

# 大振幅定在波の境界要素法による直接シミュレーション

東京大学大学院工学系研究科 濱野 健二(HAMANO Kenji)

Department of Mathematical Engineering and Information Physics

Graduate School of Engineering, University of Tokyo

東京大学大学院新領域創成科学研究科 村重 淳(MURASHIGE Sunao)

Department of Complexity Science and Engineering

Graduate School of Frontier Sciences, University of Tokyo

国立情報学研究所情報学基礎研究系 速水 謙(HAYAMI Ken)

Information Foundation Research Division

National Institute of Informatics

## 1. はじめに

本論文では、著者ら[1], [2], [3]が研究を行ってきた大振幅定在波の境界要素法による直接シミュレーションとシミュレーション中に発生する問題点、及びそれへの対処法についてまとめる。箱の中の定在波をシミュレーション対象とする。流体は完全流体で渦なし運動をするものとし、表面張力は無視する。初期波形は、静止した微小振幅の定在波とし、鉛直方向に加振して波の振幅を大きくする。

シミュレーションを行ってみると波の自由表面と箱とが交わる交点付近に突起状の波形が現れ、シミュレーションが破綻するという問題が起こる。また、波の振幅が大きくなったとき、波のエネルギーが、一定であるべき時にも関わらず、徐々に増加するという問題にも直面する。こういった問題がどのように発生し、また、それにどう対処したら良いかを明らかにする。

なお、本論文で提案する手法は定在波だけでなく、一般の波のシミュレーションにも適用可能である。

## 2. シミュレーションの設定

奥行き方向は一様として2次元空間で考え、長方形の箱に入った完全流体を考える (Fig. 1)。水平方向に  $x$  軸、鉛直方向上に向かって  $y$  軸をとる。流体と大気とが接する境界を自由表面と呼ぶ。また、箱と流体とが接する境界を壁と呼ぶ。箱の中心を  $x=0$  [m]、箱の幅を  $L=2\pi$  [m] とする。波の波長は箱の幅で決定し、波長は  $2\pi$  [m] という標準的な長さとなるため、自由表面の  $x, y$  座標の単位は省略する。 $y=0$  [m] を静水面にとり、箱の深さは波長に比べて十分深くとする。時間を  $t$  [s]、静水面から自由表面までの距離を  $\eta = \eta(x, t)$  [m] と表わす。箱の底は  $y = -h$  [m] とし、箱の高さは  $+\infty$  とする。外力は重力だけ考え、重力加速度を  $g=9.8$  [m/s<sup>2</sup>] とする。流体の速度ベクトルを  $\mathbf{v}=(u, v)$  とすると、速度ポテンシャル  $\phi$  が  $\mathbf{v}=\nabla\phi$  で定義される。また、 $\phi$  はラプラスの式  $\Delta\phi=0$  を満たす。境界条件は、自由表面上ではベルヌーイ方程式をみたすとし、壁上では壁境界条件とする。壁境界条件は壁に対する法線ベクトルを  $\mathbf{n}$  としたとき、 $\frac{\partial\phi}{\partial n}=0$  で与えられる。初期波形は当面、Fig. 1 のように、箱の中心で山に、両端で谷にした場合を考える。また、初期波形上の節点は  $x$  方向に等間隔に配置することとする。

## 3. 自由表面の時間発展追跡法

流体を流体粒子の集まりと見たとき、流体粒子の速度は次の式で与えられる。

$$\begin{aligned} u &= \frac{D\xi}{Dt} = \frac{\partial\phi}{\partial x}, \\ v &= \frac{D\eta}{Dt} = \frac{\partial\phi}{\partial y}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

ここで、 $\xi$ を流体粒子の  $x$  方向の変位、 $\eta$ を  $y$  方向の変位とする。 $\frac{D}{Dt}$  は物質微分を表わす。自由表面上に流体粒子（後述の境界要素法の節点を兼ねる。）を配置し、流体粒子の速度を式(3.1)に従って時間積分し、流体粒子の変位を求めることによって自由表面を追跡する。式(3.1)の  $\frac{\partial\phi}{\partial x}$ 、 $\frac{\partial\phi}{\partial y}$  は、自由表面上の接線ベクトルを  $\mathbf{s}$ 、法線ベクトルを  $\mathbf{n}$  としたとき、 $\frac{\partial\phi}{\partial \mathbf{s}}$  と  $\frac{\partial\phi}{\partial \mathbf{n}}$  から求められる。前者は自由表面上の  $\phi$  の値を数値微分して、後者は境界要素法により求める。時間積分では（4 次の）Taylor 展開に基づく時間発展スキーム[5]を使用した。また、時間刻み幅  $\Delta t$  は時間積分で生じる誤差の大きさに許容値（ $10^{-8}$ ）を設定し、その許容値を超えないようにアダプティブに変化させた[1]。

