

希薄気体の 1 次元共鳴振動の数値解析

矢野 猛 (北大工)

1. はじめに

音波を共鳴条件下で励起すると、大振幅の振動が発生し、様々な非線形現象が現れる。本研究では希薄気体中の音波の 1 次元非線形共鳴振動を考える (図 1 参照)。

気体の希薄度を測る尺度となる無次元パラメータは、次式で定義される Knudsen 数である:¹

$$Kn = \frac{l_0}{L_0} \quad (1)$$

ここで、 l_0 は基準状態の分子の平均自由行程、 L_0 は系の代表長さである。気体が希薄 (低圧) であるほど Kn は大きい。常圧の気体では、 l_0 は $0.1\mu\text{m}$ 程度であるので、多くの場合 Kn は極めて小さい (注: これまで、 Kn がゼロとなる極限において、気体のふるまいは通常の流体力学の方程式で記述されることが期待されていたが、最近、必ずしもそうではないことが明らかにされた (文献 2 参照))。

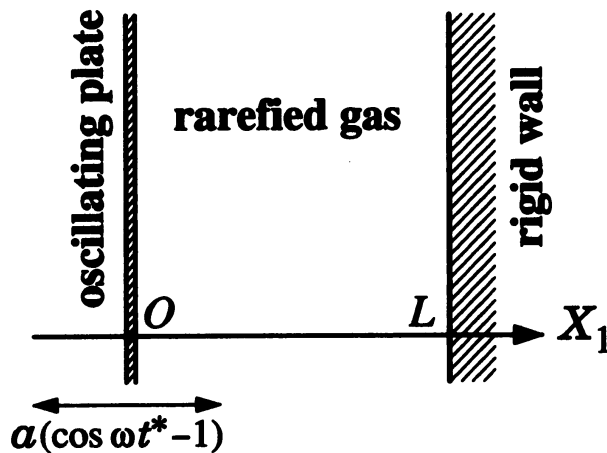


図 1. 概念図

音波の角振動数を ω 、静止一様状態の音速を c_0 とし、系の代表長さ L_0 として波数の逆数をとる ($L_0 = c_0/\omega$)。気体の平均自由行程 l_0 は、気体分子の平均の速さ \bar{c} と平均自由時間 $\bar{\tau}$ の積として定義される ($l_0 = \bar{c}\bar{\tau}$)。よって、音速 c_0 と気体分子の平均の速さ \bar{c} が同程度であることを考慮すると

$$Kn = \frac{\bar{c}\bar{\tau}\omega}{c_0} \cong \frac{\text{分子の平均自由時間 } (\bar{\tau})}{\text{音波の振動周期 } (\omega^{-1})} \quad (2)$$

となるのがわかる。すなわち、低圧気体でなくとも、音波の周波数が高い (波長が短い) 場合には、 Kn をゼロとみなすことができなくなり、希薄気体として扱わねばならなくなるのである (ただし、 L_0 が分子の直径程度まで小さくなる場合は考えない)。

Kn が小さくなければ、気体のふるまいを決定するためには、気体論の方程式 (Boltzmann 方程式) を解いて、座標 X_i ($i = 1, 2, 3$), 分子速度 ξ_i ($i = 1, 2, 3$) および時間 t を独立変数とする速度分布関数 $f(X_1, X_2, X_3, \xi_1, \xi_2, \xi_3, t)$ を求めなければならない。Boltzmann 方程式が高度に非線形な微分積分方程式であることと、速度分布関数が多くの独立変数をもつことが、希薄気体の問題を解析することを困難なものとしている。本研究では、解析を簡単にするために、支配方程式として Boltzmann-Krook-Welandar 方程式 (または BGK モデル) と呼ばれるモデル方程式を用いる。また、空間 1 次元の問題を考えるので、速度分布関数は X_2 と X_3 には依存しないとする。それでもなお、速度分布関数は、分子速度の 3 成分、座標 X_1 、時間 t の 5 つの独立変数をもつ。しかし、一般に空間 1 次元の問題では、Boltzmann-Krook-Welandar 方程式 (以下 BKW 方程式とよぶ) と初期条件、境界条件から ξ_2 と ξ_3 を消去することができる。³ 結果として、 X_1, ξ_1, t を独立変数とする連立微分積分方程式の初期値境界値問題が導かれる。本研究ではこれを数値的に解く。

