数理解析研究所講究録 1209 巻 2001 年 56-65

パターンの変調と微分方程式に対するくりこみ群

名古屋大学 理学部 増冨 祐司 (Yuji Masutomi)
Department of Physics, Nagoya University.

1 intro

非平衡開放系では様々なパターン (例えば benard 対流や反応拡散系に現われる Turing パターン) が現われるが、そのパターンの変調は位相場の発展方程式 (位相方程式) によって記述される。そしてその導出には様々な特異摂動法が用いられてきたが、今回、近年提唱された微分方程式に対するくりこみ群の方法を用いて新しい方程式を含む幾つかの位相方程式を導出した。

この方法を用いる理由はまず

●くりこみ群の方法の効用：

1、摂動時に現われる発散を取り除く.

2、発散を取り除いたから摂動の近似がよくなる.

3、近似方程式が得られる.

と様々。でもこれなら他の特異摂動法と同じ。

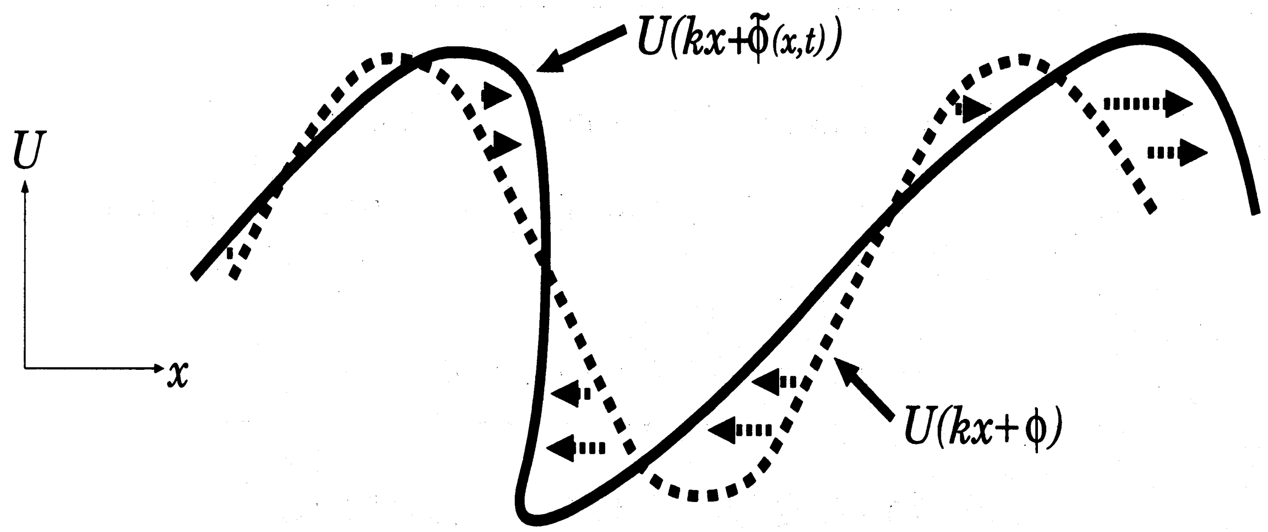
●くりこみ群の方法の利点:

特異摂動法 (逓減摂動法) に見られるような絶妙な変数変換を必要としない。

→物理的な考察を必要とせず機械的な操作で有意な情報 (近似方程式など) が得られる。

これは素人にとってありがたい。

2　パターンの変調と位相方程式



周期的なパターンをなす物理量$U(kx+\phi)$の変調は任意定数ϕを時間的、空間的に変化する従属変数$\tilde{\phi}(t,x,y,z)$とすることによってパターンの変調を捉え、$\tilde{\phi}(t,x,y,z)$の発展方程式(位相方程式)を導出しその変調を記述するのである。

3　問題設定

反応拡散系に進行波パターン$U_0(kx-\omega t+\phi,k)$がある。
このパターンの変調を記述する位相方程式を導出しよう。

次の反応拡散方程式で表される反応拡散系を考える。

$$\partial_t U = D\nabla^2 U + F(U). \tag{3.1}$$

U : n次元ベクトル,　$F(U)$: 非線形項,

D : $n\times n$定数行列,　$U_0(\theta+2\pi)=U_0(\theta)$

4 位相方程式とくりこみ群(方法のシナリオ)

$$
\begin{aligned}
U &= U_0(kx-\omega t+\phi+\delta(t,x,y,z))+\tilde{U} & (4.1)\\
&= U_0(kx-\omega t+\phi)+\delta U_{0,\theta}(\theta)+\frac{\delta^2}{2}U_{0,\theta\theta}(\theta)\\
&\quad +\cdots+\tilde{U} & (4.2)\\
&= U_0(kx-\omega t+\tilde{\phi}(t,x,y,z))+\tilde{U}
\end{aligned}
$$

