数理解析研究所講究録 1208 巻 2001 年 159-169

Scattering by magnetic fields at large separation in two dimensions

愛媛大学工学部　伊藤宏　(Hiroshi Ito)
岡山大学理学部　田村英男　(Hideo Tamura)

1　序

次のような2次元 Schrödinger 作用素

$$H_d = (-i\nabla - A_1(x) - A_2(x-d))^2, \quad d \in \boldsymbol{R}^2$$

の散乱問題を考える. 各 A_1, A_2 はコンパクトな台をもつ磁場 b_1, b_2 を表すベクトルポテンシャルである. $|d| \to \infty$ のときの散乱振幅の漸近挙動を求めるのがここでの目的である. 磁場 b_j として, コンパクトな台をもつ滑らかな磁場または原点だけに台のある δ-型磁場を考える.

1個の δ–型磁場をもつ Schrödinger 作用素の散乱問題は, 磁場を閉じ込めた無限に細長い1本のソレノイドによる電子の散乱問題に対応する. 1959年 Aharonov と Bohm は, このモデルの散乱振幅を計算することで, Aharonov–Bohm 効果 = AB 効果を理論的に導き出した ([2]). このモデルは原点中心の回転に関して不変であり, Bessel 関数を用いた具体的な計算が可能である. 特に, (3) に見るように散乱振幅も簡単な形に表現できる. しかし, δ–型磁場が2つの場合にはそのようなアプローチは不可能なのでまったく別の方法, 超局所解析など, を用いて解析する.

ここでは, [10, 11] で得られた結果を中心に述べる.

2　散乱振幅, 固有関数

この節では, 散乱振幅の定義や固有関数の性質などについて述べる.

2.1　$b \in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^2)$ の場合

磁場 $b \in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^2)$ をもつ2次元 Schrödinger 作用素は

$$H(A) = (-i\nabla - A)^2 = \sum_{j=1}^{2}(-i\partial_j - a_j)^2, \quad \partial_j = \partial/\partial x_j,$$

で与えられる. ただし, $A = (a_1(x), a_2(x)) : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$ はベクトルポテンシャルで $b = \nabla \times A = \partial_1 a_2 - \partial_2 a_1$ を満たすものである. たとえば,

$$A_b(x) = (-\partial_2\varphi(x), \partial_1\varphi(x)), \quad \varphi = (2\pi)^{-1}\int \log|x-y|\, b(y)\, dy,$$

とおくと, $\nabla \times A_b = \Delta\varphi = b$ となり, 磁場 b を表すベクトルポテンシャルである. また, このポテンシャルの $|x| \to \infty$ での挙動は,

$$A_b(x) = \alpha\,(-x_2/|x|^2, x_1/|x|^2) + O(|x|^{-2})$$

である. ここに,

$$\alpha := (2\pi)^{-1} \int b(x)\,dx$$

は 磁場 b の磁束と呼ばれる.

Remak. この挙動から, $\alpha \neq 0$ なら A_b は遠距離型 $O(|x|^{-1})$ であることがわかる. ところで, 磁場 b を表すベクトルポテンシャルの選び方は無数にある. 実際, ゲージ変換 $A \to A + \nabla g$ だけの不定性がある. しかし, どのようにゲージを選んでも $\alpha \neq 0$ である限り, 磁場 b を表すベクトルポテンシャルは短距離型 $O(|x|^{-1-\varepsilon})$, $\varepsilon > 0$, には出来ない.

ここでは次のようなベクトルポテンシャルを採用する.

Lemma 2.1 磁場 b を表すベクトルポテンシャル $A \in C^\infty$ で $|x| \gg 1$ において

$$A(x) = A_\alpha(x) = \alpha(-x_2/|x|^2, x_1/|x|^2)$$

となるものが存在する.

しばらくの間, ベクトルポテンシャル A は上の補題を満たすものとして $(H(A), H_0)$ に対する散乱振幅の定義について述べる. ただし, $H_0 = -\Delta$ である. 一般に摂動 $H(A) - H_0$ は遠距離型であるが, 通常の波動作用素

$$W_\pm(H(A), H_0) = s - \lim_{t\to\pm\infty} \exp(itH(A))\exp(-itH_0)$$

が存在し漸近完全性

$$\mathrm{Ran}\, W_-(H(A), H_0) = \mathrm{Ran}\, W_+(H(A), H_0).$$

が成り立つ ([13]). 散乱作用素は,

$$S(H(A), H_0) = W_+^*(H(A), H_0)W_-(H(A), H_0)$$

で定義されユニタリ作用素となる.

