数理解析研究所講究録 1208 巻 2001 年 140-158

無限遠で優二次的なポテンシャルをもつ シュレーディンガー方程式の平滑化作用について[1]

谷島 賢二 (Kenji Yajima)　　　　張 果平 (Guoping Zhang)[2]

東京大学大学院数理科学研究科

1 Introduction

一次元空間 $\mathbb{R}$ 上の時間依存型シュレーディンガー方程式に対する初期値問題

$$\begin{cases} i\dfrac{\partial u}{\partial t}=(D^2+V(x))u, & x\in\mathbb{R}^1,\ t\in\mathbb{R}, \\ u(0,x)=u_0(x), & x\in\mathbb{R}^1, \end{cases} \tag{1.1}$$

を考える。ただし $D=-i\partial/\partial x$ である. ポテンシャル $V(x)$ に対して次を仮定する。$V^{(j)}(x)$ は $V(x)$ の j 階微分, 自己共役作用素 A に対して $\langle A\rangle=(1+|A|^2)^{\frac{1}{2}}$ とする.

仮定 1.1 ポテンシャル $V(x)$ は実数値で C^3 級, ある正の定数 $R>0$ に対して次が $|x|\geq R$ において成立する：

(1) $V(x)$ は凸関数である.

(2) $j=1,2,3$ に対してある定数 C_j が存在して, $|V^{(j)}(x)|\leq C_j\langle x\rangle^{-1}|V^{(j-1)}(x)|$.

(3) 定数 $k>2$ に対して, $D_1\langle x\rangle^k\leq V(x)\leq D_2\langle x\rangle^k$, ただし $0<D_1\leq D_2<\infty$.

V が以上の条件を満たすとき V は（無限遠において）優二次的であるという.

仮定 1.1 のもとにおいて, $C_0^\infty(\mathbb{R})$ 上定義された作用素 $D^2+V(x)$ はヒルベルト空間 $L^2(\mathbb{R})$ において本質的に自己共役である. この作用素の閉包を H と書く. H は定義域 $D(H)=\{u\in L^2(\mathbb{R}):D^2u+Vu\in L^2(\mathbb{R})\}$ をもつ自己共役作用素で (1.1) の $L^2(\mathbb{R})$ における解は H の指数関数を用いて $u(t,x)=e^{-itH}u_0(x)$ と書ける。このノートでは方程式 (1.1) のある種の平滑化の性質についてのべ, 次にこの性質をもちいて優二次的なポテン

[1]文部科学省科学研究費課題番号 11304006 による補助を受けた研究である

[2]東燃国際奨学財団奨学生

シャルをもつ非線形シュレーディンガー方程式の初期値問題が L^2 において時間局所的に well-posed であることを, 非線形項が十分に弱くかつ空間的に局在している場合に証明する. $\theta(k,p)$ を $2 \le p \le \infty$, $2 < k < \infty$ に対して次のように定義する.

$$\theta(k,p) = \begin{cases} \dfrac{1}{k}\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{p}\right), & \text{if} \quad 2 \le p < 4; \\ \left(\dfrac{1}{4k}\right)_-, & \text{if} \quad p = 4; \\ \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{3}\left(1 - \dfrac{1}{p}\right)\left(1 - \dfrac{1}{k}\right), & \text{if} \quad 4 < p \le \infty, \end{cases}$$

ただし a_- は $< a$ なる任意の数とする.

定理 1.2 V は仮定 1.1 をみたすとする. $2 \le p \le \infty$, $\alpha + \beta \le \theta(k,p)$ とする. この時, 定数 $C > 0$ が存在し

$$\|g(t)\langle i\partial/\partial t\rangle^{\alpha}\langle H\rangle^{\beta}e^{-itH}u_0(x)\|_{L^p(\mathbb{R}_x, L^2(\mathbb{R}_t))} \le C\|g\|_{H^{\frac{1}{4}+\frac{1}{2k}}(\mathbb{R})}\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}_x)}, \tag{1.2}$$

がすべての $g \in H^{\frac{1}{4}+\frac{1}{2k}}(\mathbb{R})$ と $u_0 \in L^2(\mathbb{R})$ に対して成立する.

次の定理は, 空間変数 x を $\mathbb{R}$ のコンパクト区間に制限すれば, 定理 1.2 における指数 $\theta(k,p)$ を任意の $2 \le p \le \infty$ に対して $\dfrac{1}{2k}$ に置き換えて良いことを示す。

定理 1.3 V は仮定 1.1 をみたすとする. $K \subset \mathbb{R}$ はコンパクト区間, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ は $\alpha + \beta \le \dfrac{1}{2k}$ をみたすとする. この時, 定数 $C > 0$ が存在し, 次の不等式

$$\sup_{x \in K}\|g(t)\langle i\partial/\partial t\rangle^{\alpha}\langle H\rangle^{\beta}e^{-itH}u_0(x)\|_{L^2(\mathbb{R}_t)} \le C\|g\|_{H^{\frac{1}{4}+\frac{1}{2k}}(\mathbb{R}_t)}\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}_x)} \tag{1.3}$$

がすべての $g \in H^{\frac{1}{4}+\frac{1}{2k}}(\mathbb{R})$ と $u_0 \in L^2(\mathbb{R})$ に対して成立する.

(1.2) および (1.3) において $\langle i\partial/\partial t\rangle^{\alpha}\langle H\rangle^{\beta}e^{-itH} = \langle i\partial/\partial t\rangle^{\alpha+\beta}e^{-itH} = \langle H\rangle^{\alpha+\beta}e^{-itH}$ であることに注意. 楕円型方程式に対する L^p 評価および補間定理を用いれば定理 1.2 および定理 1.3 から次の系が直ちにしたがう。

系 1.4 V は仮定 1.1 をみたすとする. $2 \le p < \infty$, $K \subset \mathbb{R}$ はコンパクト区間とする. この時, 次の評価がある定数 $C > 0$ に対して成立する:

$$\|\langle D_x\rangle^{2\theta(k,p)}e^{-itH}u_0\|_{L^p(\mathbb{R}_x, L^2((-T,T)_t))} + \|\langle x\rangle^{k\theta(k,p)}e^{-itH}u_0\|_{L^p(\mathbb{R}_x, L^2((-T,T)_t))} \le C\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}_x)}.$$

$$\|\langle D_x\rangle^{1/k}e^{-itH}u_0\|_{L^2((-T,T)_t,L^2(K_x))}\le C\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R})}. \tag{1.5}$$

評価式 (1.5) から, $u_0\in L^2(\mathbb{R})$ なら殆どすべての $t\in\mathbb{R}$ に対して $e^{-itH}u_0(\cdot)\in H^{1/k}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$, したがって方程式 (1.1) の解 $u(t,x)$ は殆どすべての t において初期関数 u_0 より次数 $1/k$ だけより滑らかであることがわかる。楕円型方程式に対する L^p 評価とソボレフの埋蔵定理によって評価式 (1.2) から $\|g(t)e^{-itH}u_0(x)\|_{L^p(\mathbb{R}_x,L^q(\mathbb{R}_t))}\le C\|u_0\|_2$ の形の一連の評価式がえられる。この場合, つねに $q<p$ であることを注意しておく.