2. 問題とその定式化

剛体壁と平板の間を満たす希薄気体が、初期に、温度 T_0 、密度 ρ_0 の静止平衡状態にあるとする (図 1 参照)。平板の正弦振動により励起される気体の 1 次元振動を、BKW 方程式と拡散反射境界条件を用いて数値的に調べる。剛体壁と平板の温度は T_0 (一定) とする。

空間 1 次元 (外力なし) の BKW 方程式は次式のように表される:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \xi_1 \frac{\partial f}{\partial X_1} = A_c \rho (f_e - f) \quad (3)$$

$$f_e = \frac{\rho}{(2\pi RT)^{3/2}} \exp \left[-\frac{(\xi_i - v_i)^2}{2RT} \right] \quad (f_e : \text{局所平衡分布}) \quad (4)$$

$$\rho = \int f d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \quad (5)$$

$$\rho v_i = \int \xi_i f d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \quad (6)$$

$$3\rho RT = \int (\xi_i - v_i)^2 f d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \quad (7)$$

$$p = \rho RT \quad (\text{理想気体の状態方程式, } R \text{ は気体定数}) \quad (8)$$

ただし、分子速度に関する積分は、 ξ_i の全空間にわたって行われる。また、(3) 式の右辺に現れる A_c は定数であり、次式をとおして平均自由時間 $\bar{\tau}$ と関係づけられる:

$$\bar{\tau} = (A_c \rho)^{-1} \quad (9)$$

したがって、平均自由行程 l は $l = \bar{c}/(A_c \rho)$ と表される。なお、分子の平均速さ \bar{c} は速度分布関数を用いて

$$\bar{c} = \frac{1}{\rho} \int \sqrt{\xi_i^2} f d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \quad (10)$$

と定義される。

拡散反射の境界条件とは、境界から出て行く分子が、境界面の温度 T_B と速度 v_{Bi} ($i = 1, 2, 3$) をもつ平衡分布にしたがうことを課す条件であり、次式のように表される: n_i を境界面に立てられた気体側を向く単位法線ベクトルとすると、

$$(\xi_i - v_{Bi})n_i > 0 \quad \text{のとき} \quad f = \frac{\rho_B}{(2\pi RT_B)^{3/2}} \exp \left[-\frac{(\xi_i - v_{Bi})^2}{2RT_B} \right] \quad (11)$$

したがって、振動する平板上 [$X_1 = a(\cos \omega t - 1)$] では

$$\rho_B = -\sqrt{\frac{2\pi}{RT_B}} \int_{\xi_1 < v_{B1}} (\xi_1 - v_{B1}) f d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \quad (12)$$

$$v_{B1} = -a\omega \sin \omega t, \quad v_{B2} = v_{B3} = 0, \quad T_B = T_0 \quad (13)$$

剛体壁上 ($X_1 = L$) では

$$\rho_B = \sqrt{\frac{2\pi}{RT_B}} \int_{\xi_1 > 0} \xi_1 f d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \quad (14)$$

$$v_{B1} = v_{B2} = v_{B3} = 0, \quad T_B = T_0 \quad (15)$$

以上の支配方程式と境界条件を、次式で定義される無次元変数を用いて無次元化する。

$$x_1 = \frac{X_1}{l_0}, \quad \zeta_i = \frac{\xi_i}{\sqrt{2RT_0}}, \quad \bar{t} = \frac{t\sqrt{2RT_0}}{l_0}, \quad \bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0}, \quad \bar{T} = \frac{T}{T_0}, \quad u_i = \frac{v_i}{\sqrt{2RT_0}} \quad (16)$$

$$\Phi = \frac{f(2RT_0)^{3/2}}{\rho_0}, \quad \alpha = \frac{a}{l_0}, \quad \Omega = \frac{\omega l_0}{\sqrt{2RT_0}} \quad (17)$$