さて,

$$\varphi_0(x;\theta,\lambda) = \exp(i\sqrt{\lambda}\,x\cdot\theta), \quad \lambda > 0,\ \theta \in S^1,$$

とおくと, これは H_0 の一般化された固有関数である, $H_0\varphi_0 = \lambda\varphi_0$. いま, $F : L^2(\boldsymbol{R}^2) \to L^2((0,\infty); d\lambda) \otimes L^2(S^1)$ を

$$(Fu)\,(\lambda,\theta) = 2^{-1/2}(2\pi)^{-1} \int \bar{\varphi}_0(x;\theta,\lambda)u(x)\,dx = 2^{-1/2}\hat{u}(\sqrt{\lambda}\theta),$$

で定義すると, これは H_0 のスペクトル表現を与える, $FH_0F^* = \lambda\times$. すると, H_0 と $S(H(A), H_0)$ が可換であるので (一般論から) 散乱作用素は次の分解をもつ：

$$S(H(A), H_0) \simeq FS(H(A), H_0)F^* = \int_0^\infty \oplus S(\lambda; H(A), H_0)\, d\lambda, \tag{1}$$

ここに, $S(\lambda; H(A), H_0) : L^2(S^1) \to L^2(S^1)$ は, エネルギー $E > 0$ における散乱行列と呼ばれる. その積分核を $S(\theta', \theta; \lambda)$ で表すと, 入射方向 $\omega \in S^1$, 散乱方向 $\tilde{\omega} \in S^1$, エネルギー $E > 0$ に対する散乱振幅 $f(\omega \to \tilde{\omega}; E)$ が,

$$f(\omega \to \tilde{\omega}; E) = c(E)\,(S(\tilde{\omega}, \omega; E) - \delta(\tilde{\omega} - \omega))$$

で定義される. ここに, $c(E) = (2\pi/i\sqrt{E})^{1/2}$.

Remark 物理的には, エネルギー $E > 0$, 入射方向 ω をもつ荷電粒子のビームが磁場 b で散乱されたとき、$\tilde{\omega}$ 方向に散乱される割合は微分断面積 $|f(\omega \to \tilde{\omega}; E)|^2$ に比例する, と考えられている.

2.2　1個の δ–型磁場の場合

1個の δ–型磁場による散乱理論は具体的な計算可能で Aharonov–Bohm 以来多くの結果がある (cf. [1, 3, 16]).

ベクトルポテンシャルが

$$A_\alpha(x) = \alpha\left(-x_2/|x|^2, x_1/|x|^2\right) = \alpha\left(-\partial_2 \log|x|, \partial_1 \log|x|\right). \tag{2}$$

で与えられる場合を考える. このとき, 簡単な計算で $\nabla \times A_\alpha = 2\pi\alpha\delta(x)$ であることがわかる. すなわち, A_α は原点のみにサポートをもち, 磁束が α である磁場を与えていると考えられる.

このポテンシャルは原点での特異性が強く $C_0^\infty(\boldsymbol{R}^2 \setminus \{0\})$ に制限した Schrödinger 作用素 $H_\alpha := H(A_\alpha)$ の自己共役拡張は一意には決まらない. ここでは, H_α を次の定義域をもつ自己共役拡張とする.

$$\mathcal{D}(H_\alpha) = \{u \in L^2 : H_\alpha u \in L^2,\ \lim_{|x|\to 0} |u(x)| < \infty\}.$$

ただし, $H_\alpha u$ は $\boldsymbol{R}^2 \setminus \{0\}$ 上の distribution と考える.

Remark. α が整数でないなら条件 $\{\lim_{|x|\to 0} |u(x)| < \infty\}$ をもっと強い条件

$$\{\lim_{|x|\to 0} |u(x)| = 0\}$$

に置き換えても同じ定義域を表す. すなわち, ”粒子は磁場にふれない” という原点での境界条件である.

H_α は原点中心の回転と可換であり, 極座標を用いて書き直すことができる. 結局は、Bessel の微分方程式の計算に帰着される.