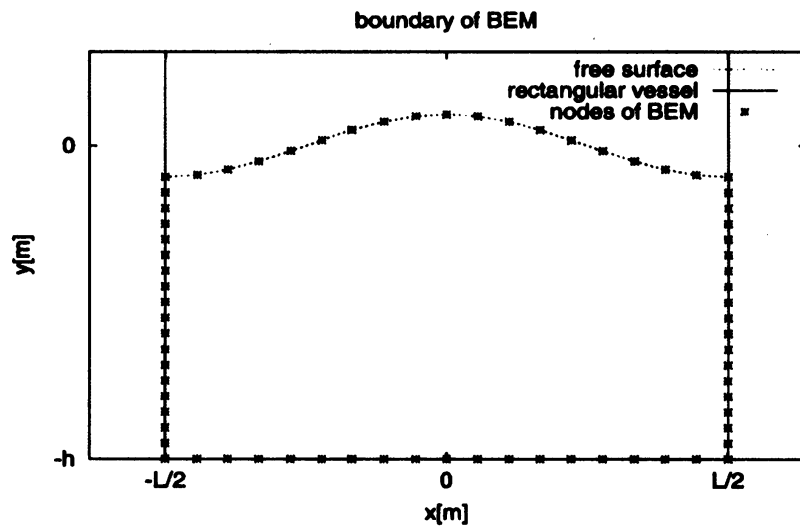


Fig. 1 シミュレーションの設定.

#### 4. 境界要素法

本論文における基礎方程式は次のようになる。

$$\Delta\phi = 0 \quad \text{in} \quad |x| < \frac{L}{2}, \quad -h < y < \eta(x,t), \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \|\nabla\phi\|^2 + g\eta(x,t) = 0 \quad \text{at} \quad y = \eta(x,t), \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} = 0 \quad \text{at} \quad x = \pm \frac{L}{2}, \quad y = -h. \quad (4.3)$$

式(4.1)は、流体の支配方程式である。自由表面と、箱と流体とが接する部分とを合わせたものを境界  $\Gamma$  とし、 $\Gamma$  上に節点  $i (1 \leq i \leq N)$  を設けると、各節点において次の積分方程式が成り立つ。

$$\frac{\theta_i}{2\pi} \phi_i + \int_{\Gamma} \phi q^* d\Gamma = \int_{\Gamma} q \phi^* d\Gamma \quad (1 \leq i \leq N). \quad (4.4)$$

ここで  $\phi^*$  はラプラスの式の基本解、 $q$  は  $\frac{\partial \phi}{\partial n}$ 、 $q^*$  は  $\frac{\partial \phi^*}{\partial n}$ 、 $\theta_i$  は点  $i$  において  $\Gamma$  が流体のある領域を見込む角である。そこで式(4.4)に境界要素法[9]を用いると、自由表面上の  $\phi$  の値、壁上の  $q$  の値が分かっているとき、自由表面上の  $q$  の値を計算することができる。本論文では式(4.4)の関数値  $\phi$ 、 $q$  を線形的に離散近似し、積分は解析的に行なった。以降、離散化された  $\Gamma$  の節点を形状の節点、離散化された  $\phi$ 、 $q$  の節点を関数値の節点と呼ぶことにし、関数値の節点は形状の節点の上にあるものとする。

次に、式(4.2)を式変形すると次のようになる。

$$\frac{D\phi}{Dt} = \frac{1}{2} \|\nabla\phi\|^2 - g \eta(x,t). \quad (4.5)$$

ここで  $\|\cdot\|^2$  はベクトルの二乗ノルムを表わす。この式を時間積分すれば自由表面上の  $\phi$  を計算することができる。

ところで、自由表面と壁との交点では  $q$  の値が不連続になる。関数値の不連続点を境界要素法のかど点とよぶことにする。かど点で、単純に関数値の節点を形状の節点の上に置くと、関数近似の精度が低下する。それを避けるための方法として二重節点法と非適合要素[9]が挙げられる。二重節点法では、かど点の上に関数値の節点を2つ配置する。非適合要素では、かど点から少しずれた所に関数値の節点を2つ配置する。(本論文では、かど点に隣接する  $\Gamma$  の要素を1:3に内分し、その内分点上に関数値の節点を配置した。)以下ではまず、かど点に二重節点法を用いてシミュレーションする。その後、非適合要素を使用し、両者の比較を行う。