以下では、 \bar{t} , $\bar{\rho}$, \bar{T} の $-$ を省略する。

共鳴の条件は次式のように表される:

$$\frac{L\omega}{c_0} = \bar{L}\Omega\sqrt{\frac{2}{\gamma}} = n\pi \quad \begin{cases} \bar{L} \equiv L/l_0 \\ c_0 = \sqrt{\gamma RT_0} \end{cases} \quad (18)$$

ここで、 n は線形定在波の場合の圧力の節の数を表す正の整数である。本研究では、主に $n = 1$ (基本モード) の場合を取り扱う。

この問題は、二つの無次元パラメータ α と Ω によって規定される。これらを用いると、Mach 数 Ma と Knudsen 数 Kn は

$$Ma = \alpha\Omega\sqrt{\frac{2}{\gamma}}, \quad Kn = \Omega\sqrt{\frac{2}{\gamma}} \quad (19)$$

と表される。一般に、BKW 方程式にしたがう気体では、 $Kn \ll 1$ のとき

$$Ma = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2\gamma}} Kn Re \quad (Re \text{ は Reynolds 数}) \quad (20)$$

であるので, (19) と (20) より

$$Re = 2\alpha\sqrt{\frac{2\gamma}{\pi}} \quad (21)$$

すなわち, $Re = O(\alpha)$ である.

3. 独立変数の低減 — ζ_2 と ζ_3 の消去

新しい従属変数

$$g(x_1, \zeta_1, t) = \int \Phi d\zeta_2 d\zeta_3, \quad h(x_1, \zeta_1, t) = \int (\zeta_2^2 + \zeta_3^2) \Phi d\zeta_2 d\zeta_3 \quad (22)$$

を導入する. これによって, BKW 方程式 (3) は

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \zeta_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \right) \begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix} = \frac{2\rho}{\sqrt{\pi}} \left[\begin{pmatrix} g_e \\ h_e \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix} \right] \quad (23)$$

と変換される. このとき, 密度, 流速, 温度等は, g と h を用いて以下のように表される:

$$\begin{pmatrix} g_e \\ h_e \end{pmatrix} = \frac{\rho}{\sqrt{\pi T}} \begin{pmatrix} 1 \\ T \end{pmatrix} \exp \left[-\frac{(\zeta_1 - u_1)^2}{T} \right] \quad (g_e, h_e : \text{局所平衡分布 } f_e \text{ に対応}) \quad (24)$$

$$\rho = \int g d\zeta_1 \quad (25)$$

$$\rho u_1 = \int \zeta_1 g d\zeta_1 \quad (26)$$

$$\frac{3}{2} \rho T = \frac{3}{2} p = \int (\zeta_1^2 g + h) d\zeta_1 - \rho u_1^2 \quad (27)$$

同様にして拡散反射の境界条件も次のように変換される: まず, 振動平板上 [$x_1 = \alpha(\cos \Omega t - 1)$] で, 境界から出て行く分子 ($\zeta_1 > u_{B1}$) に対しては

$$\begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix} = \frac{\rho_B}{\sqrt{\pi}} \exp[-(\zeta_1 - u_{B1})^2] \quad (28)$$

$$\rho_B = -2\sqrt{\pi} \int_{\zeta_1 < u_{B1}} (\zeta_1 - u_{B1}) g d\zeta_1, \quad u_{B1} = -\alpha\Omega \sin \Omega t \quad (29)$$

また, 剛体壁上 ($x_1 = \bar{L}$) で, 境界から出て行く分子 ($\zeta_1 < 0$) に対しては

$$\begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix} = \frac{\rho_B}{\sqrt{\pi}} \exp(-\zeta_1^2) \quad (30)$$

$$\rho_B = 2\sqrt{\pi} \int_{\zeta_1 > 0} \zeta_1 g d\zeta_1, \quad u_{B1} = 0 \quad (31)$$