線形あるいは非線形の分散型方程式に対する平滑化の性質は加藤 ([K1] and [K2]) によって KdV 方程式あるいはシュレーディンガー方程式において発見されて以来, 多くの著者によって主に初期関数への収束問題および非線形方程式の初期値問題への応用と関連して深く研究されてきていて, たとえば [St], [P], [Br], [GV1], [Y1], [V], [CS], [KY], [Sj], [KPV], [BAD], [GV2], [BT], [HK], [Su], [H] など多くの文献が存在する. しかし, これらの文献で取り扱われているのはほとんどが方程式の係数が定数であるか無限遠方で定数に漸近する場合である。

シュレーディンガー方程式に対しては平滑化の性質はポテンシャルが無限遠方において高々二次関数的に増大する場合に, すなわち $|\beta|\ge 2$ の時に $|D^\beta V(x)|\le C_\beta$ である場合に, 一般化されて次の評価が知られている ([K3], [Y2]):

$$\|e^{-itH}u_0\|_{L^\theta((-T,T)_t,L^p(\mathbb{R}^n_x))}\le C\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n_x)}, \tag{1.6}$$

$$\|\Phi(x)(1-\Delta)^{\alpha/2}e^{-itH}u(x)\|_{L^\theta((-T,T)_t,L^p(\mathbb{R}^n_x))}\le C\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n_x)} \tag{1.7}$$

(高々一次関数的に増大する磁場のポテンシャルをもつシュレーディンガー方程式については [Y3] をみよ). ここで $T>0$ は任意の有限な数, $\Phi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ で $p,\theta\ge 2$ および $\alpha\ge 0$ は条件 $0\le\dfrac{2}{\theta}=2\alpha+n\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{p}\right)\le 1$ をみたすものとする. もちろん (1.6) では $\alpha=0$ とする. (1.6) の形の評価は L^p 平滑化作用と呼ばれる. $u(t,\cdot)$ が $p>2$ なる p に対して, 殆どすべての t に対して L^p に属し, L^p に属する関数は $u_0\in L^2(\mathbb{R}^n)$ よりも滑らかであると考えられるからである。また (1.7) の形の評価式は明白な理由によって differentiability improving property と呼ばれている。$p=\theta=2$ で $\alpha=1/2$ の場合 (1.7) は, (1.5) の $k=2$ の場合と同値であることに注意せよ.

しかし．ポテンシャルが無限遠方において優二次的である場合には, (1.6) や (1.7) のような形の評価にかんする文献は著者たちの知る限り見あたらない．この事実は, 方程式 (1.1) の基本解, すなわち発展作用素 e^{-itH} の超関数核 $E(t,x,y)$ の滑らかさあるいは有界性がポテンシャルの無限遠方での増大度が $C|x|^2$ を通過するとき劇的な転移をするということに関係していると思われる ([Y4]): すなわち, $V(x)=o(|x|^2)$ のとき $E(t,x,y)$ はすべての $t\neq 0$ において滑らかで, 空間的に有界, $V(x)=O(\langle x\rangle^2)$ の時には少なくとも小さい時間において同じ事が成立するのであるが, $V(x)\geq C\langle x\rangle^{2+\varepsilon}$, $\varepsilon>0$, の場合には $E(t,x,y)$ は以下なる点の近傍においての C^1 級にはならず, また空間的にも有界でない場合もある ([MY]). 評価式 (1.6) は $|t|$ が小さいときの基本解に対する評価 $|E(t,x,y)|\leq C|t|^{-n/2}$ の帰結であり, (1.7) は $x(t)=e^{itH}xe^{-itH}$ をハイゼンベルグ描像における位置作用素として, $\int_{-T}^{T}\Phi^2(x(t))dt$ が -1 階の擬微分作用素であることから得られる。これらの性質はポテンシャルが劣二次的であれば成立するが, 優二次的の場合には成立しない。われわれのこの研究の動機はこの $E(t,x,y)$ に対する滑らかさと有界性に関する性質の転移が方程式 (1.1) に対する平滑化作用にも遺伝するのか？を調べることにあった。

仮定 1.1 のもとで $E(t,x,y)$ は適当な滑らかさをもちその程度は任意の $\rho\in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ にたいして,

$$|\widehat{\rho E}(\tau,\xi,\eta)|\leq C(|\tau|+|\xi|^2+|\eta|^2)^{-1/k}, \tag{1.8}$$

とはかることができる, ただし ^ はフーリエ変換である ([Y4], Remark 1.2). ここで, Zygmund のよく知られた定理 ([Z]) によって一次元トーラス $\mathbb{T}=\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ 上のラプラシアン $H=D^2$ に対して評価式 $\|e^{-itH}u_0\|_{L^4(\mathbb{T}\times\mathbb{T})}\leq C\|u_0\|_{L^2(\mathbb{T})}$ が成り立つことを思い出そう．これから, トーラス $\mathbb{T}=\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ 上の自由シュレーディンガー方程式は $u_0\in L^2(\mathbb{T})$ の時, ほとんどすべての t に対して, 解が $u(t,\cdot)\in L^4(\mathbb{T})$ を満たすという意味での平滑化作用をもつ．一方, この H の基本解は $E_0(t,x,y)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-in^2t+in(x-y)}$ で, この E_0 は (t,x,y) に関して局所可積分ではなく, (1.8) をみたす関数は E_0 より滑らかであると考えて良い．このことことから優二次的なポテンシャルをもつシュレーディンガー方程式もまた適当な平滑化の作用をもつことが示唆される．われわれの主定理はこのことがじっさいに成立すること, さらに基本解 $E(t,x,y)$ に現れた滑らかさや有界性の転移は平滑化作用に遺伝しないことを示している．評価式 (1.2), (1.3) と (1.6), (1.7) とは x と t による積分順序がことなっており, 解の多少異なった性質をあらわすものと考えられるが, われわれは (1.2) および (1.3) を平滑化作用と呼ぶことにする．

実は (1.2) の形の評価, すなわち t についてさきに積分した形の評価式は既に [K1] に少しだけ違った形ではあるがある. すなわち [K1] では $M \in L^{n+\varepsilon}(\mathbb{R}^n) \cap L^{n-\varepsilon}(\mathbb{R}^n)$, $\varepsilon > 0$, の時

$$\|Me^{it\Delta}u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^{n+1}_{t,x})} \le C(\|M\|_{L^{n-\varepsilon}(\mathbb{R}^n)} + \|M\|_{L^{n+\varepsilon}(\mathbb{R}^n)})\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n_x)},$$

が証明されている ([KY] では右辺が $C\|M\|_{L^n(\mathbb{R}^n)}\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n_x)}$ で置き換えられることが示されている). [KPV] はこの形の評価式を一般化し様々な形の非線形方程式に応用している. また (1.7) の超局所化もあり, 例えば次の様な結果が知られていることも注意しておこう. H を適当なリーマン多様体上のラプラシアンとし, u_0 は U に台をもつものとする. U をでるすべての陪特性曲線が $t < 0$ において non-trapping であれば (1.7) は $\alpha = 1/2$ として成立する, そうでなければ成立しない ([CKS], [D1] [D2]).

作用素 H は下に有界であり, そのスペクトルは無限大に発散する単純固有値の列からなる. 固有値を $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots \to \infty$, 対応する正規化された固有関数を $\psi_1, \psi_2 \ldots$ と書く. 定理 1.2, 定理 1.3 の証明には, 次の $\lambda_n \to \infty$ における固有関数 ψ_n の L^p ノルムの漸近評価が重要な役割を果たす. 二つの量 A, B に対して, 適当な正の定数 c_1, c_2 が存在して $c_1A \le B \le c_2A$ が成り立つとき, $A \sim B$ と書くことにする.

