1) - C$ を仮定すると、

$$\begin{aligned}
\psi_1(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) &:= \inf_{k \in B} \sup \{h_C(y;k) \mid y \in F(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)\} \\
&\le \inf_{k \in B} \sup \{h_C(y;k) \mid y \in F(x_1) - C\} \\
&= \inf_{k \in B} \sup_{\substack{y \in F(x_1) \\ c \in C}} h_C(y-c;k) \\
&\le \inf_{k \in B} \sup_{\substack{y \in F(x_1) \\ c \in C}} (h_C(y;k) + h_C(-c;k)) \quad (h_C(\cdot;k) \text{ の劣加法性より}) \\
&\le \inf_{k \in B} \sup_{y \in F(x_1)} h_C(y;k) \\
&= \psi_1(x_1) \\
&\le \max\{\psi_1(x_1), \psi_1(x_2)\}.
\end{aligned}$$

同様にして、$F(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \subset F(x_2) - C$ を仮定しても成り立つ。 ∎

Theorem 4.1.2. 集合値写像 $F : X \to 2^Y$ が *type-*(iii) *C-properly quasiconcave* ならば、関数

$$\psi_C^F(x;k) = \sup \{h_C(y;k) \mid y \in F(x)\}$$

は、準凹 (*quasiconcave*) である。ただし、$k \in \operatorname{int} C$ とする。

Proof. 定義より、任意のベクトル $x_1, x_2 \in X$ と、任意の実数 $\lambda \in [0,1]$ に対して、

$$F(x_1) \subset F(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) - C$$

または

$$F(x_2) \subset F(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) - C$$

であるから、ここで $F(x_1) \subset F(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) - C$ を仮定すると、

$$\begin{aligned}
\psi_C^F(x_1;k) &:= \sup\{h_C(y;k) \,|\, y \in F(x_1)\} \\
&\leq \sup\{h_C(y;k) \,|\, y \in F(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) - C\} \\
&= \sup_{\substack{y \in F(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \\ c \in C}} h_C(y-c;k) \\
&\leq \sup_{\substack{y \in F(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \\ c \in C}} (h_C(y;k) + h_C(-c;k)) \quad (h_C(\cdot;k) \text{ の劣加法性より}) \\
&\leq \sup_{y \in F(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)} h_C(y;k) \\
&= \psi_C^F(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2;k).
\end{aligned}$$

よって、

$$\min\left\{\psi_C^F(x_1;k), \psi_C^F(x_2;k)\right\} \leq \psi_C^F(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2;k).$$

同様にして、$F(x_2) \subset F(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) - C$ を仮定しても成り立つ。 ∎

Theorem 4.1.3. 集合値写像 $F : X \to 2^Y$ が *type*-(v) C-*properly quasiconcave* ならば、関数

$$\varphi_C^F(x;k) = \inf\{h_C(y;k) \,|\, y \in F(x)\}$$

は、準凹 (*quasiconcave*) である。ただし、$k \in \operatorname{int} C$ とする。

Proof. 定義より、任意のベクトル $x_1, x_2 \in X$ と、任意の実数 $\lambda \in [0,1]$ に対して、

$$F(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \subset F(x_1) + C$$

または

$$F(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \subset F(x_2) + C$$

であるから、ここで $F(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \subset F(x_1) + C$ を仮定すると、

$$\begin{aligned}
\varphi_C^F(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2;k) &:= \inf\{h_C(y;k) \,|\, y \in F(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)\} \\
&\geq \inf\{h_C(y;k) \,|\, y \in F(x_1) + C\} \\
&= \inf_{\substack{y \in F(x_1) \\ c \in C}} h_C(y+c;k) \\
&\geq \inf_{\substack{y \in F(x_1) \\ c \in C}} (h_C(y;k) - h_C(-c;k)) \quad (h_C(\cdot;k) \text{ の劣加法性より}) \\
&\geq \inf_{y \in F(x_1)} h_C(y;k) \\
&= \varphi_C^F(x_1;k) \\
&\geq \min\left\{\varphi_C^F(x_1;k), \varphi_C^F(x_2;k)\right\}.
\end{aligned}$$