最後に, 初期に温度 T_0 , 密度 ρ_0 の静止平衡状態であるから, 初期条件は, $t = 0$ で

$$\begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-\zeta_1^2) \quad (32)$$

4. 数値解析

上記の g と h に対する非線形微積分方程式の初期値境界値問題を差分法で解く。独立変数は、 x_1, ζ_1, t の 3 つであるが、 ζ_1 についての微分は含まれないことが特徴である。

精度よく計算を進めるために、空間座標 x_1 に関して、境界近傍に格子点が集中するように離散化し、分子速度 ζ_1 に関して、0 近傍を細かく、0 から離れるほど粗く離散化する。

空間微係数を 2 次精度片側 (風上) 差分で近似し、時間微係数を 2 次精度後退差分で近似し、陰解法を採用する。巨視的変数 (ρ, u_1, T など) は、 g と h を Simpson 公式を用いて数値積分することにより求める。

以下に主な数値計算結果を示す。計算結果は 2 つの無次元パラメータ α と Ω で整理されるが、 $Ma \cong \alpha\Omega, Re \cong \alpha$ である。

図 2 (a)–(c) は振動平板上の速度分布関数の 1 周期の時間変化を図示したものである。平板の振動の無次元速度は、 $\alpha\Omega$ 程度の振幅で正弦的に変化する。その変化の範囲が、図 2 (b) と (c) に破線で示されている。

速度分布関数は、分子速度ゼロの近傍で不連続である。 $Kn < \infty$ の気体では、この不連続は境界上でのみ現れる。境界近傍の気体中では変化は急激ではあるが、速度分布関数は連続である。境界から離れるにしたがって、分子衝突の効果により、変化はなだらかになってゆく。

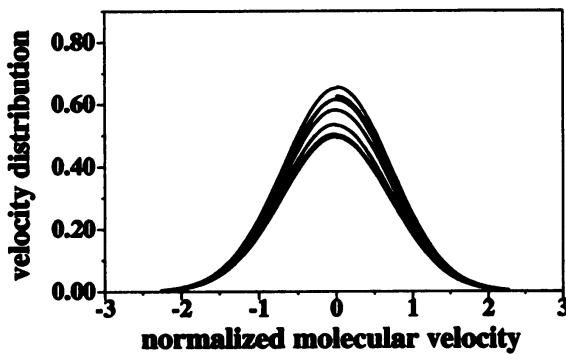


図 2(a). 振動平板上の速度分布関数 g .
 $\Omega = 0.01, \alpha = 1$.

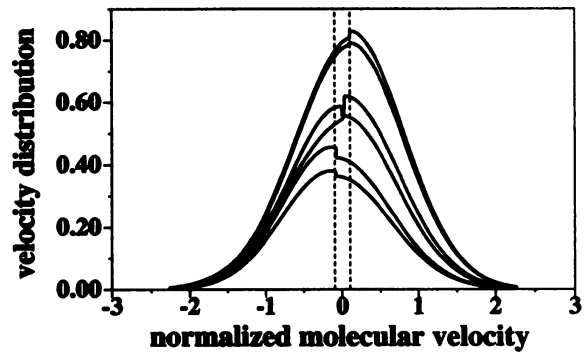


図 2(b). 振動平板上の速度分布関数 g .
 $\Omega = 0.1, \alpha = 1$.

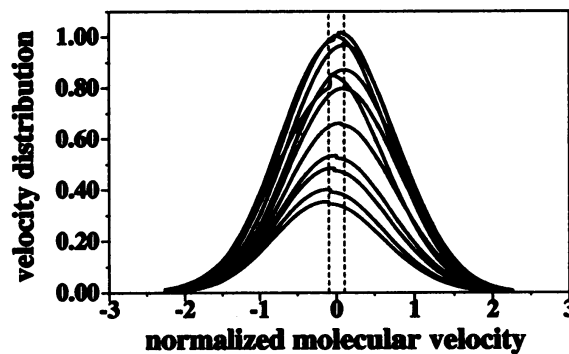


図 2(c). 振動平板上の速度分布関数 g .
 $\Omega = 0.01, \alpha = 10$.