境界要素法を用いた波のシミュレーションに関する過去の研究の一つとして、まず、周期境界条件を使用したシミュレーション法[4]が挙げられる。そこでは、波長  $2\pi$  の周期的な波を考え、その一周分分の波に着目する。次に  $x-y$  直交座標系から  $r-\theta$  の極座標系への写像:  $r=e^y$ ,  $\theta=-x$  を考える。この写像を用いると、直交座標系上の一周分分の波は極座標系上の閉曲線に写像される。この閉曲線に対し、境界要素法、時間発展スキームを適用して波の時間発展を求める。この方法では、周期的な波しか扱えない代わりに、境界要素法のかど点の問題に直面しない。一方、本論文では自由表面の一部にかど点を含む。その点で本論文は過去の研究よりも数値計算的に難しくなっている。

過去の研究のもう一つの方法として、級数展開を用いる方法[6]が挙げられる。空間や時間に関して周期性を仮定して、波の形状をフーリエ級数展開し、境界条件を満足するように、その展開係数を決定するという方法である。一方、本論文で提案する方法では空間や時間に関して周期性を仮定しないため、応用として非定常な波も扱える。ただし、本論文では[4][6][7]などの従来の手法と比較してシミュレーションの精度検証を行うため、定在波をシミュレーション対象とする。

$q$  の値を求める数値計算法は境界要素法の他に有限要素法なども考えられるが、境界要素法を用いることの利点として次のようなことが挙げられる。①節点数の割に  $q$  の値を精度良く求めることができる。②境界のみに節点を配置すれば良いので、後述の節点の再配置が容易に行える。③境界が複雑な場合にも対応しやすい。

## 5. 自由表面上の数値微分に関する注意と節点の再配置の必要性

大振幅定在波をシミュレーションする前準備のため、Penny & Price の定在波[7] ([7]の波の大

きさに関するパラメータ  $A=0.53$ ) をシミュレーションし、それを通して、自由表面上の数値微分に関する注意と節点の再配置の必要性について指摘する。

まず、自由表面上の数値微分の方法を説明する。自由表面上の節点数を  $n_f$  とし、右から左へ  $1, 2, \dots, n_f$  と番号をふる。1,  $n_f$  は自由表面と箱の交点上の節点に対応する。自由表面上の節点を持つ、微分すべき量を  $f$  とし、節点  $j$  における  $f$  の値を  $f_j$  ( $j=1, 2, \dots, n_f$ ) とする。そこで  $f$  を一次元座標  $j$  の関数と考え、 $\frac{df}{dj}$  を次のように近似する。

$$j=1 \text{ のとき } \frac{-137f_j + 300f_{j+1} - 300f_{j+2} + 200f_{j+3} - 75f_{j+4} + 12f_{j+5}}{60}, \quad (5.1)$$

$$j=2 \text{ のとき } \frac{-12f_{j-1} - 65f_j + 120f_{j+1} - 60f_{j+2} + 20f_{j+3} - 3f_{j+4}}{60}, \quad (5.2)$$

$$3 \leq j \leq n_f - 2 \text{ のとき } \frac{f_{j-2} - 8f_{j-1} + 8f_{j+1} - f_{j+2}}{12}, \quad (5.3)$$

$$j = n_f - 1 \text{ のとき } \frac{12f_{j-1} + 65f_j - 120f_{j+1} + 60f_{j+2} - 20f_{j+3} + 3f_{j+4}}{60}, \quad (5.4)$$

$$j = n_f \text{ のとき } \frac{137f_j - 300f_{j+1} + 300f_{j+2} - 200f_{j+3} + 75f_{j+4} - 12f_{j+5}}{60}. \quad (5.5)$$

$f_j$  の表わす関数が 4 次以下のとき、式(5.3)は正確な微分スキームになり、 $f_j$  の表わす関数が 5 次以下のとき、式(5.1)(5.2)(5.4)(5.5)は正確な微分スキームになる。当初、著者は  $j=2, n_f-1$  の場合に対し、式(5.2)(5.4)の代わりに式(5.1)(5.5)を使用していた（このようにして数値微分した場合を *failure* と呼ぶことにする）。

自由表面上の節点の再配置は[8]で使用されている方法に従った。その概略は、自由表面上の節点の  $x$  座標は  $x$  軸方向に等間隔になるようにとり、 $y$  座標はスプライン補間によって求め、速度ポテンシャルは、 $\phi(y+\Delta y, t+\Delta t)$  (4 次) Taylor 展開して求めるというものである。