定理 1.5 仮定 1.1 がみたされるとする. $\psi(x, E)$ を作用素 $H = -\Delta + V(x)$ の固有値 E の正規化された固有関数とする. この時, 以下が成立する:

(1) $1 \le p \le \infty$ とする. 十分大きい E に対して

$$\|\psi(x,E)\|_{L^p} \sim \begin{cases} C_pE^{-\theta(k,p)}, & \text{if} \quad p \neq 4; \\ CE^{-\frac{1}{4k}}(\log E)^{\frac{1}{4}}, & \text{if} \quad p = 4, \end{cases} \tag{1.9}$$

ここで定数 C_p は $p \notin (4-\varepsilon, 4+\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, なる p によらずにとれる.

(2) $K \subset \mathbb{R}$ をコンパクト区間とする. 十分大きな E に対して $\sup_{x\in K}|\psi(x,E)| \sim E^{-\frac{1}{2k}}$ である.

注意 1.6 (1.2) において $u_0(x) = \psi_n(x)$ とおけば

$$\|g(t)\langle i\partial/\partial t\rangle^{\alpha}\langle H\rangle^{\beta}e^{-itH}u_0(x)\|_{L^p(\mathbb{R}_x,L^2(\mathbb{R}_t))} = \|g\|_{L^2}\langle\lambda_n\rangle^{\theta(k,p)}\|\psi_n\|_{L^p(\mathbb{R})}.$$

したがって定理 1.5 (1) から定理 1.2 の条件 $\alpha + \beta \le \theta(k,p)$ をゆるめることができない, 同様に定理 1.5(2) から定理 1.3 の指数 $1/2k$ も *sharp* であることがわかる. 指数 $\theta(k,p)$ お

よび $1/2k$ は k の増加関数である．これは k が大きくなるにつれてより基本解の滑らかさが失われることに適合する k ([Y4])．p に関しては $\theta(k,p)$ は $2 \le p < 4$ においては増加，$4 < p$ では減少する．定理 1.5 の証明からわかるようにこれは固有関数 $\psi_n(x)$ の *turning point* 付近での挙動によって決まってくる．

定理 1.2, 定理 1.3 の応用として非線形シュレーディンガー方程式に対する初期値問題

$$\begin{cases} i\dfrac{\partial u}{\partial t} = -\triangle u + V(x)u + f(x,u), & x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{1.10}$$

の L^2 well-posedness を証明する．$r \ge 1$, $\delta > 0$ に対して次のように定義する:

$$X = L^4(\mathbb{R}_x; L^{2r}_{loc}(\mathbb{R}_t)) \cap C(\mathbb{R}_t, L^2(\mathbb{R}_x)),\ X_\delta = L^4(\mathbb{R}_x; L^{2r}((-\delta,\delta)_t)) \cap C((-\delta,\delta)_t, L^2(\mathbb{R}_x));$$
$$Y = L^{2r}_{loc}(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x) \cap C(\mathbb{R}_t, L^2(\mathbb{R}_x)),\ Y_\delta = L^{2r}((-\delta,\delta)_t, L^{2r}_{loc}(\mathbb{R}_x)) \cap C((-\delta,\delta)_t, L^2(\mathbb{R}_x)).$$

定理 1.7 V は仮定 1.1 をみたすとする．$1 \le r < \dfrac{2k}{2k-1}$, $\phi(x) \in L^{\frac{4}{2-r}}(\mathbb{R})$ とする．非線形項 $f(x,u)$ は次をみたすとする:

$$|f(x,u)| \le C|\phi(x)||u|^r, \qquad x \in \mathbb{R},\ u \in \mathbb{C}, \tag{1.11}$$
$$|f(x,u) - f(x,v)| \le C|\phi(x)||u-v|(|u|^{r-1} + |v|^{r-1}), \quad x \in \mathbb{R},\ u,v \in \mathbb{C}. \tag{1.12}$$

この時，初期値問題 (1.10) は任意の $u_0 \in L^2(\mathbb{R})$ に対して X において局所的に適切である，すなわち，適当な $\delta > 0$ に対して (1.10) は X_δ にただ一つの解 $u(t,x)$ をもち，写像 $L^2(\mathbb{R}) \ni u_0 \mapsto u \in X_\delta$ は連続である．さらに f が

$$f(x,u)\overline{u} \text{ is real for } x \in \mathbb{R},\ u \in \mathbb{C}, \tag{1.13}$$

をみたせば (1.10) は X において時間大域的に適切である．すなわち，解 $u(t,x)$ は $\mathbb{R}$ 全体に一意的に延長され，写像 $L^2(\mathbb{R}) \ni u_0 \mapsto u \in X_T$ は任意の $T > 0$ に対して連続である．

定理 1.8 V は仮定 1.1 をみたすとする．$1 \le r < \dfrac{k}{k-1}$, $K \subset \mathbb{R}$ はコンパクト区間とする．非線形項 f は $x \notin K$ に対して $f(x,u) = 0$ でつぎをみたすとする．

$$|f(x,u)| \le C|u|^r, \qquad x \in K,\ u \in \mathbb{C}, \tag{1.14}$$
$$|f(x,u) - f(x,v)| \le C|u-v|(|u|^{r-1} + |v|^{r-1}), \quad x \in K,\ u,v \in \mathbb{C}. \tag{1.15}$$

この時，初期値問題 (1.10) は任意の $u_0 \in L^2(\mathbb{R})$ に対して Y において局所的に適切である．もし f がさらに (1.13) をみたせば (1.10) は Y において時間大域的に適切である．

以下に定理の証明の概要を与える．2 節で定理 1.5 を Titchmarsh の本 [T1], [T2] にある Langer の turning point theory をもとにして証明する．3 節では定理 1.2, 定理 1.3 を定理 1.5 から導く．定理 1.7, 定理 1.8 は 4 節において標準的な縮小作用の原理によって証明される．

2 L^p estimate of eigenfunctions

$\psi(x,E)$ を固有値問題

$$-\psi''(x)+V(x)\psi(x)=E\psi(x) \tag{2.16}$$

の正規化された, すなわち $\|\psi(\cdot,E)\|_{L^2(\mathbb{R})}=1$ をみたす固有関数とする．次の評価 (2.18), (2.19) は Titchmarsh ([T1], [T2]) による．十分大きな $E>0$ に対して, 方程式 $V(X)=E$ の根を X と書く．$x>X$ において $V(x)>E$, $0\le x<X$ において $V(x)<E$ である．

$$\zeta(x)=\int_X^x\sqrt{E-V(t)}dt, \tag{2.17}$$

とおく．二乗根の枝は $x>X$ の時, $\arg\zeta(x)=\pi/2$, $x<X$ の時 $\arg\zeta(x)=-\pi$ と取る．

補題 2.1 記号を上の通りとする．定数 C_{E+} が存在して, $E\to\infty$ の時

$$\psi(x,E)=C_{E+}^{-1}[E-V(x)]^{-\frac14}\{(\pi\zeta/2)^{\frac12}H_{1/3}^{(1)}(\zeta)+O\left(\frac{E^{-\frac12}X^{-1}e^{-\mathrm{Im}\zeta}|\zeta|^{1/6}}{1+|\zeta|^{1/6}}\right)\} \tag{2.18}$$