$\tilde{U}$: 位相の変化で表せない項(有限項), $|\phi| \gg |\delta|$,

$\theta = kx - \omega t + \phi$

●シナリオ

step1 ; 一般にパターンの変調は位相の変化と位相の変化で表せない部分に分けることができる eq.(4.1)

step2 ; 位相部分を展開する。eq.(4.2)

step3 ;eq.(4.2) を (3.1) に代入して δ を求める。

step4 ; くりこみ変換をする。

$$\tilde{\phi}(t,x,y,z)=\phi+\delta(t,x,y,z)$$

step5 ; くりこみ変換より $\tilde{\phi}$ に対する微分方程式を得る。

step6 ;$\tilde{U}$ の有界条件より $\tilde{\phi}$ に対する発展方程式(位相方程式)を得る。

5 具体的な摂動計算

変調したパターン U は

$$
\begin{aligned}
U &= U_0(k+\kappa, \overbrace{kx-\omega t+\phi}^{\theta}+\delta)+\tilde{U} \\
&= U_0(k,\theta)+\delta U_{0,\theta}+\kappa U_{0,k}+(\delta^2/2)U_{0,\theta\theta} \\
&\quad +(\kappa^2/2)U_{0,kk}+\delta\kappa U_{0,\theta k}+\cdots+\tilde{U}. \qquad (5.1)
\end{aligned}
$$

と書ける (step1,2)。ここで $\delta_{,x}=\kappa$.

$$
\begin{aligned}
\delta &= \epsilon(P_1+\epsilon P_2+\cdots), \quad \kappa=\epsilon(P_{1,x}+\epsilon P_{2,x}+\cdots) \\
\tilde{U} &= \epsilon^2(\tilde{U}_2(\theta)+\epsilon\tilde{U}_3+\cdots),
\end{aligned}
$$

とし、(5.1) を (3.1) に代入し各オーダーごとに δ つまり P_n を求める (step3)。

後の便利のため次のガリレイ変換と変数変換を導入。

$$
x'=x-\dot{\omega}t, \quad y'=y, \quad z'=z, \quad t'=t, \quad \theta=kx-\omega t+\phi \qquad (5.2)
$$

$O(\epsilon)$ で

$$
\begin{aligned}
&-P_{1,xx}MU_{0,k}(\theta)-\nabla^2P_1DU_{0,\theta}(\theta)-\nabla^2P_{1,x}DU_{0,k}(\theta) \\
&+P_{1,t}U_{0,\theta}(\theta)+P_{1,xt}U_{0,k}(\theta)=0. \qquad (5.3)
\end{aligned}
$$

を得る。上式を θ に関する恒等式と考えると係数の $P_{1,xx}$ や ∇^2P_1 は恒等的にゼロでなければならないので

$$
\underline{P_1=P_{1,x}x+\nabla_\perp P_1\cdot\boldsymbol{r}_\perp.} \qquad (5.4)
$$

を得る。

$O(\epsilon^2)$で

$$\begin{aligned} L\tilde{U}_2 &= |\nabla_\perp P_1|^2 DU_{0,\theta\theta}(\theta) - (1/2)P_{1,x}^2 \ddot{\omega} U_{0,\theta}(\theta) \\ &\quad + P_{2,xx} M U_{0,k}(\theta) + \nabla^2 P_2 D U_{0,\theta}(\theta) \\ &\quad - P_{2,t} U_{0,\theta}(\theta) - P_{2,xt} U_{0,k}(\theta), \end{aligned} \tag{5.5}$$

より

$$\underline{P_2 = P_{2,xx}x^2/2 + (\boldsymbol{r}_\perp \boldsymbol{r}_\perp : \nabla_\perp \nabla_\perp) P_2/2}$$
$$\underline{+ x(\boldsymbol{r}_\perp : \nabla_\perp) P_{2,x} + P_{2,t} t.}$$

と求まる。ここで

$$L \equiv -(\omega \partial_\theta + F'(U_0) \cdot + k^2 D \partial_\theta^2)$$
$$\boldsymbol{r}_\perp = (0, y, z), \nabla_\perp = (0, \partial_y, \partial_z).$$
$$(\overbrace{\boldsymbol{r}_\perp \cdots \boldsymbol{r}_\perp}^{n} : \overbrace{\nabla_\perp \cdots \nabla_\perp}^{n}) \equiv \sum_{k=0}^{k=n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} y^{n-k} z^k \partial_y^{n-k} \partial_z^k.$$