実際, H_α の一般化された固有関数 $\varphi_\mp(x;\lambda,\omega)$, $H_\alpha\varphi_\mp(\cdot;\lambda,\omega)=\lambda\varphi_\mp(\cdot;\lambda,\omega)$, は

$$\varphi_\mp(x;\lambda,\omega)=\sum_{l\in Z}\exp(\pm i|l-\alpha|\pi/2)\exp(il\gamma(x;\pm\omega))J_{|l-\alpha|}(\sqrt{\lambda}|x|)$$

で与えられる. ここで, J_ν は Bessel 関数. また, 通常の波動作用素の存在と漸近完全性が成り立つことも知られている ([16]). 散乱振幅 $f(\omega\to\tilde{\omega};E)$ も前と同様に定義されるが、具体的な計算が可能で,

$$f=\left(\frac{2\pi}{i\sqrt{E}}\right)^{1/2}\left((\cos\ \alpha\pi-1)\,\delta(\tilde{\omega}-\omega)-\sin\alpha\pi\ \text{v.p.}\,\frac{ie^{i([\alpha]+1)(\tilde{\omega}-\omega)}}{\pi\left(e^{i(\tilde{\omega}-\omega)}-1\right)}\right) \tag{3}$$

と簡単な形になる ([3, 16]). ここで, $[\alpha]$ は α を超えない最大の整数, $\tilde{\omega}-\omega$ は ω からの $\tilde{\omega}$ の方位角.

H_α の一般化された固有関数 $\varphi_\mp(x;\lambda,\omega)$ の遠方での漸近挙動を調べる ([3, 4, 15] も参照). この漸近挙動は、$\omega=\pm\hat{d}$ または、$\tilde{\omega}\pm\hat{d}$ の場合の解析に必要になってくる. H_α の固有関数を $\varphi_\pm(x;\lambda,\omega,\alpha)$ で表わすと, $\boldsymbol{R}^2$ 上の有界関数であり, $\varphi_-(x;\lambda,\omega,\alpha)=\bar{\varphi}_+(-x;\lambda,\omega,-\alpha)$ を満たす.

$|x|\to\infty$ での挙動を φ_+ について述べる. 特に、$\hat{x}=\omega$ の近くでの挙動に注意されたい.

Proposition 2.1 (1) $|x/|x|-\omega|>c>0$ のとき、

$$\begin{aligned}\varphi_+(x;\lambda,\omega) &= \exp\left(i\alpha\left(\gamma(x;\omega)-\pi\right)\right)\exp(i\sqrt{\lambda}x\cdot\omega)\\ &\quad + e^{i\sqrt{\lambda}|x|}|x|^{-1/2}\Big(\sum_{j=0}^{N-1}c_{+j}(x)|x|^{-j}\Big)+O(|x|^{-(N+1/2)}),\end{aligned}$$

ここで $c_{+j}(x)$ は $|\partial_x^\beta c_{+j}|=O(|x|^{-|\beta|})$ を満たす.

(2) $1/2<q\le 1$ とする.
$0<|x/|x|-\omega|<c|x|^{-q}$ のとき、

$$\varphi_+(x;\lambda,\omega)=\cos\alpha\pi\times\exp(i\sqrt{\lambda}x\cdot\omega)+O(|x|^{-\nu}).$$

ここで、$\nu=2(q-1/2)/3>0$.

3 2個の δ–型磁場の場合の散乱理論

δ–型磁場が 2 個の場合には, 1 個の場合のような具体的な計算は不可能であるが, 以下の Propositons 3.1–3.4 を得ることができる. $A_j(x)=A_{\alpha_j}(x-e_j)$, $j=1,2$, は δ–型磁場 $2\pi\alpha_j\delta(x-e_j)$ をあらわすベクトルポテンシャルである ((2)). ただし, $e_1\neq e_2$

Proposition 3.1 **(自己共役性)** $H(A_1+A_2)$ は

$$\mathcal{D}=\{u\in L^2 : H(A_1+A_2)u\in L^2,\ \lim_{|x-e_j|\to 0}|u(x)|<\infty,\ j=1,2\}.$$

を定義域とすると自己共役になる.

以下, $H:=H(A_1+A_2)$ は上で定義された自己共役作用素とする.

Proposition 3.2 **(固有値の非存在)** H は固有値をもたない.

重み付き L^2 空間を $L^2_s(\boldsymbol{R}^2):=L^2(\boldsymbol{R}^2;\langle x\rangle^{2s}dx)$ で定義する.

Proposition 3.3 **(極限吸収原理)** $R(z;H)=(H-z)^{-1}$, $s>1/2$ とする. 各 $\lambda>0$ 対して, 次の極限が $L^2_s(\boldsymbol{R}^2)$ から $L^2_{-s}(\boldsymbol{R}^2)$ への作用素ノルムで存在する:

$$R(\lambda\pm i0;H)=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}R(\lambda\pm i\varepsilon;H).$$

この収束は $\lambda>0$ に関して $(0,\infty)$ 内の任意のコンパクト集合上一様である.