が $x>0$ に関して一様に成立する．定数は次の評価をみたす．

$$C_{E+}\sim(XE^{-\frac12})^{\frac12}. \tag{2.19}$$

$x<0$ においても同様な評価が成立する．

(2.18) の右辺を $C_{E+}^{-1}\psi^+(x,E)$ と書き, $C_{E-}^{-1}\psi^-(x,E)$ を $x<0$ における ψ の表現とする．補題 2.1 から

$$\begin{aligned}\|\psi(x,E)\|_{L^p(\mathbb{R})} &\sim \|\psi(x,E)\|_{L^p(\mathbb{R}^+)}+\|\psi(x,E)\|_{L^p(\mathbb{R}^-)}\\ &\sim X^{-\frac12}E^{\frac14}(\|\psi^+(x,E)\|_{L^p(\mathbb{R}^+)}+\|\psi^-(x,E)\|_{L^p(\mathbb{R}^-)})\end{aligned} \tag{2.20}$$

である. $\psi^+(x,E)$ の L^p ノルムを評価する. $\psi^-(x,E)$ も同様に評価される. $q(y)$, $Q(x)$ を

$$q(y) = \frac{V(yX)}{V(X)}, \qquad Q(y) = \begin{cases} -\int_y^1 \sqrt{1-q(s)}ds, & \text{if} \quad y < 1; \\ i\int_1^y \sqrt{q(s)-1}ds, & \text{if} \quad y > 1 \end{cases} \tag{2.21}$$

と定義する. ζ は次の様にあらわされる:

$$\zeta(x) = E^{\frac{1}{2}} X Q(x/X).$$

次は初等的に証明できる.

補題 2.2 V は仮定 1.1 をみたすとする. $K > 1$ とする. この時, 適当な定数 L が存在して, 次が $|X| \geq L$ に関して一様に成立する:

$$\begin{aligned} 1-q(y) &\sim 1-y, &&\text{for } 0 \leq y \leq 1, \\ q(y)-1 &\sim y-1, &&\text{for } 1 \leq y \leq K, \\ q(y)-1 &\sim y^k, &&\text{for } y \geq K, \end{aligned} \tag{2.22}$$

かつ

$$\begin{aligned} Q(y) &\sim -(1-y)^{3/2}, &&\text{for } 0 \leq y \leq 1, \\ -iQ(y) &\sim (y-1)^{3/2}, &&\text{for } 1 \leq y \leq K, \\ -iQ(y) &\sim y^{1+k/2}, &&\text{for } y \geq K. \end{aligned} \tag{2.23}$$

以下, E は対応する X が補題 2.2 の条件 $|X| \geq L$ をみたすように取る.

$$\psi^+(x,E) = E^{-\frac{1}{4}}[1-q(x/X)]^{-\frac{1}{4}} G(E^{\frac{1}{2}} X Q(x/X), E)$$

と書いて変数変換を施せば,

$$\int_0^\infty |\psi^+(x,E)|^p dx = X E^{-\frac{p}{4}} \int_0^\infty |1-q(y)|^{-\frac{p}{4}} |G(E^{\frac{1}{2}} X Q(y), E)|^p dy.$$

(2.18) を $G(x,E)$ に代入する. 剰余項 $O(\ldots)$ を含む項は補題 2.2 を用いて簡単に評価できる。次の様に定義する.

$$\delta(p) = \begin{cases} (4-p)^{-1}, & \text{if} \quad p < 4; \\ \log(E^{\frac{1}{2}} X), & \text{if} \quad p = 4; \\ (p-4)^{-1}(E^{\frac{1}{2}} X)^{\frac{p-4}{6}}, & \text{if} \quad p > 4. \end{cases}$$

補題 2.3 定数$C>0$が存在して，十分大きなすべての$E \geq E_0$に対して次が成立する．

$$\int_0^\infty |1-q(y)|^{-\frac{p}{4}} \left(E^{-\frac{1}{2}} X^{-1} e^{-E^{1/2}X \mathrm{Im}\ Q(y)} \frac{|E^{1/2}XQ(y)|^{\frac{1}{6}}}{(1+|E^{1/2}XQ(y)|)^{\frac{1}{6}}} \right)^p dy \leq C^p (E^{\frac{1}{2}}X)^{-p} \delta(p). \tag{2.24}$$

$H^{(1)}_{\frac{1}{3}}(\zeta)$を含む項を評価するのに，$H^{(1)}_{\frac{1}{3}}(\zeta)$の次の性質を使う (cf. [T1] (7.1.8), (7.8.5), (7.8.7)):

(1) $\zeta = -z < 0$の時，$H^{(1)}_{\frac{1}{3}}(\zeta) = \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-\frac{1}{6}\pi i}\{J_{\frac{1}{3}}(z) + J_{-\frac{1}{3}}(z)\}$で，

$$\zeta^{\frac{1}{2}} H^{(1)}_{\frac{1}{3}}(\zeta) = \begin{cases} 2^{\frac{3}{2}} \pi^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{3}\pi i}\{\cos(z-(\pi/4)) + O(z^{-1})\} & (z \to \infty), \\ \dfrac{2^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{3}} \dfrac{e^{\frac{1}{3}\pi i}}{\Gamma(2/3)} z^{\frac{1}{6}} (1+O(z)) & (z \to 0). \end{cases} \tag{2.25}$$

(2) $\zeta = iw$が純虚数で$w \geq 0$の時，$H^{(1)}_{\frac{1}{3}}(\zeta) = \frac{2}{\pi} e^{-\frac{2}{3}\pi i} K_{\frac{1}{3}}(w)$で

$$\zeta^{\frac{1}{2}} H^{(1)}_{\frac{1}{3}}(\zeta) = \begin{cases} O(e^{-w}) & (w \to \infty), \\ 2^{\frac{1}{3}} e^{-\frac{1}{6}\pi} \pi^{-1} \Gamma(1/3) w^{\frac{1}{6}} + O(w^{\frac{3}{2}}) & (w \to 0). \end{cases} \tag{2.26}$$

補題 2.4 正の定数$C>0$が存在して$E \geq E_0$において次が成立する:

$$\int_0^\infty |(1-q(y))^{-\frac{p}{4}} |\zeta^{\frac{1}{2}} H^{(1)}_{\frac{1}{3}}(\zeta)|^p dy \leq C^p \delta(p), \quad \zeta = E^{1/2}XQ(y). \tag{2.27}$$

証明. 積分を$\int_0^1 + \int_1^K + \int_K^\infty \cdots dy = II_1 + II_2 + II_3$と分解する．$0 \leq y \leq 1$では$\zeta = E^{1/2}XQ(y) \sim -E^{1/2}X(1-y)^{3/2} < 0$. $N>0$を十分大きくとってII_1を$N < E^{1/2}X(1-y)^{3/2}$をみたす部分での積分II_{11}とそのほかの部分II_{12}に分割する．(2.25)の第一式をII_{11}に，第二式をII_{12}に適用すれば

$$II_{11} \leq C^p \int_0^{1-N^{\frac{2}{3}}(E^{\frac{1}{2}}X)^{-\frac{2}{3}}} (1-y)^{-\frac{p}{4}} dy \leq C^p \delta(p), \tag{2.28}$$

$$II_{12} \leq C^p (E^{1/2}X)^{\frac{p}{6}} \int_0^{N^{\frac{2}{3}}(E^{1/2}X)^{-\frac{2}{3}}} y^{-\frac{p}{4}} y^{\frac{p}{4}} dy = C^p N^{\frac{2}{3}} (E^{1/2}X)^{\frac{p-4}{6}} \leq C^p \delta(p). \tag{2.29}$$