これで

$$\delta = \epsilon(P_1 + \epsilon P_2 + \cdots) \tag{5.6}$$

よりδが求まった。そしてくりこみ変換

$$\tilde{\phi}(x, \boldsymbol{r}_\perp, t) = \phi + \delta(x, \boldsymbol{r}_\perp, t) = \phi + \epsilon(P_1 + \epsilon P_2 + \cdots).$$

より (step4)、くりこみ群方程式

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_x &= \epsilon P_{1,x}, \quad \nabla_\perp \tilde{\phi} = \epsilon \nabla_\perp P_1, \\ \tilde{\phi}_{xx} &= \epsilon^2 P_{2,xx}, \quad \nabla_\perp^2 \tilde{\phi} = \epsilon^2 \nabla_\perp^2 P_2, \\ \tilde{\phi}_t &= \epsilon^2 P_{2,t}. \end{aligned} \tag{5.7}$$

を得る(step5)。またeq.(5.5)において$\tilde{U}$の可解条件より

$$
\begin{aligned}
&|\nabla_\perp P_1|^2\langle \hat{U}\cdot DU_{0,\theta\theta}\rangle - (1/2)\ddot{\omega}(P_{1,x})^2\langle \hat{U}\cdot U_{0,\theta}\rangle \\
&+P_{2,xx}\langle \hat{U}\cdot MU_{0,k}\rangle + \nabla^2 P_2\langle \hat{U}\cdot DU_{0,\theta}\rangle - P_{2,t}\langle \hat{U}\cdot U_{0,\theta}\rangle \\
&= 0. \qquad (5.8)
\end{aligned}
$$

(5.7)を(5.8)に代入して

● Non-isotropic Burgers eq.

$$
\tilde{\phi}_t \;=\; D_\parallel \tilde{\phi}_{xx} + D_\perp \nabla_\perp^2 \tilde{\phi} + N_\parallel (\tilde{\phi}_x)^2 + N_\perp |\nabla_\perp \tilde{\phi}|^2 \qquad (5.9)
$$

を得る。ここで

$$
\begin{aligned}
D_\parallel &= D_\perp + D'_\parallel, \\
D_\perp &= \langle \hat{U}\cdot DU_{0,\theta}\rangle / \langle \hat{U}\cdot U_{0,\theta}\rangle, \\
D'_\parallel &= \langle \hat{U}\cdot MU_{0,k}\rangle / \langle \hat{U}\cdot U_{0,\theta}\rangle \\
N_\perp &= \langle \hat{U}\cdot DU_{0,\theta\theta}\rangle / \langle \hat{U}\cdot U_{0,\theta}\rangle, \\
N_\parallel &= -\ddot{\omega}/2 \\
&= N_\perp + \{(1/2)\langle \hat{U}\cdot F'' : (U_{0,k})^2\rangle + \langle \hat{U}\cdot MU_{0,\theta k}\rangle\} / \langle \hat{U}\cdot U_{0,\theta}\rangle.
\end{aligned}
$$

次にn-Burgers eq.で拡散係数$D_\perp$が小さい(Zig-Zag不安定)：

$$
D_\perp \propto \langle \hat{U}\cdot DU_{0,\theta}\rangle \sim O(\epsilon^2). \qquad (5.10)
$$

場合を考える。

(5.10)より

$$
LW(\theta) = DU_{0,\theta} + O(\epsilon^2). \qquad (5.11)
$$

というベクトルWが存在する。今回は

$$\begin{aligned}\delta &= \epsilon^3\{P_1(x,\boldsymbol{r}_\perp,t)+\epsilon P_2(x,\boldsymbol{r}_\perp,t)+\cdots\},\\ \tilde{U} &= \epsilon^4\{\tilde{U}_2(\theta)+\epsilon\tilde{U}_3(\theta,x,\boldsymbol{r}_\perp,t)+\cdots\}.\end{aligned}$$

と展開する。同様の計算より

● Non-isotropic Kuramoto-Sivashinsky eq.

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}_t &= D'_\parallel\tilde{\phi}_{xx}+D_\perp\nabla_\perp^2\tilde{\phi}+E\nabla_\perp^4\tilde{\phi}\\ &\quad +N_\perp|\nabla_\perp\tilde{\phi}|^2+G\nabla_\perp^2\tilde{\phi}_x\end{aligned}$$

を得る。ここで

$$\begin{aligned}E &= \langle\hat{U}\cdot DW(\theta)\rangle/\langle\hat{U}\cdot U_{0,\theta}\rangle,\\ G &= A'+H\\ A' &= \langle\hat{U}\cdot DU_{0,k}\rangle/\langle\hat{U}\cdot U_{0,\theta}\rangle,\\ H &= \langle\hat{U}\cdot MW(\theta)\rangle/\langle\hat{U}\cdot U_{0,\theta}\rangle.\end{aligned} \tag{5.12}$$