図 2(a) と (c) は、 Kn (Ω) が比較的小さい場合であり、通常の流体力学で記述される気体のふるまいに近い場合である。

図 3 (a)–(d) は,

$$\bar{T} = \frac{\Omega}{2\pi} \int_t^{t+(2\pi/\Omega)} T dt \quad (33)$$

によって定義される温度場の 1 周期の時間平均 \bar{T} を, t を変化させて $20\pi/\Omega$ (10 周期) ごとに描いたものである。

$\Omega = 0.01$ の場合 (図 3(a) と (c)) は, $\Omega = 0.1$ の場合 (図 3(b)) と比較して, ゆっくりと定常な温度分布に近づく。

図 3(d) は, 図 3(b) ($\alpha = 1, \Omega = 0.1$) に対応する場合について, Navier–Stokes 方程式の数値解から計算したものである。図 3(b) と横軸の値が異なるのは, (16)(17) と異なった無次元化を用いているためである。Navier–Stokes 方程式から得られた平均温度場 \bar{T} は速やかに定常状態に達する。また, 定常状態の平均温度分布も図 3(b) のものと定性的に異なる。

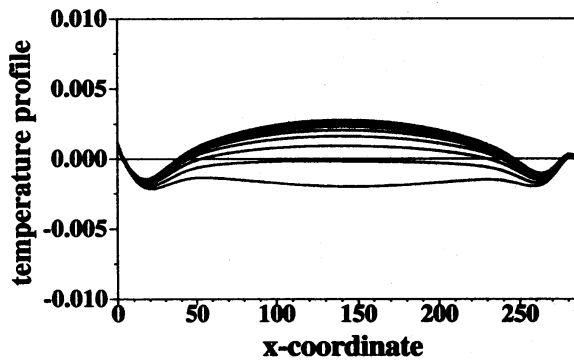


図 3(a). 時間平均された温度場. $\Omega = 0.01, \alpha = 1$.

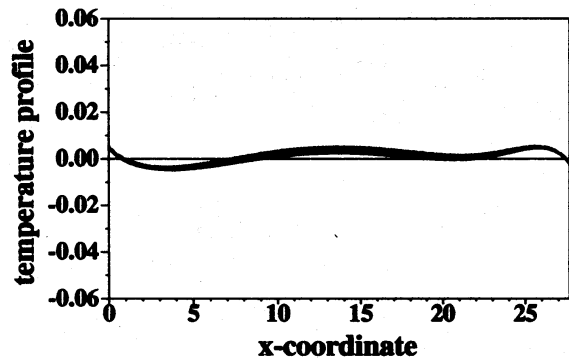


図 3(b). 時間平均された温度場. $\Omega = 0.1, \alpha = 1$.

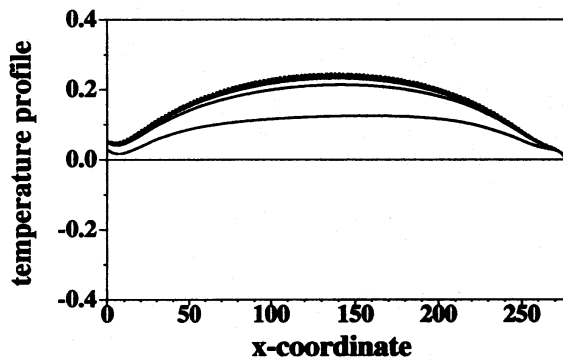


図 3(c). 時間平均された温度場. $\Omega = 0.01, \alpha = 10$.

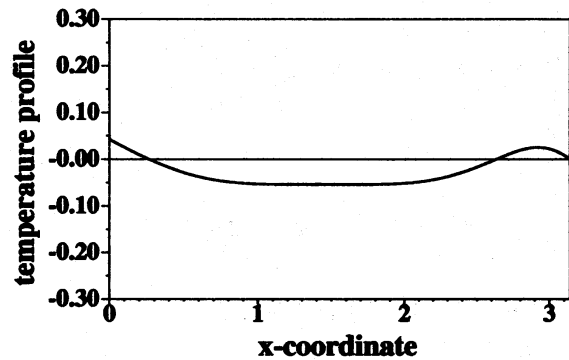


図 3(d). 時間平均された温度場. Navier–Stokes 方程式の数値解.