Proposition 3.4 **(波動作用素の存在と漸近完全性)** 波動作用素

$$W_\pm(H,H_0)=s-\lim_{t\to\pm\infty}\exp(itH)\exp(-itH_0):L^2\to L^2.$$

が存在して, 漸近完全性が成り立つ:

$$\mathrm{Ran}\,W_+(H,H_0)=\mathrm{Ran}\,W_-(H,H_0)=L^2.$$

4 主結果

4.1 $b\in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^2)$ の場合

さて, 2つの磁場 $b_1,b_2\in C_0^\infty$ が与えられたとする. このとき, ベクトルポテンシャル A_1, A_2 を Lemma 2.1 のように定めると 磁場

$$b_1(x)+b_2(x-d),\qquad d\in\boldsymbol{R}^2$$

をもつ Schrödinger 作用素 は

$$H_d=H(A_1+A_{2,d})=(-i\nabla-A_1-A_{2,d})^2,\quad A_{2,d}(x)=A_2(x-d)$$

となる. (H_d,H_0) に対する散乱振幅 を $f_d(\omega\to\tilde{\omega};E)$ であらわす. 同様に, $(H(A_j),H_0)$, $j=1,2$ に対する散乱振幅を $f_j(\omega\to\tilde{\omega};E)$ で表わす. このとき, $(H(A_{2,d}),H_0)$ に対する散乱振幅は

$$f_{2,d}(\omega\to\tilde{\omega};E)=\exp(-i\sqrt{E}d\cdot(\tilde{\omega}-\omega))f_2(\omega\to\tilde{\omega};E)$$

で与えられる. $\gamma(x;\omega)$ を x の $\omega\in S^1$ からの方位角とし,

$$\tau(x;\omega,\tilde{\omega})=\gamma(x;\omega)-\gamma(x;-\tilde{\omega}).$$

とおく. ただし, $\omega=x/|x|$ のときは,

$$\exp(i\alpha\gamma(x;\omega)):=(1+\exp(i2\alpha\pi))/2=\cos\alpha\pi\times\exp(i\alpha\pi)$$

とする. また, α_1, α_2 を各々磁場 b_1, b_2 の磁束とする.

Theorem 4.1 $\omega\neq\tilde{\omega}$ を仮定し, d の方向 $\hat{d}=d/|d|$ を固定する. このとき, 散乱振幅 $f_d(\omega\to\tilde{\omega};E)$ は $|d|\to\infty$ のとき次の挙動を示す:

$$\begin{aligned} f_d(\omega\to\tilde{\omega};E) &= \exp(i\alpha_2\tau(-d;\omega,\tilde{\omega}))f_1(\omega\to\tilde{\omega};E) \\ &+ \exp(i\alpha_1\tau(d;\omega,\tilde{\omega}))f_{2,d}(\omega\to\tilde{\omega};E)+o(1). \end{aligned} \tag{4}$$

特に後方散乱に関しては, 次のようになる.

$$\begin{aligned} f_d(\omega\to-\omega;E) &= f_1(\omega\to-\omega;E)+f_{2,d}(\omega\to-\omega;E)+o(1), \quad (\omega\neq\pm\hat{d}), \\ f_d(\hat{d}\to-\hat{d};E) &= f_1(\hat{d}\to-\hat{d};E)+(\cos\alpha_1\pi)^2 f_{2,d}(\hat{d}\to-\hat{d};E)+o(1), \\ f_d(-\hat{d}\to\hat{d};E) &= (\cos\alpha_2\pi)^2 f_1(-\hat{d}\to\hat{d};E)+f_{2,d}(-\hat{d}\to\hat{d};E)+o(1). \end{aligned}$$

Remark 2つの電場ポテンシャルをもつ Schrödinger 作用素

$$-\Delta+V_1(x)+V_2(x-d)$$

について同様の問題を考える. ただし, 各 V_j, $j=1,2$, は遠方で非常に速く減衰するものとする. f_1^e, $f_{2,d}^e$, f_d^e を各々$(-\Delta+V_1(x),-\Delta)$, $(-\Delta+V_2(x-d),-\Delta)$, $(-\Delta+V_1(x)+V_2(x-d),-\Delta)$ に対する散乱振幅とすると, 次の結果が知られている ([12]):

$$f_d^e(\omega\to\tilde{\omega};E)=f_1^e(\omega\to\tilde{\omega};E)+f_{2,d}^e(\omega\to\tilde{\omega};E)+o(1).$$