・コメント：

1，上の式はスケーリングの議論から導出できる。

2，以前、特異摂動法で求められたK-S eqはいろいろなオーダーの項が混在していたが、今回のような各項のオーダーが揃っているK-S eqを導いたのは初めて。以前では係数が小さいことを考慮しておらず、Wのようなベクトルを考えて計算されていない。

3，Wを使えば逓減摂動法でも上の方程式を導ける。

次に前回と同様に $D_\perp \sim O(\epsilon^2)$. さらに

$$k{\sim}O(\epsilon) \tag{5.13}$$

とする。このとき分散関係より

$$\dot{\omega} \sim O(\epsilon), \quad U_{0,k} \sim O(\epsilon), \tag{5.14}$$

となることがある。

実際, 反応拡散方程式である複素ギンツブルグーランダウ方程式で

$$\Psi_{,t} = \gamma\Psi - \beta|\Psi|^2\Psi + \alpha\nabla^2\Psi \tag{5.15}$$

進行波パターン U_0 を

$$U_0 = a(k)e^{i\theta} \tag{5.16}$$

とすると, 分散関係は

$$-i\omega = \gamma - \beta a^2 - \alpha k^2, \tag{5.17}$$

となり、$\omega(k)$ と $a(k)$ は k^2 の関数であることわかる。

すると

$$\begin{aligned} &D_\parallel \sim D_\perp \sim O(\epsilon^2). \\ &G \sim O(\epsilon) \end{aligned} \tag{5.18}$$

そして前回と同様に $\delta, \tilde{U}$ を置いて計算すると

● Benney-like eq.

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_t \ = \ & D_\parallel \tilde{\phi}_{xx} + D_\perp \nabla_\perp^2 \tilde{\phi} + G\nabla^2 \tilde{\phi}_x \\ & + E\nabla^4 \tilde{\phi} + N|\nabla\tilde{\phi}|^2 \end{aligned}$$

・コメント：

１、このような各項のオーダーが揃っているBenney方程式の導出は特異摂動法でもスケーリング法からも導出されていない(と思う)。以前は

$$\tilde{\phi}_t = \tilde{\phi}_{xxx} + (\tilde{\phi}_x)^2 + \epsilon(\tilde{\phi}_{xx} + \tilde{\phi}_{xxxx}) \tag{5.19}$$

がスケーリング法から導出されている。

２、２次元の場合、Benney eq は

$$\tilde{\phi}_t = -\tilde{\phi}_{xx} + \tilde{\phi}_{yy} - \nabla^2\tilde{\phi}_x - \nabla^4\tilde{\phi} + (\tilde{\phi}_x)^2 \tag{5.20}$$

今回、導出したBenney-like eq の２次元の場合

$$\tilde{\phi}_t = -\tilde{\phi}_{xx} + \tilde{\phi}_{yy} - \nabla^2\tilde{\phi}_x - \nabla^4\tilde{\phi} + |\nabla\tilde{\phi}|^2 \tag{5.21}$$

非線形のところが違う。

次に n-Burgers eq. の拡散係数 $D_{\|} \sim O(\epsilon^2)$(Eckhaus 不安定)とし、

$$\begin{aligned} \delta &= \epsilon^4\{P_1 + \epsilon P_2 + \cdots\}, \\ \tilde{U} &= \epsilon^5\{\tilde{U}_2 + \epsilon\tilde{U}_3 + \cdots\}. \end{aligned}$$

として同様の計算を行うと、

● 3-dimension K-dV-Burgers eq.

$$\tilde{\phi}_t = D_{\|}\tilde{\phi}_{xx} + D_{\perp}\nabla_{\perp}^2\tilde{\phi} + N_{\|}(\tilde{\phi}_x)^2 + A\tilde{\phi}_{xxx}$$

6 まとめ

微分方程式に対するくりこみ群の方法を用いて、反応拡散系における進行波パターンの変調を記述する位相場の発展方程式を各項のオーダーがバランスする形で導出した。このうち、Benney-like 方程式は新しく導出された方程式で今後の解析が期待される。

1：非等方 Burgers 方程式
2：非等方 Kuramoto-Sivashinsky 方程式
3：K-dV-Burgers 方程式
4：Benney-like 方程式

7 ref.

1: S.Goto, Y.Masutomi and K.Nozaki,Prog.Theor.Phys.102,471(1999)
2: Y.Masutomi and K.Nozaki,Physica D to be published
3: e-mail: yujim@allegro.phys.nagoya-u.ac.jp