よって、

$$\min\left\{\varphi_C^F(x_1;k), \varphi_C^F(x_2;k)\right\} \leq \varphi_C^F(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2;k).$$

同様にして、 $F(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \subset F(x_2) + C$ を仮定しても成り立つ。 ∎

Theorem 4.1.4. 集合値写像 $F : X \to 2^Y$ が *type*-(iii) C-*properly quasiconvex* ならば、関数

$$\varphi_C^F(x;k) = \inf\{h_C(y;k) \mid y \in F(x)\}$$

は、準凸 (*quasiconvex*) である。ただし、$k \in \operatorname{int} C$ とする。

Proof. 定義より、任意のベクトル $x_1, x_2 \in X$ と、任意の実数 $\lambda \in [0,1]$ に対して、

$$F(x_1) \subset F(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) + C$$

または

$$F(x_2) \subset F(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) + C$$

であるから、ここで $F(x_1) \subset F(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) + C$ を仮定すると、

$$\begin{aligned}
\varphi_C^F(x_1;k) &:= \inf\{h_C(y;k) \mid y \in F(x_1)\} \\
&\geq \inf\{h_C(y;k) \mid y \in F(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) + C\} \\
&= \inf_{\substack{y \in F(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \\ c \in C}} h_C(y+c;k) \\
&\geq \inf_{\substack{y \in F(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \\ c \in C}} (h_C(y;k) - h_C(-c;k)) \quad (h_C(\cdot;k) \text{ の劣加法性より}) \\
&\geq \inf_{y \in F(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)} h_C(y;k) \\
&= \varphi_C^F(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2;k).
\end{aligned}$$

よって、

$$\varphi_C^F(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2;k) \leq \max\left\{\varphi_C^F(x_1;k), \varphi_C^F(x_2;k)\right\}.$$

同様にして、$F(x_2) \subset F(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) + C$ を仮定しても成り立つ。 ∎

Corollary 4.1.1. 集合値写像 $F : X \to 2^Y$ が *type*-(v) C-*properly quasiconcave* ならば、関数

$$\psi_2(x) := \sup_{k \in B}(-\psi_C^{-F}(x;k)) = \sup_{k \in B} \inf\{-h_C(-y;k) \mid y \in F(x)\}$$

は、準凹 (*quasiconcave*) である。

Proof. Theorem 4.1.1 より、$-F$ が *type*-(v) C-*properly quasiconvex* とすると、$\inf_{k \in B} \psi_C^{-F}(x;k)$ は準凸である。これより、$\sup_{k \in B}(-\psi_C^{-F}(x;k))$ は準凹となるので、F が *type*-(v) C-*properly quasiconcave* であれば $\psi_2(x)$ は準凹である。 ∎

Corollary 4.1.2. 集合値写像 $F : X \to 2^Y$ が *type*-(iii) *C-properly quasiconvex* ならば、関数

$$-\psi_C^{-F}(x;k) = \inf\{-h_C(-y;k) \mid y \in F(x)\}$$

は、準凸 (*quasiconvex*) である。ただし、$k \in \operatorname{int} C$ とする。

Proof. Theorem 4.1.2 より、$-F$ が *type*-(iii) *C-properly quasiconcave* とすると、$\psi_C^{-F}(x;k)$ は準凹であるから、$-\psi_C^{-F}(x;k)$ は準凸といえる。これより、F が *type*-(v) *C-properly quasiconcave* であれば $-\psi_C^{-F}(x;k)$ は準凸である。 ∎

Corollary 4.1.3. 集合値写像 $F : X \to 2^Y$ が *type*-(v) *C-properly quasiconvex* ならば、関数

$$-\varphi_C^{-F}(x;k) = \sup\{-h_C(-y;k) \mid y \in F(x)\}$$

は、準凸 (*quasiconvex*) である。ただし、$k \in \operatorname{int} C$ とする。

Proof. Theorem 4.1.3 より、$-F$ が *type*-(v) *C-properly quasiconcave* とすると、$\varphi_C^{-F}(x;k)$ は準凹であるから、$-\varphi_C^{-F}(x;k)$ は準凸といえる。これより、F が *type*-(v) *C-properly quasiconvex* であれば $-\varphi_C^{-F}(x;k)$ は準凸である。 ∎