Fig. 2 は  $A=0.53$  の Penny & Price の定在波を初期波形としてシミュレーションしたときのあたる時刻の波形をプロットしたものである。自由表面上の節点数は 19 個とした。failure は自由表面上の数値微分の方法を failure にし、節点の再配置をしたときの波形、regrid は節点の再配置をし、自由表面上の数値微分の方法を式(5.1-5)としたときの波形、noregrid は節点の再配置をせず、また、自由表面上の数値微分の方法を式(5.1-5)としたときの波形を表わす。failure と noregrid の場合、自由表面の両端に突起状の波形が現れている。一方、regrid の場合、波形全体が滑らかである。以上より、まず、自由表面上の数値微分の方法に式(5.1-5)を用い、また、節点の再配置を行うことにより定在波のシミュレーションが適切に行えることが分かる。

## 6. 大振幅定在波のシミュレーション

まず、 $A=0.005$  の Penny & Price の定在波を初期波形とし、次に一定時間、鉛直方向に加振する。加振の振幅を  $d$  [m]、波の角振動数を  $\omega$  [1/s] としたとき、重力加速度を時間の関数として、

$$g(t) = g + d(2\omega)^2 \sin(2\omega t), \quad (6.1)$$

のように鉛直加振を表現した。シミュレーション中の  $d$  と加振の角振動数  $2\omega$  の詳しい値は[3]を参照されたい。自由表面上の節点数は 63 個とし、節点の再配置を毎時間ステップ行った。自由表面上の数値微分の方法は式(5.1-5)とした。境界要素法のかど点の処理には二重節点法を用いた。

また、パラメータ  $A_c$  を次のように定義する。

$$A_c = -\frac{1}{g} \frac{D\phi_y}{Dt} \Big|_{y=\eta(x,t), x=0} \quad (6.2)$$

$A_c$  は波の中心の加速度を重力加速度で規格化したもので、波の大きさを表わすパラメータとなる。 $A_c=1$  のとき、極限定在波である。大振幅定在波のシミュレーション中における  $A_c$  の時間変化を Fig. 3 に示す。 $A_c$  が約 0.8 の値の定在波を得ることができたことが分かる。

シミュレーションの精度をエネルギー変動に基づいて検証する。Fig. 4 はシミュレーション中のエネルギー変動である。非加振中はエネルギーが一定に保たれている。しかし、波の振幅が大きくなると問題がある。Fig. 5 は Fig. 4 のグラフを拡大したものである。 $t=110\sim 120[s]$  は非加振で、波のエネルギーが一定に保たれているが、 $t=130\sim 140[s]$  では非加振にも関わらず、波のエネルギーが徐々に増加している。以上より、波の振幅が大きくなったとき、波のエネルギーが非加振中にも関わらず、徐々に増加するという問題が明らかとなった。

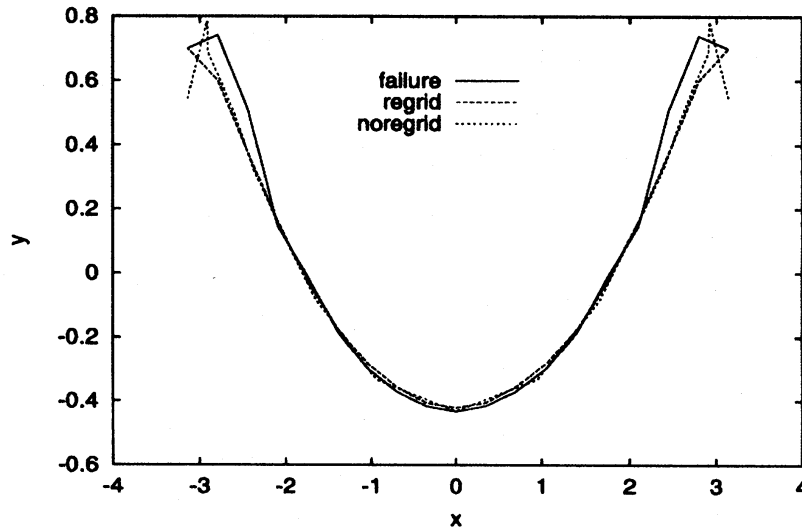


Fig. 2  $A=0.53$  の Penny & Price の定在波をシミュレーションしたときにできる自由表面両端の突起状の波形。failure は節点の再配置をし、自由表面上の数値微分の方法を failure にしたときの波形、regrid は節点の再配置をし、自由表面上の数値微分の方法を式(5.1-5)としたときの波形、noregrid は節点の再配置をせず、また、自由表面上の数値微分の方法を式(5.1-5)としたときの波形を表わす。