4.2 主結果–δ–型磁場の場合

α_j, $j=1,2$, を実数として, 2点を中心とする δ–型磁場

$$2\pi\alpha_1\delta(x)+2\pi\alpha_2\delta(x-d)$$

をもつ場合を考える. すなわち, Schrödinger 作用素 $H_d:=H(A_{\alpha_1}+A_{\alpha_2,d})$ を考える. この作用素は, Proposition 3.1 から

$$\mathcal{D}(H_d)=\{u\in L^2: H_d u\in L^2,\ \lim_{|x|\to0}|u(x)|<\infty,\ \lim_{|x-d|\to0}|u(x)|<\infty\}$$

を定義域として自己共役作用素になる.

Theorem 4.2 $H_0 = -\Delta$ とするとき $(H(A_{\alpha_1}), H_0)$, $(H(A_{\alpha_2,d}), H_0)$, $(H_d,\ H_0)$ に対する散乱振幅を各々 $f_1(\omega \to \tilde{\omega}; E)$, $f_{2,d}(\omega \to \tilde{\omega}; E)$, $f_d(\omega \to \tilde{\omega}; E)$ とすると, *Theorem 4.1* と同じ漸近挙動 *(4)* を得る.

Remark. ベクトルポテンシャルの形から, スケーリング $x \to |d|x$ によって, H_d は $|d|^{-2}H_{\hat{d}}$ になる. このことから, $(H_{\hat{d}},\ H_0)$ に対する散乱振幅 $f_{\hat{d}}(\omega \to \tilde{\omega}; E)$ と $(H_d,\ H_0)$ に対する散乱振幅 $f_d(\omega \to \tilde{\omega}; E)$ の間に次の関係が成り立つ.

$$f_{\hat{d}}(\omega \to \tilde{\omega}; |d|^2 E) = |d|^{-1} f_d(\omega \to \tilde{\omega}; E)$$

したがって、$|d| \to \infty$ での $(H_d,\ H_0)$ に対する散乱振幅の挙動を調べることは, $(H_{\hat{d}},\ H_0)$ に対する散乱振幅の高エネルギーでの挙動を調べることと同じことである.

5 証明のアイデア

ここでは, Theorem 4.1 の証明の概略を $\omega \neq \pm\hat{d}$, $\tilde{\omega} \neq \pm\hat{d}$, $\omega \neq \tilde{\omega}$ の場合に限って述べる. 詳しくは, [10] を参照.

5.1. 最初に, 磁場が1個の場合の散乱振幅の表現を導く. ここでは、$f_1(\omega \to \tilde{\omega}; E)$ を考える. 以下, δ, σ はともに十分小さい正の定数とする.

$$0 \le \chi \le 1, \qquad \chi(s) = 1 \quad \text{for } 0 \le s \le 1, \qquad \chi(s) = 0 \quad \text{for } s > 2$$

を満たす $\chi \in C_0^\infty[0, \infty)$ を固定し,

$$\beta_0(\xi) = \chi(2|\xi - \sqrt{E}\omega|/\delta^2), \qquad \tilde{\beta}_0(\xi) = \chi(2|\xi - \sqrt{E}\tilde{\omega}|/\delta^2)$$

とおく. $j_0 \in C^\infty(\boldsymbol{R}^2)$ は, $0 \le j_0 \le 1$, $\partial_x^\beta j_0(x) = O(|x|^{-|\beta|})$ (d に関して一様) を満たし, さらに

$$\operatorname{supp} j_0 \subset \Sigma(|d|^\sigma, \omega, \delta), \qquad j_0 = 1 \ \text{ on } \ \Sigma(2|d|^\sigma, \omega, 2\delta),$$

となるものとする. ここで,

$$\Sigma(R, \omega, \delta) = \{x : |x| > R,\ |x/|x| - \omega| > \delta\}, \quad R > 0.$$

である. 同様に, $\tilde{j}_0(x)$ を

$$\operatorname{supp} \tilde{j}_0 \subset \Sigma(|d|^\sigma, -\tilde{\omega}, \delta), \qquad \tilde{j}_0 = 1 \ \text{ on } \ \Sigma(2|d|^\sigma, -\tilde{\omega}, 2\delta),$$