$1 \le y \le K$ なら $q(y)-1 \sim y-1$ で $w=-i\zeta \sim E^{1/2}XQ(y)(y-1)^{3/2}>0$ である. 積分 II_2 を $w \ge 1$ の部分 II_{21} と $0 \le w \le 1$ の部分 II_{22} に分割し, (2.26) の第一式を II_{21} に第二式を II_{22} に適用すると,

$$II_{21} \le C^p \int_{1+C(E^{1/2}X)^{-2/3}}^{K} (y-1)^{-\frac{p}{4}} dy \le C^p\,\delta(p). \tag{2.30}$$

$$II_{22} \le C^p \int_0^{C(E^{1/2}X)^{-2/3}} y^{-\frac{p}{4}}(E^{1/2}Xy^{3/2})^{\frac{p}{6}} dy \le C^p(E^{1/2}X)^{\frac{p-4}{6}} \le C^p\delta(p). \tag{2.31}$$

$K \le y < \infty$ では, $q(y)-1 \sim y^k$, $w \sim E^{\frac{1}{2}}Xy^{1+\frac{k}{2}}$. したがって (2.26) から

$$II_3 \le C^p \int_K^{\infty} y^{-\frac{kp}{4}} e^{-cpE^{1/2}Xy^{1+\frac{k}{2}}} dy \le C^p e^{-cpE^{1/2}X} \le C^p\delta(p). \tag{2.32}$$

あわせて, (2.27) が得られる. ∎

補題 2.5 定数 $C>0$ が存在して, 次が十分大きな $E \ge E_0$ に対して成立する:

$$\int_0^1 |(1-q(y))^{-\frac{p}{4}}|\zeta^{\frac{1}{2}} H^{(1)}_{\frac{1}{3}}(\zeta)|^p dy \ge C^p\delta(p), \quad \zeta = E^{1/2}XQ(y)$$

Proof. 積分を II_{11} と書く. N を (2.25) の第一式で $|O(1/z)| \le 1/10$ が $z \ge N$ に対して成立する様に取り, 次に $C>0$ を, $z=-\zeta \sim E^{\frac{1}{2}}X(1-y)^{\frac{3}{2}} \ge N$ が $CN^{2/3}(E^{1/2}X)^{-2/3} < 1-y < 1$ に対して成立するように取る. (2.25) から, 十分大きな $E \ge E_0$ に対して

$$\begin{aligned} II_{11} \ge\ & C^p \int_{N^{2/3}(E^{1/2}X)^{-2/3}<1-y<1} (1-y)^{-p/4} \left|\cos\left(\zeta-\frac{\pi}{4}\right)+O\left(\frac{1}{\zeta}\right)\right|^p dy \\ \ge\ & (C/2)^p \int_{N^{2/3}(E^{1/2}X)^{-2/3}<1-y<1,|\cos(\zeta-\pi/4)|>\sqrt{2}/2} (1-y)^{-p/4} dy \ge \varepsilon_N C^p\delta(p) \end{aligned}$$

である. ただし $\varepsilon_N>0$ である. ∎

定理 1.5 の証明. まず (1) を示す.

$$\|\psi(x,E)\|_{L^p(0,\infty)} \sim X^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}\left(\int_0^\infty |1-q(y)|^{-\frac{p}{4}}|G(E^{\frac{1}{2}}XQ(y),E)|^p dy\right)^{\frac{1}{p}}.$$

である. ゆえに (2.24), (2.27) から $p \notin (4-\varepsilon, 4+\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ なる p によらない定数 C_p を用いて

$$\|\psi(x,E)\|_{L^p(0,\infty)} \sim X^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}\delta(p)^{\frac{1}{p}} \sim \begin{cases} C_p E^{-\frac{1}{k}(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}, & \text{if} \quad p<4; \\ CE^{-\frac{1}{4k}}(\log E)^{1/4}, & \text{if} \quad p=4; \\ C_p E^{\frac{k-4}{12k}-\frac{k-1}{3pk}}, & \text{if} \quad p>4 \end{cases} \tag{2.33}$$

が得られる. 同様に $\|\psi(x,E)\|_{L^p(\mathbb{R}^-)}$ を評価すれば (1.9) の上からの評価が得られる. 下からの評価は補題 2.5 から明らかである.

(2) を示す. (2.18) は $x \in K$ に対しても一様に成立することに注意する. (2.19) から

$$\left|C_{E+}^{-1}(E-V(x))^{-\frac{1}{4}}O\left(\frac{E^{-\frac{1}{2}}X^{-1}e^{-\mathrm{Im}\zeta}|\zeta|^{1/6}}{1+|\zeta|^{1/6}}\right)\right| \le CX^{-\frac{1}{2}}(E^{-\frac{1}{2}}X^{-1}). \tag{2.34}$$

$x \in K$ の時一様に, $\zeta = -z \sim -E^{\frac{1}{2}}X$ $(E \to \infty)$ だから (2.25) から

$$C_{E+}^{-1}[E-V(x)]^{-\frac{1}{4}}(\pi\zeta/2)^{\frac{1}{2}}H_{1/3}^{(1)}(\zeta) \sim X^{-\frac{1}{2}}\left\{\cos\left(z-\frac{\pi}{4}\right)+O(E^{-\frac{1}{2}}X^{-1})\right\} \tag{2.35}$$

$X \sim E^{\frac{1}{k}}$ だから (2) は (2.34) と (2.35) からでる. ∎

3 Smoothing properties

定理 1.5 から定理 1.2, 定理 1.3 を導く. 解を

$$e^{-itH}u_0(x) = \sum_{n=1}^\infty e^{-it\lambda_n}\hat{u}_0(n)\psi_n(x) \tag{3.1}$$

と表現する. ただし $\hat{u}_0(n) = \int_{\mathbb{R}} u_0(x)\psi_n(x)dx$, $n=1,2,\ldots$ である。仮定 1.1 のもとで

$$\Delta\lambda_n \equiv \lambda_{n+1}-\lambda_n \ge C\lambda_n^{\frac{k-2}{2k}}, \tag{3.2}$$

したがって $\lambda_n \ge Cn^{\frac{2k}{k+2}}$, $n=1,2,\ldots$ であることが知られている (cf. e.g. [Y4]).

補題 3.1 十分大きな ℓ に対して $u_0 \in D(H^\ell)$ とする．この時

$$\|g(t)e^{-itH}u_0(x)\|^2_{L^2(\mathbb{R}_t)} \le C_a\|g\|^2_{H^{\frac{1}{4}+\frac{1}{2k}}(\mathbb{R})} \sum_{n=1}^{\infty} |\hat{u}_0(n)\psi_n(x)|^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{3.3}$$

証明 定理 1.5 によって (3.1) は一様に収束する．$\hat{g}$ の台の直径が $< 2^j$ なら (3.2) から，各 λ に対して $\hat{g}(\lambda+\lambda_n) \neq 0$ なる λ_n の個数は高々$C2^{j\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{k}\right)}$ である．ゆえに，Plancherel の定理から

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)e^{-itH}u_0(x)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\sum_{n=1}^{\infty} \hat{g}(\lambda+\lambda_n)\hat{u}_0(n)\psi_n(x)|^2 d\lambda$$
$$\le C2^{j\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{k}\right)} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{g}(\lambda+\lambda_n)\hat{u}_0(n)\psi_n(x)|^2 d\lambda \le C2^{j\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{k}\right)} \|\hat{g}\|^2_{L^2} \sum_{n=1}^{\infty} |\hat{u}_0(n)\psi_n(x)|^2. \tag{3.4}$$