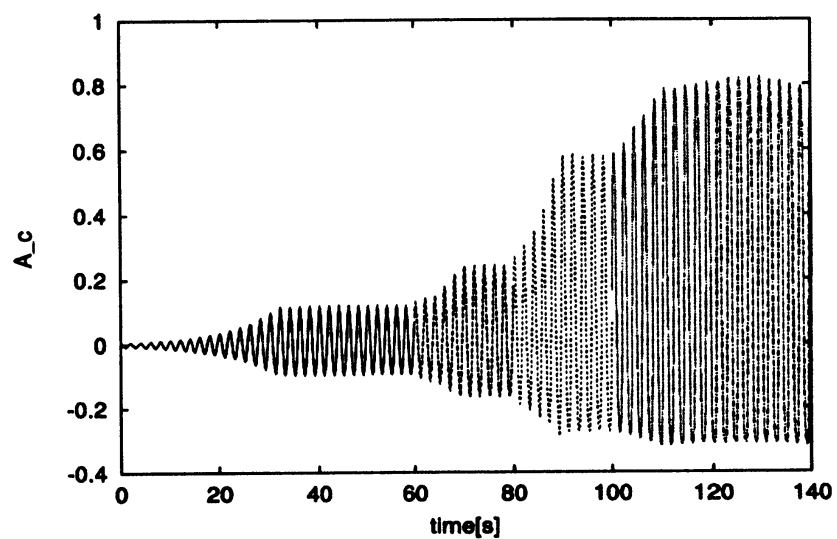


Fig. 3 大振幅定在波のシミュレーション中の  $A_c$  の時間変化.

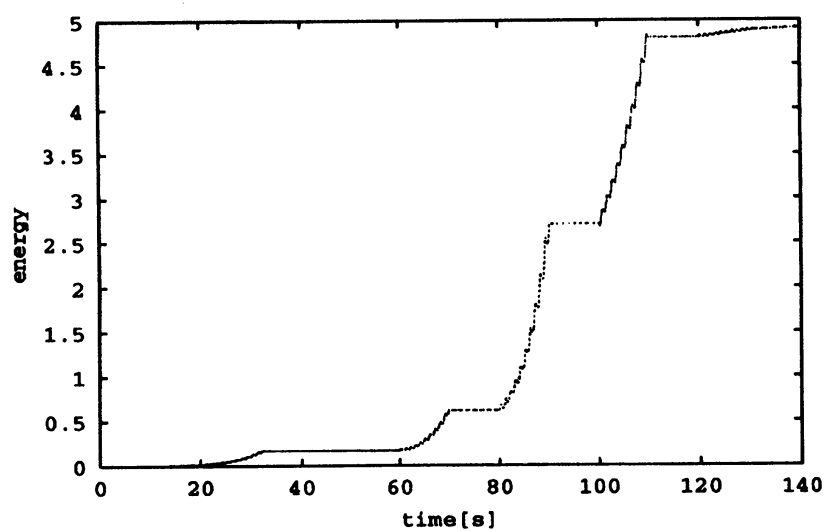


Fig. 4 大振幅定在波のシミュレーション中のエネルギー変動.

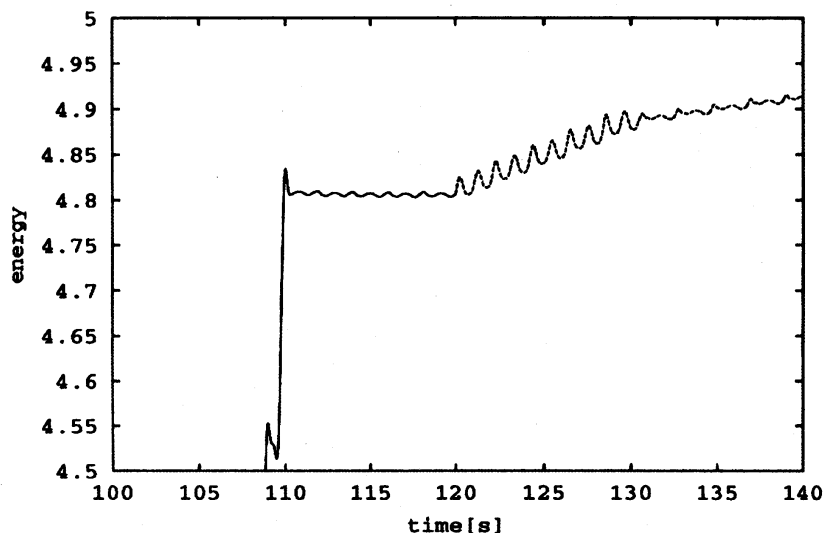


Fig. 5 大振幅定在波のシミュレーション中のエネルギー変動の拡大図.