となるようにとる. J_0, $\tilde{J}_0$ を

$$\begin{aligned} J_0 &= j_0(x)\exp(\alpha_1\gamma(x;\omega))\beta_0(D), \\ \tilde{J}_0 &= \tilde{j}_0(x)\exp(\alpha_1\gamma(x;-\tilde{\omega}))\tilde{\beta}_0(D). \end{aligned}$$

と定義すると, [8] と同様に

$$\begin{aligned} f_1(\omega \to \tilde{\omega}; E) &= -(ic(E)/4\pi)(T\varphi_0(\omega, E), \tilde{J}_0\varphi_0(\tilde{\omega}, E)) \\ &+ (ic(E)/4\pi)(R(E + i0; H_1)T\varphi_0(\omega, E), \tilde{T}\varphi_0(\tilde{\omega}, E)). \end{aligned} \tag{5}$$

を得る. ここで, $\varphi_0(\omega, E) = \varphi_0(\cdot;\omega, E)$,

$$T = H(A_1)J_0 - J_0H_0 = \exp(i\alpha_1\gamma(x,\omega))[H_0, j_0]\beta_0,$$

$$\tilde{T} = H(A_1)\tilde{J}_0 - \tilde{J}_0H_0 = \exp(i\alpha_1\gamma(x,-\tilde{\omega}))[H_0, \tilde{j}_0]\tilde{\beta}_0$$

である. $\omega \neq \tilde{\omega}$ より、擬微分作用素 T と $\tilde{J}_0$ の表象の台は運動量空間でみると共通部分はない. したがって, $|d| \to \infty$ のとき, (5) の右辺第1項は $o(1)$ となることがわかる. また, T を磁場の近くとその外側に分ける:

$$T = \chi(|x|/3|d|^\sigma)T + (1 - \chi(|x|/3|d|^\sigma))T = T_1 + T_2.$$

同様に, $\tilde{T} = \tilde{T}_1 + \tilde{T}_2$ とする.

このとき, $k = 1, 2$ として次の評価が成り立つ.

Lemma 5.1

$$\|\tilde{T}_k^* R(E + i0; H(A))T_2\| = O(|d|^{-N}), \quad \|\tilde{T}_2^* R(E + i0; H(A))T_k\| = O(|d|^{-N})$$

以上のことから,

Lemma 5.2

$$f_1(\omega \to \tilde{\omega}; E) = (ic(E)/4\pi)(R(E + i0; H(A_1))T_1\varphi_0(\omega, E), \tilde{T}_1\varphi_0(\tilde{\omega}, E)) + o(1)$$

を得る.

5.2.

次に, $f_d(\omega, \tilde{\omega}, E)$ の同様の表現を求める.

$$\begin{aligned} j_{0d}(x) &= j_0(x - d), \quad \tilde{j}_{0d}(x) = \tilde{j}_0(x - d), \\ \theta_d(x;\omega) &= \alpha_1\gamma(x;\omega) + \alpha_2\gamma(x - d;\omega) \end{aligned}$$

とおく. 5.1 の J_0, $\tilde{J}_0$ の代わりに, 各々

$$\begin{aligned} J_{0d} &= j_0 j_{0d} \exp(i\theta_d(x;\omega))\beta_0(D), \\ \tilde{J}_{0d} &= \tilde{j}_0 \tilde{j}_{0d} \exp(i\theta_d(x;-\tilde{\omega}))\tilde{\beta}_0(D), \end{aligned}$$

を用いて

$$\begin{aligned} f_d(\omega \to \tilde{\omega}; E) &= -(ic(E)/4\pi)(T_d\varphi_0(\omega, E), \tilde{J}_{0d}\varphi_0(\tilde{\omega}, E)) \\ &+ (ic(E)/4\pi)(R(E + i0; H_d)T_d\varphi_0(\omega, E), \tilde{T}_d\varphi_0(\tilde{\omega}, E)). \end{aligned}$$

を得る. ここに、

$$T_d = H_dJ_{0d} - J_{0d}H_0, \qquad \tilde{T}_d = H_d\tilde{J}_{0d} - \tilde{J}_{0d}H_0$$

原点および d の近傍に対する特性関数を

$$\chi_{1d}(x) = \chi(|x|/3|d|^{\sigma}), \qquad \chi_{2d}(x) = \chi_{1d}(x-d),$$