図 4(a)–(d) は圧力変動である。ほぼ定常振動状態に到達したとみなされる時刻 (300 周期) から, $1/20$ 周期ごとに, 1 周期分の波形を示している。

図 4(a) と (c) には, 衝撃波が発生し, 平板と剛体壁で反射されながら伝播している様子が示されている。衝撃波の厚さは, 平均自由行程の 10 倍から数 10 倍程度である。図 4(b) の場合は, 平板と剛体壁の間隔が平均自由行程の 30 倍程度しかない場合である。このような場合には, 明確な衝撃波は発生しない。Navier–Stokes 方程式からの計算結果, 図 4(d), と定量的にもおおむね一致している。

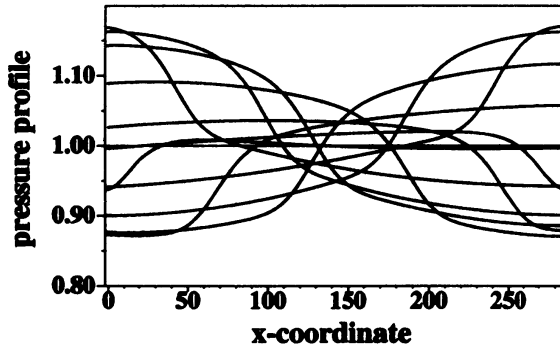


図 4(a). 1 周期の圧力変動. $\Omega = 0.01$, $\alpha = 1$.

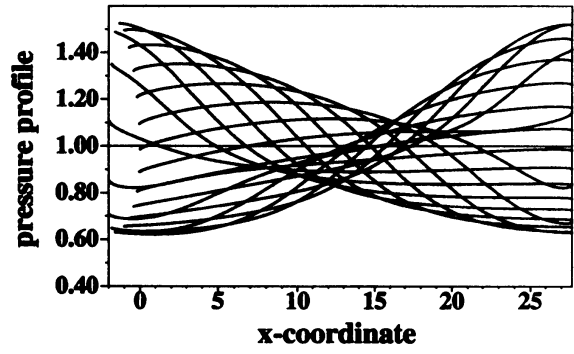


図 4(b). 1 周期の圧力変動. $\Omega = 0.1$, $\alpha = 1$.

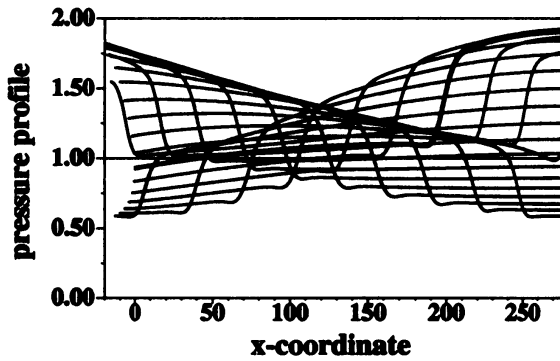


図 4(c). 1 周期の圧力変動. $\Omega = 0.01$, $\alpha = 10$.

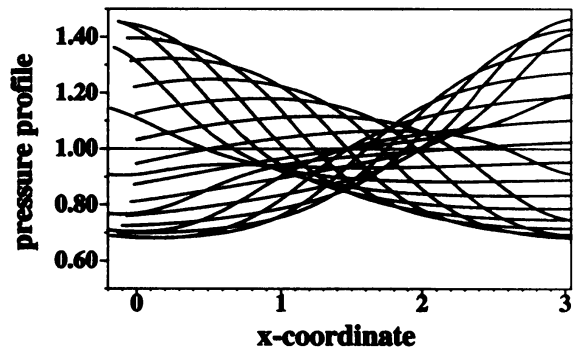


図 4(d). 1 周期の圧力変動. Navier-Stokes 方程式の数値解.