## 7. 問題点の対処法

波の振幅が大きくなると、非加振中にも関わらず、波のエネルギーが徐々に増加するという問題は境界要素法のかど点処理に起因している。  $A_c=0.85$  の1周期の定常な定在波（九大応力研の岡村 誠先生より波形のデータをいただいた。）を初期波形として加振をしないでシミュレーションしたときのエネルギー変動率の時間変化を Fig. 6 に示す。境界要素法のかど点処理に二重節点法を用いた場合と、非適合要素を用いた場合をプロットしてある。自由表面上の節点数は63個とした。二重節点法を用いた場合、波のエネルギーが徐々に増加しているが、非適合要素を用いた場合、波のエネルギーの増加は抑えられている。また、この傾向はこの後も変わらない。

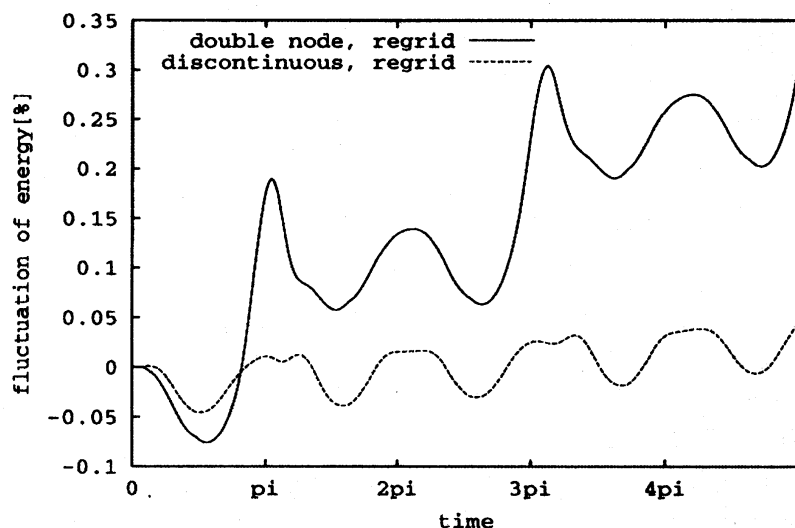


Fig. 6  $A_c=0.85$  の1周期の定常な定在波を初期波形としてシミュレーションしたときのエネルギー変動率 [%] の時間変化。節点の再配置を行い、境界要素法のかど点の処理に二重節点法を用いた場合（double node, regrid）と非適合要素を用いた場合（discontinuous, regrid）を示す。

ある時刻での右端付近の波形を Fig. 7 に示す。節点の再配置を行い、二重節点法を用いた場合

(double node, regrid), 非適合要素を用いた場合 (discontinuous, regrid), 過去の研究に従って周期境界条件を用いてシミュレーションした場合 (L-H, C, noregrid, 250points) を示している. 二重節点法を用いた場合の波形は, 周期境界条件を用いた場合と比べて, 右端の部分が少しずれている. 一方, 非適合要素を用いた場合は, 周期境界条件を用いた場合とほぼ一致する. 以上より, 波形から見ても, 境界要素法のかど点の処理に二重節点法ではなく, 非適合要素を用いた方が, シミュレーションを良好に行えることが分かる.

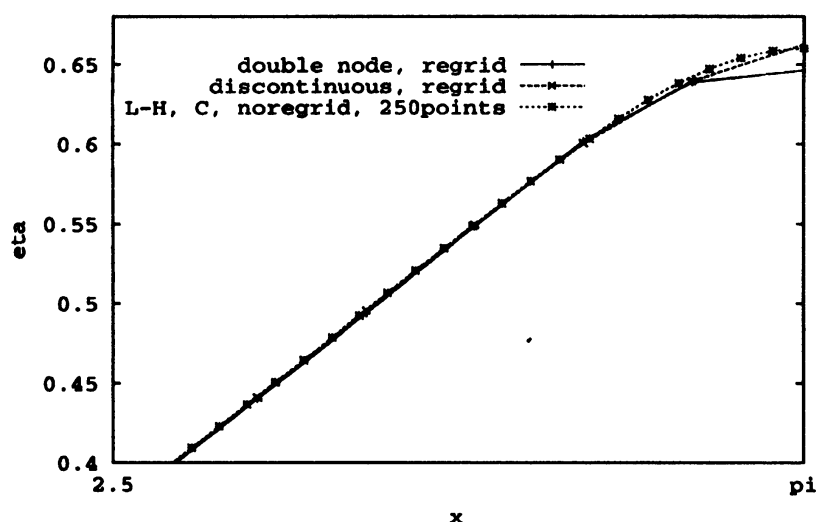


Fig. 7  $A=0.85$  の 1 周期の定常な定在波を初期波形としてシミュレーションしたときのある時刻での右端付近の波形. 節点の再配置を行い, 二重節点法を用いた場合 (double node, regrid) と非適合要素を用いた場合 (discontinuous, regrid), さらに, 過去の研究に従って, 周期境界条件を用い, 節点の再配置を行わないでシミュレーションした場合 (L-H, C, noregrid, 250points) を示す. L-H, C, noregrid, 250points の場合は自由表面上の節点数を 250 個とした.