Corollary 4.1.4. 集合値写像 $F : X \to 2^Y$ が *type*-(iii) *C-properly quasiconcave* ならば、関数

$$-\varphi_C^{-F}(x;k) = \sup\{-h_C(-y;k) \mid y \in F(x)\}$$

は、準凹 (*quasiconcave*) である。ただし、$k \in \operatorname{int} C$ とする。

Proof. Theorem 4.1.4 より、$-F$ が *type*-(iii) *C-properly quasiconvex* とすると、$\varphi_C^{-F}(x;k)$ は準凸であるから、$-\varphi_C^{-F}(x;k)$ は準凹といえる。これより、F が *type*-(iii) *C-properly quasiconcave* であれば $-\varphi_C^{-F}(x;k)$ は準凹である。 ∎

4.2 C-quasiconvexity からの遺伝性

Theorem 4.2.1. 集合値写像 $F : X \to 2^Y$ が *C-quasiconvex* ならば、任意の $k \in B$ に対して、関数

$$\varphi_C^F(x;k) = \inf\{h_C(y;k) \mid y \in F(x)\}$$

は、準凸 (*quasiconvex*) である。

Proof. 関数 φ_C^F の定義より、任意のベクトル $x_1, x_2 \in X$ と、任意の正の実数 $\varepsilon > 0$ に対して、各 $i = 1, 2$ に対して、

$$z_i - t_i k \in -C, \tag{4.1}$$

かつ

$$t_i < \varphi_C^F(x_i;k) + \varepsilon. \tag{4.2}$$

を満たす $z_i \in F(x_i)$ と $t_i \in \boldsymbol{R}$ が存在する。
ここで、(4.1) より、$s_1 \leq s_2 (s_1, s_2 \in \boldsymbol{R})$ に対して、$s_1 k - C \subset s_2 k - C$ なので、

$$z_i \in t_i k - C \subset \max\{t_1, t_2\} k - C.$$

よって、F が C-*quasiconvex* であるから、任意の $\lambda \in [0,1]$ に対して、$y \in \max\{t_1, t_2\} k - C$ を満たす $y \in F(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2)$ が存在する。それは、(4.2) より、

$$\begin{aligned} h_C(y;k) &\leq \max\{t_1, t_2\} \\ &< \max\left\{\varphi_C^F(x_1;k), \varphi_C^F(x_2;k)\right\} + \varepsilon. \end{aligned}$$

を意味している。これより、

$$\varphi_C^F(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2; k) = \inf\{h_C(y;k) \mid y \in F(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2)\}.$$

ここで、$\varepsilon > 0$ は任意の実数であるから、

$$\varphi_C^F(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2; k) \leq \max\left\{\varphi_C^F(x_1;k), \varphi_C^F(x_2;k)\right\}.$$

∎

Corollary 4.2.1. 集合値写像 $F : X \to 2^Y$ が C-*quasiconcave* ならば、任意の $k \in B$ に対して、関数

$$-\varphi_C^{-F}(x;k) = \sup\{-h_C(-y;k) \mid y \in F(x)\}$$

は、準凹 (*quasiconcave*) である。
Proof. Theorem 4.2.1 より、$-F$ が C-*properly quasiconvex* とすると、任意の $k \in B$ に対して、$\varphi_C^{-F}(x;k)$ は準凸であるから、$-\varphi_C^{-F}(x;k)$ は準凹といえる。これより、F が C-*quasiconcave* であれば、任意の $k \in B$ に対して、$-\varphi_C^{-F}(x;k)$ は準凹である。 ∎

4.3 C-naturally quasiconvexity からの遺伝性

Theorem 4.3.1. 集合値写像 $F : X \to 2^Y$ が *type*-(v) C-*naturally quasiconvex* ならば、関数

$$\psi_C^F(x;k) = \sup\{h_C(y;k) \mid y \in F(x)\}$$

は、準凸 (*quasiconvex*) である。ただし、$k \in \operatorname{int} C$ とする。
Proof. 定義より、任意のベクトル $x_1, x_2 \in X$ と、任意の実数 $\lambda \in (0,1)$ に対して、

$$F(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2) \subset \mu F(x_1) + (1-\mu) F(x_2) - C$$