で定義し, $T_d, \tilde{T}_d$ を各々次のように分解する:

$$T_d = T_{1d} + T_{2d} + T_{3d} + T_{4d}, \quad \tilde{T}_d = \tilde{T}_{1d} + \tilde{T}_{2d} + \tilde{T}_{3d} + \tilde{T}_{4d}.$$

ここで,

$$\begin{aligned}
T_{1d} &= \exp(i\theta_d(x;\omega))\chi_{1d}[H_0, j_0]\beta_0,\\
T_{2d} &= \exp(i\theta_d(x;\omega))\chi_{2d}[H_0, j_{0d}]\beta_0,\\
T_{3d} &= \exp(i\theta_d(x;\omega))(1-\chi_{1d})[H_0, j_0]j_{0d}\beta_0,\\
T_{4d} &= \exp(i\theta_d(x;\omega))(1-\chi_{2d})j_0[H_0, j_{0d}]\beta_0,\\
\tilde{T}_{1d} &= \exp(i\theta_d(x;-\tilde{\omega}))\chi_{1d}[H_0, \tilde{j}_0]\tilde{\beta}_0,\\
\tilde{T}_{2d} &= \exp(i\theta_d(x;-\tilde{\omega}))\chi_{2d}[H_0, \tilde{j}_{0d}]\tilde{\beta}_0,\\
\tilde{T}_{3d} &= \exp(i\theta_d(x;-\tilde{\omega}))(1-\chi_{1d})[H_0, \tilde{j}_0]\tilde{j}_{0d}\tilde{\beta}_0,\\
\tilde{T}_{4d} &= \exp(i\theta_d(x;-\tilde{\omega}))(1-\chi_{2d})\tilde{j}_0[H_0, \tilde{j}_{0d}]\tilde{\beta}_0
\end{aligned}$$

である. $1 \le j, k \le 4$ にたいして,

$$\gamma_{jk}(d) = (ic(E)/4\pi)(R(E+i0;H_d)T_{jd}\varphi_0(\omega,E), \tilde{T}_{kd}\varphi_0(\tilde{\omega},E))$$

とおくと,

$$f(\omega,\tilde{\omega};E) = \sum_{1\le j,k\le 4}\gamma_{jk}(d) + o(1).$$

であるので, 定理の証明には, 次のことを示せばよい.

$$\gamma_{33}(d) = o(1), \qquad \gamma_{44}(d) = o(1), \qquad \gamma_{jk}(d) = o(1) \quad (j \ne k), \tag{6}$$

$$\gamma_{11}(d) = \exp(i\alpha_2\tau(-d;\omega,\tilde{\omega}))f_1(\omega\to\tilde{\omega};E) + o(1), \tag{7}$$

$$\gamma_{22}(d) = \exp(i\alpha_1\tau(d;\omega,\tilde{\omega}))f_{2,d}(\omega\to\tilde{\omega};E) + o(1). \tag{8}$$

Lemma 5.2 と同様に, $T_{k,}$, $\tilde{T}_k$, $k = 3, 4$, が入っている項は $o(1)$ である. また、γ_{12}, γ_{21} は次の補題の最初の評価から $o(1)$ である.

Lemma 5.3 $\sigma > 0$ を十分小さくとる. このとき, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して,

$$\|\chi_{1d}R(E+i0;H_d)\chi_{2d}\| = O(|d|^{-1/2+4\sigma+\varepsilon})$$

$$\begin{aligned}
\|\chi_{1d}\Big(R(E+i0;H_d) - R(E+i0;H(A_1))\Big)\chi_{1d}\| &= O(|d|^{-1+7\sigma+\varepsilon}),\\
\|\chi_{2d}\Big(R(E+i0;H_d) - R(E+i0;H(A_{2,d}))\Big)\chi_{2d}\| &= O(|d|^{-1+7\sigma+\varepsilon}).
\end{aligned}$$

さて、上の補題の２番目の評価から

$$\gamma_{11}(d) = (ic(E)/4\pi)(R(E+i0;H(A_1))T_{1d}\varphi_0(\omega,E),\tilde{T}_{1d}\varphi_0(\tilde{\omega},E)) + o(1)$$

を得る. ところが, $\mathrm{supp}\chi_{1d}$ 上, $\gamma(x-d,\omega) = \gamma(-d;\omega) + O(|d|^{-1+\sigma})$ であるから,

$$\exp(i\theta_d(x;\omega)) = \exp(i\alpha_2\gamma(-d;\omega))\exp(i\alpha_1\gamma(x;\omega)) + O(|d|^{-1+\sigma})$$

である. 同様に, $\mathrm{supp}\chi_{1d}$ 上,

$$\exp(i\theta_d(x;-\tilde{\omega})) = \exp(i\alpha_2\gamma(-d;-\tilde{\omega}))\exp(i\alpha_1\gamma(x;-\tilde{\omega})) + O(|d|^{-1+\sigma}).$$

よって、Lemm 5.2 を考慮すると (7) が証明された. 同様に, (8) も示される.