ところで, 節点の再配置をするとき, スプライン補間をしている. スプライン補間がシミュレーションに与える影響を調べようとしたとき[1], 節点の再配置をしない場合のシミュレーション結果と比較する必要がある. しかし, 節点の再配置をしないと次のような問題が起こる.  $A=0.85$  の 1 周期の定常な定在波を初期波形として, 節点の再配置をしないで, シミュレーションしたときの波形の時間変化を Fig. 8 に示す. 自由表面上の節点数は 63 個とし, 二重節点法を用い, 初期波形は中心で山に, 両端で谷にした. このとき, 半周期も時間が経たないうちにシミュレーションは破綻する. 破綻したときの右端付近の波形は Fig. 9 に示すように, 突起状の波形ができている. また, 節点が両端部分に非常に密になっていることが Fig. 8 から分かる. 節点が両端部で密になることが突起状の波形ができる原因と考えられる. 次に, 初期波形を水平方向に半波長ずらし, 中心で谷に, 両端で山にしてシミュレーションを行ったときの波形の時間変化を Fig. 10 に示す. 今度は, 突起状の波形ができず, また, 両端で節点が密になっていないことも分かる. 以上より, 節点の再配置をしないで定在波をシミュレーションしたとき, 両端に突起状の波形ができるという問題は, 初期波形を中心で谷に, 両端で山にすることによって解決できることが確かめられた.



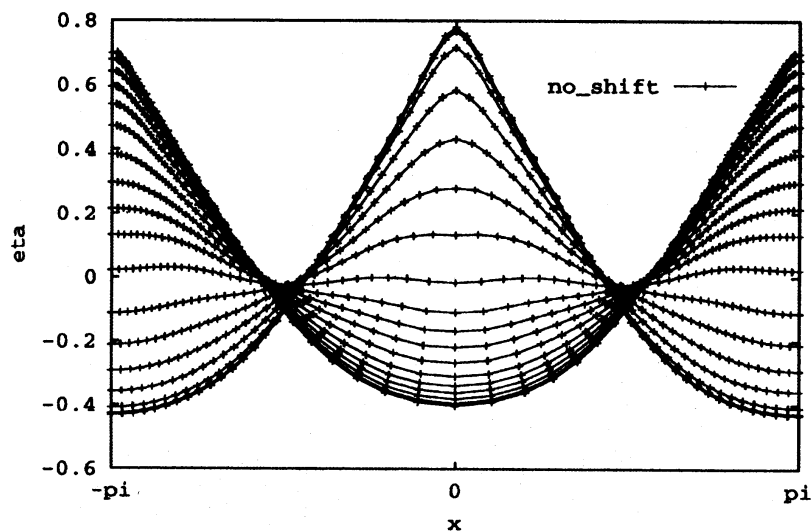


Fig. 8  $A_c=0.85$  の1周期の定常な定在波を初期波形として、節点の再配置をしないで、シミュレーションしたときの波形の時間変化. 初期波形は中心で山に、両端で谷にしている.

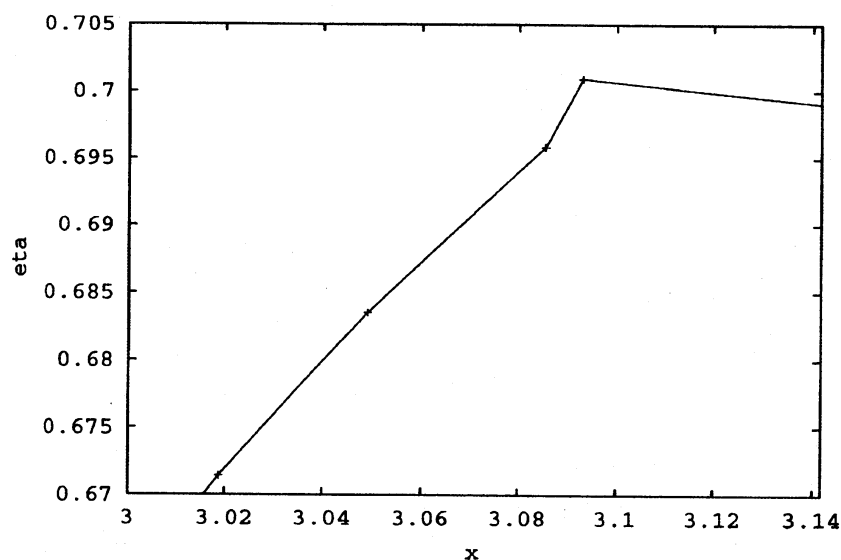


Fig. 9 Fig. 8 でシミュレーションが破綻したときにできる右端部の突起状の波形.