であるから、

$$
\begin{aligned}
\psi_C^F(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2;k) &:= \sup\{h_C(y;k)\,|\,y\in F(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\}\\
&\leq \sup\{h_C(y;k)\,|\,y\in \mu F(x_1)+(1-\mu)F(x_2)-C\}\\
&= \sup_{\substack{y_1\in F(x_1)\\ y_2\in F(x_2)\\ c\in C}} h_C(\mu y_1+(1-\mu)y_2-c;k)\\
&\leq \sup_{\substack{y_1\in F(x_1)\\ y_2\in F(x_2)\\ c\in C}} (h_C(\mu y_1;k)+h_C((1-\mu)y_2;k)+h_C(-c;k))\\
&\leq \sup_{\substack{y_1\in F(x_1)\\ y_2\in F(x_2)}} (\mu h_C(y_1;k)+(1-\mu)h_C(y_2;k))\\
&\leq \mu \sup_{y_1\in F(x_1)} h_C(y_1;k)+(1-\mu)\sup_{y_2\in F(x_2)} h_C(y_2;k)\\
&= \mu\psi_C^F(x_1;k)+(1-\mu)\psi_C^F(x_2;k) \qquad (4.3)\\
&\leq \max\left\{\psi_C^F(x_1;k),\psi_C^F(x_2;k)\right\}.
\end{aligned}
$$

∎

Remark 4.1. 上の Theorem 4.3.1 の (4.3) より、関数 ψ_C^F は、集合値写像の C-*naturally quasiconvexity* を実数値関数で考えたものになっており、それを *naturally quasiconvex* と呼ぶことにする。ただし、ここで注意すべきことは、比率 μ が同じ割合のまま集合値写像からスカラー化関数に遺伝され、実数値関数における普通の *quasiconvexity* と *naturally quasiconvexity* が同値になることである。

Corollary 4.3.1. 集合値写像 $F:X\to 2^Y$ が *type*-(v) C-*naturally quasiconcave* ならば、関数

$$-\psi_C^{-F}(x;k)=\inf\{-h_C(-y;k)\,|\,y\in F(x)\}$$

は、準凹 (*quasiconcave*) である。ただし、$k\in \operatorname{int} C$ とする。

Proof. Theorem 4.3.1 より、$-F$ が *type*-(v) C-*naturally quasiconvex* とすると、$\psi_C^{-F}(x;k)$ は準凸であるから、$-\psi_C^{-F}(x;k)$ は準凹といえる。これより、F が *type*-(v) C-*naturally quasiconcave* であれば、$-\psi_C^{-F}(x;k)$ は準凹である。 ∎

5 結論

集合値写像が C-quasiconvexity, C-properly quasiconvexity, C-naturally quasiconconvexity でいう準凸性を持てば、スカラー化関数には各々それらの準凸性が遺伝され準凸関数となる。また、集合値写像が C-quasiconcavity, C-properly quasiconcavity, C-naturally quasiconconcavity でいう準凹性を持てば、スカラー化関数には各々それらの準凹性が遺伝され準凹関数となることが分かった。

更に、ここで用いた4つのタイプのスカラー化関数のうち、(1) と (2) のスカラー化関数に対する凸性の遺伝性が分かると、(3) と (4) のスカラー化関数での遺伝性も分かる。集合値写像が同じタイプの錐凸性（錐凹性）を持つとき、(1) のスカラー化関数で準凸性（準凹性）が遺伝されると (4) のスカラー化関数では準凹性（準凸性）が遺伝され、(2) のスカラー化関数で準凸性（準凹性）が遺伝されると (3) のスカラー化関数では準凹性（準凸性）が遺伝されるという関係があることも示された。

参考文献

[1] P. Gr. Georgiev and T. Tanaka (2000). *Vector-valued set-valued variants of Ky Fan's inequality*, Journal of Nonlinear and Convex Analysis, Vol.1(3), pp.245–254.

[2] D. Kuroiwa, T. Tanaka, and T.X.D. Ha (1997). *On cone convexity of set-valued maps*, Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications, Vol.30(3), pp.1487–1496.

[3] 中山弘隆, 谷野哲三, **多目的計画法の理論と応用**, 計測自動制御学会, 1994.