一般の場合には dyadic decomposition $\sum_{j=-\infty}^{\infty} \hat{h}_j(\lambda) = 1$ を

$$\mathrm{supp}\ \hat{h}_0 \subset \{\lambda : |\lambda| < 1\}, \quad \mathrm{supp}\ \hat{h}_{\pm j} \subset \{\lambda : \pm 2^{|j|-2} < \lambda < \pm 2^{|j|}\},\ j = 1, 2, \ldots.$$

と取り，$g = \sum_{j=-\infty}^{\infty} g_j$, $\hat{g}_j = \hat{g}\hat{h}_j$ と分解する．(3.4) から

$$\|g(t)e^{-itH}u_0(x)\|^2_{L^2(\mathbb{R}_t)} \le C \sum_{j=-\infty}^{\infty} \|\hat{g}_j\|^2_{L^2(\mathbb{R})} 2^{j\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{k}\right)} \sum_{n=1}^{\infty} |\hat{u}_0(n)\psi_n(x)|^2$$
$$\le C\|g\|^2_{H^{\frac{1}{4}+\frac{1}{2k}}(\mathbb{R})} \sum_{n=1}^{\infty} |\hat{u}_0(n)\psi_n(x)|^2. \quad \blacksquare$$

Minkowski の不等式によって

$$\left\| \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\hat{u}_0(n)\psi_n(x)|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^p} = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} |\hat{u}_0(n)\psi_n(x)|^2 \right\|^{1/2}_{L^{p/2}} \le \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\hat{u}_0(n)|^2 \|\psi_n(x)\|^2_{L^p} \right)^{1/2}.$$

右辺は定理 1.5 によって

$$C_p \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\hat{u}_0(n)|^2 \lambda_n^{-2\theta(p)} \right)^{1/2} = C_p \|H^{-\theta(p)}u_0\|_{L^2}. \tag{3.5}$$

(3.3) と (3.5) をあわせて

$$\|g(t)e^{-itH}u_0(x)\|_{L^p(\mathbb{R}_x,L^2(\mathbb{R}_t))} \le C_p\|g\|_{H^{\frac{1}{4}+\frac{1}{2k}}(\mathbb{R})}\|H^{-\theta(p)}u_0\|_{L^2(\mathbb{R})}. \tag{3.6}$$

$D(H^\ell)$ は $L^2(\mathbb{R})$ で稠密だから, (3.6) は $L^2(\mathbb{R})$ において成立する. ∎

定理 1.3 の証明. 定理 1.5 (2) から

$$\sup_{x\in K}\sum_{n=1}^{\infty}|\hat{u}_0(n)|^2|\psi_n(x)|^2 \le C\sum_{n=1}^{\infty}|\lambda_n^{-\frac{1}{2k}}\hat{u}_0(n)|^2 = C\|H^{-\frac{1}{2k}}u\|^2_{L^2(\mathbb{R})}. \tag{3.7}$$

(3.3) と (3.7) とを合わせて定理 1.3 を得る. ∎

4 非線形方程式への応用

定理 1.7 と定理 1.8 を証明する. 証明は同様であるので定理 1.8 のみを示し, 定理 1.7 に対しては必要な修正を指摘するにとどめる. 以下, $u(t,x)$ の変数を省略し, $u(t)$ あるいは u と書くことがある. g を $|t|\le\delta$ の時 $g(t)=1$ と取れば, 定理 1.2, 定理 1.3 から

$$\|\langle i\partial/\partial t\rangle^\alpha\langle H\rangle^\beta e^{-itH}u_0\|_{L^p(\mathbb{R}_x,L^2([-\delta,\delta]_t))} \le C_\delta\|u_0\|_{L^2}, \quad \alpha+\beta=\theta(k,p), \quad p\ge 2; \tag{4.1}$$

$$\sup_{x\in K}\|\langle i\partial/\partial t\rangle^{1/2k}e^{-itH}u_0\|_{L^2([-\delta,\delta]_t)} \le C_\delta\|u_0\|_{L^2}. \tag{4.2}$$

定理 1.8 の証明 $t\ge 0$ において証明する. $t\le 0$ の場合も同様である. 同値な積分方程式

$$u(t) = e^{-itH}u_0 - i\int_0^t e^{-i(t-s)H}f(x,u(s))ds \tag{4.3}$$

を考える. $\delta>0$ に対して $K_\delta=[0,\delta]\times K$ と書きバナッハ空間 $Y_\delta(K)$ を

$$Y_\delta(K) = C([0,\delta],L^2(\mathbb{R}))\cap L^{2r}(K_\delta), \quad \|u\|_{Y_\delta(K)} \equiv \|u\|_{L^\infty([0,\delta],L^2(\mathbb{R}))} + \|u\|_{L^{2r}(K_\delta)}$$

と, 非線形写像 $\Psi: Y_\delta(K)\to Y_\delta(K)$ を

$$\Psi(u) = e^{-itH}u_0 - i\Phi(u), \qquad \Phi(u) = \int_0^t e^{-i(t-s)H}f(x,u(s))ds \tag{4.4}$$

と定義する. $B_M=\{u\in Y_\delta(K):\|u\|_{Y_\delta(K)}\le M\}$ と書く.

補題 4.1 Ψ は $Y_\delta(K)$ 上 *well defined* である. $\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R})}$ のみによる定数 $M>0$ と $\delta>0$ が存在してつぎが成立する: Ψ は B_M をその中に写し,

$$\|\Psi(u)-\Psi(v)\|_{Y_\delta(K)} \le \frac{1}{2}\|u-v\|_{Y_\delta(K)}, \quad u,v\in B_M. \tag{4.5}$$

証明. $u_0\in L^2(\mathbb{R})$ なら明らかに $e^{-itH}u_0\in C(\mathbb{R},L^2(\mathbb{R}))$. (4.2) とソボレフの埋蔵定理から $e^{-itH}u_0\in L^\infty(K_x,L^{2r}([0,\delta]_t))$. ゆえに $e^{-itH}u_0\in Y_\delta(K)$ で

$$\|e^{-itH}u_0\|_{Y_\delta(K)} \le c_1\|u_0\|_{L^2}. \tag{4.6}$$

$\chi(s<t)$ を $0<s<t$ で $\chi(s<t)=1$, その他で $\chi(s<t)=0$ なる関数とする. $x\notin K$ で $f(x,u)=0$ の仮定と (1.14) より, $u\in Y_\delta(K)$ なら $f(x,u(t,x))\in L^2([0,\delta]_t\times\mathbb{R}_x)$ で

$$\|f(x,u(t,x))\|_{L^2(K_\delta)} \le C\|u\|^r_{L^{2r}(K_\delta)} \tag{4.7}$$

であることがわかる. これから $\Phi(u)\in C([0,\delta],L^2(\mathbb{R}))$ と

$$\|\Phi(u)\|_{L^\infty([0,\delta];L^2(\mathbb{R}))} \le C\delta^{\frac{1}{2}}\|u\|^r_{L^{2r}(K_\delta)} \tag{4.8}$$

が従う. Minkowski の不等式と (4.2), (4.7) によって

$$\begin{aligned}
\|\Phi(u)\|_{L^{2r}(K_\delta)} &\le \int_0^\delta \|\|\chi(s<t)e^{-itH}\{e^{isH}f(x,u(s,x))\}\|_{L^{2r}(K_\delta)}ds \\
&\le C\int_0^\delta \|f(x,u(s,x))\|_{L^2(K)}ds \le C\delta^{\frac{1}{2}}\|f(x,u)\|_{L^2(K_\delta)} \\
&\le C\delta^{\frac{1}{2}}\|u\|^r_{L^{2r}(K_\delta)}.
\end{aligned} \tag{4.9}$$