Remark. 上の補題の証明はかなり複雑である。第一歩は, 積分核が具体的に表現できる $R(E+i0;H_0)$ の評価である. しかし、摂動が (d に依存する) 遠距離型のため $R(E+i0;H_d)$ の評価には直接には結びつかない. そのため, H_0, $H(A_1)$, $H(A_{2d})$ からゲージ変換を用いて作った補助作用素を途中に介在させて, 議論を進める. ここでも, 超局所解析の議論が本質的に使われる.

Remark. ($\omega = \pm\hat{d}$ または $\tilde{\omega} = \pm\hat{d}$ の場合)
今までの議論では, H_0 の固有関数を用いて散乱振幅を表現した. この場合には, $\omega = \hat{d}$ のときには H_1, $\omega = -\hat{d}$ のときには H_2 の固有関数を用いて表現し, Proposition 2.1 を用いる. また, レゾルベントの評価ももっと精密なものが必要になる ([11] 参照.)

References

[1] R. Adami and A. Teta, On the Aharonov–Bohm Hamiltonian, *Lett. Math. Phys.* **43** (1998) 43–53.

[2] G. N. Afanasiev, *Topological Effects in Quantum Mechanics*, Kluwer Academic Publishers (1999).

[3] Y. Aharonov and D. Bohm, Significance of electromagnetic potential in the quantum theory, *Phys. Rev., 115* : 485–491 (1959).

[4] M. V. Berry, R. G. Chambers, M. D. Large, C. Upstill and J. C. Walmsley, Wavefront dislocations in the Aharonov–Bohm effect and its water wave analogue, *Eur. J. Phys., 1*: 154–162 (1980).

[5] L. Dabrowski and P. Stovicek, Aharonov–Bohm effect with δ–type interaction, *J. Math. Phys.* **39** (1998) 47–62.

[6] T. Ikebe and Y. Saitō, Limiting absorption method and absolute continuity for the Schrödinger operators, *J. Math. Kyoto Univ., 7*: 513–542 (1972).

[7] H. Isozaki and H. Kitada, A remark on the micro–local resolvent estimates for two body Schrödinger operators, *Publ. RIMS, Kyoto Univ., 21*: 889–910 (1985).

[8] H. Isozaki and H. Kitada, Scattering matrices for two–body Schrödinger operators, *Sci. Papers Coll. of Arts and Sci., Tokyo Univ., 35*: 81–107 (1985).

[9] H. T. Ito and H. Tamura, Asymptotic behavior of scattering amplitudes in magnetic fields at large separation, to appear in J. Math. Soc. Japan (2001).

[10] H. T. Ito and H. Tamura, Scattering by magnetic fields at large separation, Preprint, 2000.

[11] H. T. Ito and H. Tamura, Aharanov–Bohm effect in scattering by point–like magnetic fields at large separation, to appear in Ann. H. Poincaré (2001).

[12] V. Kostrykin and R. Schrader, Cluster properties of one particle Schrödinger operators. II, *Rev. Math. Phys., 10*: 627–683 (1998).

[13] M. Loss and B. Thaller, Scattering of particles by long–range magnetic fields, *Ann. of Phys., 176*: 159–180 (1987).

[14] E. Mourre, Absence of singular continuous spectrum for certain selfadjoint operators, *Comm. Math. Phys., 78*: 391–408 (1981).

[15] Y. Ohnuki, Aharonov–Bohm kōka (in Japanese), Butsurigaku saizensen 9, Kyōritsu syuppan (1984).

[16] S. N. M. Ruijsenaars, The Ahanorov–Bohm effect and scattering theory, *Ann. of Phys., 146*: 1–34 (1983).

[17] H. Tamura, Shadow scattering by magnetic fields in two dimensions, *Ann. Inst. Henri Poincaré, 63*: 253–276 (1995).

[18] H. Tamura, Magnetic scattering at low energy in two dimensions, *Nagoya Math. J., 155*: 95–151 (1999).

[19] D. Yafaev, *Scattering Theory : Some old and new problems*, Lec. Notes in Math., 1735, Springer (2000).