## 8. 結論

箱の中の大振幅定在波を、鉛直加振を利用してシミュレーションし、境界要素法を用いたシミュレーション法の問題点とその対処法を明らかにした. 波の振幅が大きくなると、非加振中にも関わらず、波のエネルギーが徐々に増加するという問題は、境界要素法のかど点処理を二重節点法ではなく非適合要素にすることで解決され、節点の再配置をしないとき、波の両端に突起状の波形ができるという問題は、初期波形を波の中心で谷に、両端で山にすることで解決された. この結果、本手法を用いて  $A_c=1$  に近い大振幅の定在波を高精度にシミュレーションできるようになった.

今後の課題は、なぜ非適合要素だとうまくいくのかを数学的な誤差解析や精度保証付き数値計

算によって明確に示したり，本論文の知見を踏まえて，定在波とは限らない一般の波（箱の中の進行波など）をシミュレーションしたりすることである。

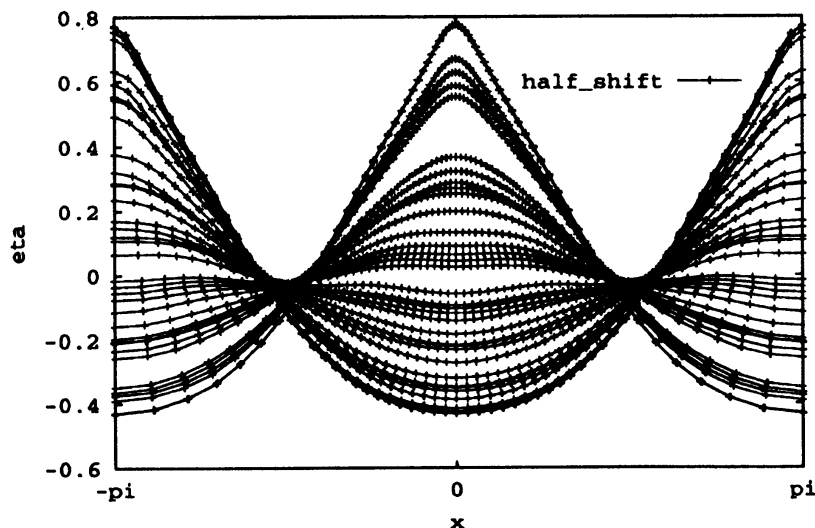


Fig. 10  $A_0=0.85$  の 1 周期の定常な定在波を初期波形として，節点の再配置をしないで，シミュレーションしたときの波形の時間変化．初期波形は中心で谷に，両端で山にしている．

## 参考文献

- [1] 濱野 健二: 大振幅定在波の境界要素法による直接シミュレーション法の問題点とその対処法, 東京大学大学院工学系研究科修士論文, 2001.
- [2] 濱野 健二, 村重 淳, 速水 謙: 自由表面の定在波の境界要素解析, *BTEC 論文集*, 10, pp. 43–48, 2000.
- [3] 濱野 健二, 村重 淳, 速水 謙: 大振幅定在波の境界要素法による直接シミュレーション, 境界要素法論文集, 17, pp. 91–96, 2000.
- [4] Longuet-Higgins, M. S. and Cokelet, E. D.: The deformation of steep surface waves on water: I. A numerical method of computation, *Proc. R. Soc. Lond.*, A 350, pp. 1–26, 1976.
- [5] Nakayama, T.: A computational method for simulating transient motions of an incompressible inviscid fluid with a free surface, *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 10, pp. 683–695, 1990.
- [6] 岡村 誠: 大振幅定在波の波形, 京都大学数理解析研究所講究録, 993, pp. 134–143, 1997.
- [7] Penny, W. G. and Price, A. T.: Finite periodic stationary gravity waves in a perfect liquid, *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*, 244, pp. 254–284, 1952.
- [8] 田中 宏明, 中山 司: 三次元貯槽内の非線形スロッシングに対する境界要素解法, 日本機械学会論文集 (B 編), 57–538, pp. 8–14, 1991.
- [9] 田中 正隆, 松本 敏郎, 中村 正行: 境界要素法, 計算力学と CAE シリーズ, 2, 培風館, 東京,