(4.9) と (4.6), (4.8) をあわせて Ψ は $Y_\delta(K)$ 上 well-defined であることがわかる. またこれらから, 小さい $\delta>0$ には依存しない定数 c_1, c_2 を取って

$$\|\Psi u\|_{Y_\delta(K)} \le \|e^{-itH}u_0\|_{Y_\delta(K)} + \|f(u)\|_{Y_\delta(K)} \le c_1\|u_0\|_{L^2} + c_2\delta^{\frac{1}{2}}\|u\|^r_{Y_\delta(K)}. \tag{4.10}$$

したがって, M を $M>2c_1\|u_0\|_{L^2}$, $\delta<(2c_2M^{r-1})^{-2}$ と取れば, $\|u\|_{Y_\delta(K)}\le M$ の限り $\|\Psi u\|_{Y_\delta(K)}\le 2c_1\|u_0\|_{L^2}<M$. ゆえに $\Psi(B_M)\subset B_M$ となる. Ψ が (4.5) をみたすことを示すのに,

$$\Psi(u_1)-\Psi(u_2) = -i\int_0^t e^{-i(t-s)H}[f(x,u_1(s))-f(x,u_2(s))]ds$$

を評価する. Minkowski の不等式と Hölder の不等式から

$$
\begin{aligned}
\|\Psi(u_1)-\Psi(u_2)\|_{L^\infty([0,\delta]_t;L^2(\mathbb{R}_x))} &\le \int_0^\delta \|f(x,u_1(s))-f(x,u_2(s))\|_{L^2(K)}ds \\
&\le C\int_0^\delta \||u_1-u_2|(|u_1|^{r-1}+|u_2|^{r-1})\|_{L^2(K)}ds \\
&\le C\int_0^\delta \|u_1(s)-u_2(s)\|_{L^{2r}(K)}(\|u_1\|^{r-1}_{L^{2r}(K)}+\|u_2\|^{r-1}_{L^{2r}(K)})ds \\
&\le C\delta^{\frac12}(\|u_1\|^{r-1}_{L^{2r}(K_\delta)}+\|u_2\|^{r-1}_{L^{2r}(K_\delta)})\|u_1-u_2\|_{L^{2r}(K_\delta)}.
\end{aligned}
\tag{4.11}
$$

同様に, (4.6) から Minkowski の不等式と Hölder の不等式を使って

$$
\begin{aligned}
\|\Psi(u_1)-\Psi(u_2)\|_{L^{2r}(K_\delta)} &\le \int_0^\delta \|\chi(s<t)e^{-itH}e^{isH}[f(x,u_1)-f(x,u_2)]\|_{L^{2r}(K_\delta)}ds \\
&\le C\int_0^\delta \|f(x,u_1(s,x))-f(x,u_2(s,x))\|_{L^2(\mathbb{R}_x)}ds \\
&\le C\delta^{\frac12}(\|u_1\|^{r-1}_{L^{2r}(K_\delta)}+\|u_2\|^{r-1}_{L^{2r}(K_\delta)})\|u_1-u_2\|_{L^{2r}(K_\delta)}.
\end{aligned}
\tag{4.12}
$$

(4.11) と (4.12) をあわせて

$$
\|\Psi(u_1)-\Psi(u_2)\|_{Y_\delta(K)} \le c_3\delta^{\frac12}(\|u_1\|^{r-1}_{Y_\delta(K)}+\|u_2\|^{r-1}_{Y_\delta(K)})\|u_1-u_2\|_{Y_\delta(K)}, \tag{4.13}
$$

となり δ を $\delta<\min\{(2c_2M^{r-1})^{-2},(4c_3M^{r-1})^{-2}\}$ と選べば (4.5) が得られる. ∎

定理 1.8 の証明の続き. 縮小写像の原理を用いれば, 補題 4.1 から Ψ が唯一の固定点 $u\in B_M$ をもち (4.3) は $Y_\delta(K)$ においてただ一つの解 u をもつことがわかる. 解が初期値 u_0 に連続的に依存するのをみるのに $u_0,\tilde u_0\in L^2(\mathbb{R})$ を取り u, $\tilde u$ を対応する解とする. この時, (4.6) と (4.13) から

$$
\|u-\tilde u\|_{Y_\delta(K)} \le c_1\|u_0-\tilde u_0\|_{L^2}+c_3\delta^{\frac12}(\|u\|^{r-1}_{Y_\delta(K)}+\|\tilde u\|^{r-1}_{Y_\delta(K)})\|u-\tilde u\|_{Y_\delta(K)}
$$

したがって $\|u-\tilde u\|_{Y_\delta(K)}\le c\|u_0-\tilde u_0\|_{L^2}$ が小さい $\delta>0$ に対して成立する.

f が (1.13) をみたせば $\|u(t)\|_{L^2}=\|u_0\|_{L^2}$ であることを示そう. これが示せれば, 解 $u(t)$ は $[0,\infty)$ に一意的にのばせる. 解の存在時間の長さは $\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}_x)}$ のみによるからである. また, $u(t,\cdot)$ は $L^2(\mathbb{R}_x)$-値連続関数だから $L^2(\mathbb{R})\ni u_0\mapsto u\in C([0,T],L^2(\mathbb{R}))\cap L^{2r}([0,T]_t\times K)$

が任意の $T>0$ に対しても連続なことがわかり, 証明が終了する. $\|u(t)\|_{L^2}=\|u_0\|_{L^2}$ を示すには, (4.3) の右辺の $\|\cdot\|^2_{L^2(\mathbb{R}_x)}$ を次のように計算すればよい. $L^2(\mathbb{R}_x)$ の内積とノルムを $(\cdot,\cdot)$, $\|\cdot\|$, $f(t,x)=f(t,u(t,x))$ と書く.

$$\begin{aligned}\|u(t)\| &= \left\|e^{-itH}u_0 - i\int_0^t e^{-i(t-s)H}f(s,x)ds\right\|^2\\ &= \|u_0\|^2_{L^2} - 2\mathrm{Re}\left(u_0, i\int_0^t e^{isH}f(s,x)ds\right) + \int_0^t\int_0^t (e^{isH}f(s,x), e^{irH}f(r,x))dsdr.\end{aligned}$$

右辺の最後の二項は最後の二重積分がつぎに等しいことから互いにうち消し合う:

$$\begin{aligned}&\int_0^t \left(f(s,x), \int_0^s e^{-i(s-r)H}f(r,x)dr\right)ds + \int_0^t \left(\int_0^r e^{-i(r-s)H}f(s,x)ds, f(r,x)\right)dr\\ &= \int_0^t (f(s,x), iu(s) - ie^{-isH}u_0))ds + \int_0^t (iu(r) - ie^{-irH}u_0, f(r,x))dr\\ &= 2\mathrm{Re}\left(u_0, i\int_0^t e^{isH}f(s,x)ds\right).\end{aligned}$$

ここで, 第一のステップで u が解であること, 第二のステップで (1.13) を使った. ∎

定理 1.7 の証明. 定理 1.8 の証明と同様なので必要な修正部分を指摘するにとどめる. $Y_\delta(K)$ の代わりにノルムを

$$\|u\|_{X_\delta} = \|u\|_{L^\infty([0,\delta]_t;L^2(\mathbb{R}_x))} + \|u\|_{L^4(\mathbb{R}_x;L^{2r}([0,\delta]_t))}$$