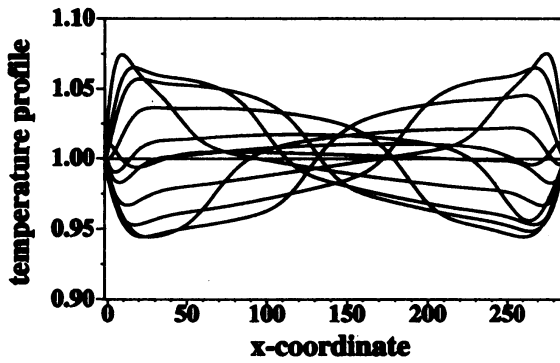


図 5(a). 1 周期の温度変動. $\Omega = 0.01$, $\alpha = 1$.

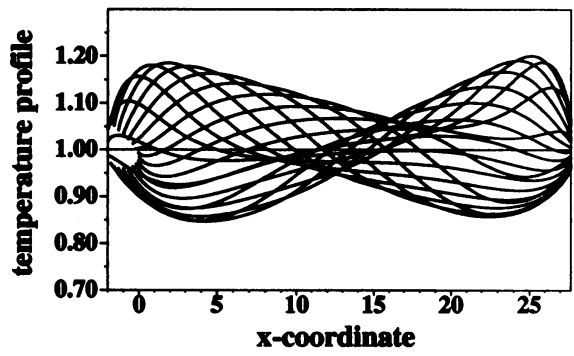


図 5(b). 1 周期の温度変動. $\Omega = 0.1$, $\alpha = 1$.

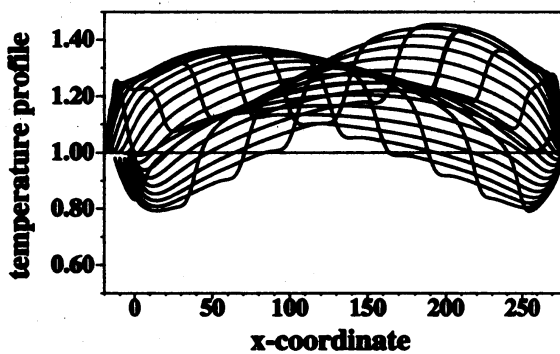


図 5(c). 1 周期の温度変動. $\Omega = 0.01$, $\alpha = 10$.

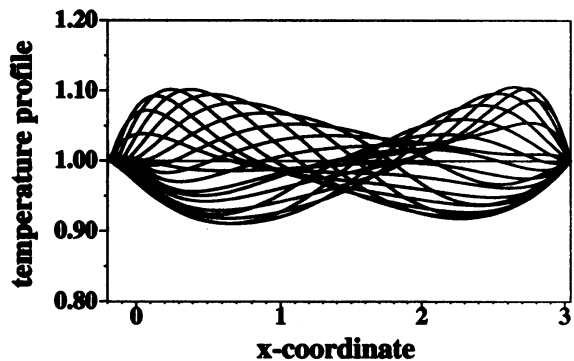


図 5(d). 1 周期の温度変動. Navier-Stokes 方程式の数値解.

図 5(a)–(d) は温度変動である。図 4 と同様にして描かれている。ここで示された図からは読み取れないが、境界面では、温度勾配に比例する大きさの温度のとびがある。

5. おわりに

希薄気体の 1 次元共鳴振動の数値解析を行った。

研究の第 1 段階として、 Kn が 1 に比べて小さい場合を取り扱ったために、波のふるまいに関して、Navier–Stokes 方程式の数値解との著しい差異は見出されなかった。

しかしながら、境界に伝えられる運動量 (力) やエネルギー (熱流) などには、違いが現れる可能性がある。

次の段階では、 Kn が 1 程度から 1 より大きい場合の計算と、境界に伝えられる運動量とエネルギーの解析を行う。

引用文献

1. 曾根良夫, 青木一生: 分子気体力学 (朝倉書店, 1997).
2. Y. Sone: Ann. Rev. Fluid Mech. **32**, 779 (2000).
3. C. K. Chu: Phys. Fluids **8**, 12 (1965).