と定義したバナッハ空間 $X_\delta = C([0,\delta]_t;L^2(\mathbb{R}_x)) \cap L^4(\mathbb{R}_x;L^{2r}([0,\delta]_t))$ を用いる. 非線形作用素 Φ, Ψ を (4.4) で定義する. $B_M=\{u\in X_\delta : \|u\|_{X_\delta}\le M\}$ とおいて, 与えられた $u_0\in L^2(\mathbb{R})$ にたいして, Ψ が $\|u_0\|_{L^2}$ のみによって定まる $\delta>0$, $M>0$ に対して B_M の縮小作用素であることを示す. $e^{-itH}u_0\in X_\delta$ で $\|e^{-itH}u_0\|_{X_\delta}\le C\|u_0\|_{L^2}$ あることを示すのに, (4.1) を (4.2) の代わりに用いる. ソボレフの埋蔵定理によって $e^{-itH}u_0\in L^4(\mathbb{R}_x;L^{2r}([0,\delta]_t))$ がわかる. f に対する仮定から

$$\begin{aligned}\|f(u)\|_{L^\infty([0,\delta]_t;L^2(\mathbb{R}_x))} &\le \int_0^\delta \|f(x,u(s))\|_{L^2}ds \le C\int_0^\delta \||\phi(x)||u(s)|^r\|_{L^2}ds\\ &\le C\delta^{\frac12}\left\{\int_{[0,\delta]\times\mathbb{R}} |\phi(x)|^2|u(t,x)|^{2r}dtdx\right\}^{\frac12} = C\delta^{\frac12}\{\int_{\mathbb{R}}|\phi(x)|^2\|u(t,x)\|^{2r}_{L^{2r}([0,\delta]_t)}dx\}^{\frac12}\\ &\le C\delta^{\frac12}\|\phi\|_{L^{\frac{4}{2-r}}(\mathbb{R})}\|u\|^r_{L^4(\mathbb{R}_x;L^{2r}([0,\delta]_t))} \le C\delta^{\frac12}\|u\|^r_{X_\delta}.\end{aligned}$$

(4.1) と (4.14) から

$$\|f(x,u(t,x))\|_{L^4(\mathbb{R}_x;L^{2r}([0,\delta]_t))} \le C\delta^{\frac{1}{2}}\|u\|^r_{X_\delta}; \tag{4.15}$$

したがって, 適当な M と δ をとれば Ψ は B_M を B_M に写すことが示せる. 証明の残りは定理 1.8 の証明を繰り返せば良いから省略する. ∎

References

[BAD] M.Ben-Artzi and A.Devinatz, *Local smoothing and convergence properties of Schrödinger type equations,* J. Funct. Anal. **101** (1991), 231-254.

[BT] Ben-Artzi and Trèves, *Uniform estimates for a class of evolution equations,* J. Funct. Anal. **120** (1994), 264–299.

[B] J. Bourgain, *Fourier transform restriction phenomena for certain lattice subsets and application to non-linear evolution equations I, Schrödinger equation*, GAFA. **3** (1993), 107–156.

[Br] Ph. Brenner, *On scattering and everywhere defined scattering operator for nonlinear Klein-Gordon equation*, J. Diff. Eq. **56** (1985), 310–344.

[CKS] W.Craig, T.Kappeler and W.Strauss, *Microlocal dispersive smoothing for the Schrödinger equation*, Comm. Pure Appl. Math. **48** (1995), 769–860.

[CS] P.Constantin and J.C.Saut, *Local smoothing properties of Schrödinger equations,* Indiana Univ. Math. J. **38** (1989), 791–810.

[D1] S.Doi, *Smoothing effects for Schrödinger evolution groups on Riemannian manifolds,* Duke Math. J. **82** (1996), 679–706.

[D2] S.Doi, *Commutator algebra and abstract smoothing effect,* J. Funct. Anal.,**168** (1999), 428–469.

[F] Fujiwara, D., *Remarks on convergence of the Feynman path integrals*, Duke Math. J. **47** (1980), 41-96.

[GV1] J. Ginibre and G. Velo, *Scattering theory in the energy space for a class of nonlinear Schrödinger equations*, J. Math. Pures et Appl. **64** (1985), 363–401.

[GV2] , J. Ginibre and G. Velo, *Smoothing properties and retarded estimates for some dispersive evolution equations*, Comm. Math. Phys. **144** (1992), 163-188.

[H] T. Hoshiro, *Mourre's method and smoothing properties of dispersive equations,* Comm. Math. Phys. **202** (1999), 255-265.

[HK] N. Hayashi and K. Kato, *Analyticity in time and smoothing effect of solutions to nonlinear Schrödinger equations*, Commun. Math. Phys. **184** (1997), 273—300.

[K1] T. Kato, *Wave operators and similarity for some non-selfadjoint operators*, Math. Ann. **162** (1966), 258–279.

[K2] T. Kato, *On the Cauchy problem for the (generalized) Korteweg-de Vries equation,* Studies in Appl. Math., Adv. Math. Suppl. Studies **8** (1983), 93–128.

[K3] T. Kato, *Nonlinear Schrödinger equations*, Lect. Notes for Physics **345** "Schrödinger Operators" (1988).

[KY] T. Kato and K. Yajima, *Some examples of smooth operators and the associated smoothing effect*, Rev. Math. Phys. **1** (1989) 481-496.

[KPV] C. E. Kenig, G. Ponce and L. Vega, *Oscillatory integrals and regularity of dispersive equations*, Indiana Univ. Math. J.. **40** (1991), 33–69.

[MY] A. Martinez and K. Yajima, *On the Fundamental Solution of Semiclassical Schrödinger Equations at Resonant Times*, to appear in Commun. Math. Phys.

[P] H. Pecher, *Nonlinear small data scattering for wave and Klein-Gordon equation*, Math. Z. **185** (1984), 261-270.

[Sj] P.Sjölin, *Local regularity of solutions to nonlinear Schrödinger equations,* Ark. Mat. **28** (1990), 145–157.

[St] R. S. Strichartz, *Restrictions of Fourier transforms to a quadratic surface and decay of solutions of wave equations*, Duke Math. J. **44** (1977), 704–714.

[Su] M.Sugimoto, *Global smoothing properties of generalized Schrödinger equations,* J. Anal. Math. **76** (1998), 191–204.

[T1] E.C.Titchmarsh, *Eigenfunction expansions associated with second-order differential equations, Part 1, 2nd edition* Oxford University Press (1962).

[T2] E.C.Titchmarsh, *Eigenfunction expansions associated with second-order differential equations, Part 2,* Oxford University Press (1958).

[V] L. Vega, *Schrödinger equations: Pointwise convergence to the initial data*, Proc. A. M. S. **120** (1988), 874-878.

[Y1] K. Yajima, *Existence of evolution for time dependent Schrödinger equations*, Commun. Math. Phys. **110** (1987), 415–426.

[Y2] K.Yajima, *On smoothing property of Schrödinger propagators*, Lecture Notes in Mathematics, **1450**, 20–35.

[Y3] K. Yajima, *Schrödinger evolution equation with magnetic fields*, J. d'Analyse Math. **56** (1991), 29–76.

[Y4] K.Yajima, *Smoothness and non-smoothness of the fundamental solution of time dependent Schrödinger equations*, Commun. Math. Phys. **181** (1996), 605–629.

[Z] A. Zygmund, *On the Fourier coefficients and transforms of functions of two variables*, Studia Math. **50** (1974), 189–201.