

弾性 Bingham 流体における応力波と残留応力

鳥取大・工 応用数理 大信田 丈志 (OOSHIDA Takeshi)

Dept. Applied Mathematics & Physics, Tottori Univ.

京大・基研 関本 謙 (Ken Sekimoto)

Yukawa Institute for Theoretical Physics, Kyoto Univ.

1 はじめに

Newton 流体では偏応力 (応力から静水圧を除いたもの) とひずみ速度のあいだに比例関係が成り立つので、どんな小さな偏応力であっても必ず流動を伴う。これに対して、偏応力が降伏値を超えない限り流動が生じないような連続体が塑性体であり、その最も単純なモデルは Bingham 流体 (Bingham 塑性体) と呼ばれている¹。たとえば単純剪断流

$$\mathbf{v} = (0, 0, \dot{\gamma}x), \quad \dot{\gamma} = \frac{dw}{dx} = \text{const.} \quad (1)$$

を維持するために必要な剪断応力を τ とすると、Newton 流体では τ が速度勾配 $\dot{\gamma}$ に比例するので $\tau = \eta\dot{\gamma}$ と書けるが、Bingham 流体では、さらに降伏応力 τ_* が流動化のために必要とされるので、流動時における剪断応力 τ とひずみ速度 $\text{grad } w = (dw/dx, 0, 0)$ の関係は

$$\tau = \tau_* + \eta\dot{\gamma} \quad (2)$$

のようになる。式 (2) のより正確な形が、あとで式 (7) および式 (8) により与えられる。

さて、荒っぽい言い方をするなら、降伏応力とは一種の静止摩擦である。Bingham 流体とは、Newton 流体に静止摩擦を付け加えたものであると言って良い。静止摩擦をもつ系では、運動がない状態でも剪断応力が残る可能性がある。斜面の上に置かれたおもりが静止しているとき、重力に抗してこのおもりを支えているのは静止摩擦力であり、これは、おもりと斜面のあいだの界面にはたらく剪断応力にほかならない。このような応力が、粉粒体の連続体力学では重要な役割を果たす。

塑性体と斜面上のおもりの類似性は、壁の上に塗ったペンキを考えるとよく分かるかもしれない。もしもペンキが Newton 流体であったならば、有限厚さの流体層は静止状態を維持することができず、重力のために流れ落ちてしまうだろう (いわゆる液膜流)。実際にはペンキは塑性流体なので²、降伏応力 τ_* の範囲内であれば、静止したまま重力に抗して自分を支えることができる。

重力が効かない系でも、静止状態で剪断応力が残ることはあり得る。すなわち、内部ひずみによる残留応力である。金属の単結晶では格子欠陥によるひずみが存在し得るし、複合材料での内部ひずみは教科書レベルの題材である [4, p.124]。残留応力を利用して外部からの加圧を打ち消し、降伏を遅れさせる「自緊法」という方法が知られているし [4, p.148]、それとは逆に、外部から加えられた応力と残留応力が強めあうことも考えられる。特に、破壊現象は、ひずみエネルギーの解放によって進行する (と考えられている) ので、残留応力エネルギーの解放が本質的な機構になる場合があるかもしれない。

さて、内部ひずみをもつ状態は、たとえばチーズやういろうを切断し、ゆがめて再び貼り合わせる (!) ことによって簡単に実現できる³。切断とは、分子と分子を巨視的に引き離すことである。流

¹たとえば文献 [1] の p101 や、文献 [2] の p71 を見よ。

²もちろん、ペンキは単純な Bingham 流体などではなく、実際の挙動はかなり複雑である。なお、「流れる固体」[3] という、レオロジーについてのすばらしい啓蒙書があり、ペンキの流動についても写真つきで解説が載っている。

³ここで考えている変形は、Volterra の転位構成 [5, p.535] によって螺旋転位を作るような変形である。ただし、結晶ではなく連続体を考えているので、Burgers ベクトルは離散的である必要はなく、連続的に任意の値を取ることができる。

動は、巨視的には連続的な変形であるが、それでも隣接した流体要素のあいだの距離は変化し、これを微視的に見ればやはり“分子と分子を引き離す”過程であるから、その意味では切断と似たようなものである。したがって、流動によって内部ひずみが生じる過程が存在するだろう。たとえば、ゴムを低温でガラス化したものに張力をかけて伸ばすという実験 [6] が報告されている。この実験では、ガラス化によって凍結されたひずみを強い応力によって強制的に変化させているわけで、これを塑性流動による内部ひずみの変化の過程として見るのはそんなに的外れではないはずだ。

以上のようなことから、残留応力の生成過程を見るために、塑性体が流動化あるいは固化する動的な過程を調べることにする。Bingham 流体の非定常運動については、関本による理論的研究 [7, 8] があり、流動状態にある塑性体がしだいに固化していく様子が調べられている。しかし、その逆過程、すなわち非流動状態にある塑性体が流動化する過程については、通常の Bingham モデルでは調べることができない。非流動状態にある Bingham 流体は剛体と同じなので、その内部での応力分布は始めから度外視されているのである⁴。流動化の過程を知るには、応力波の伝播を考慮しなければならない。

もう少し問題を具体的にしよう。半無限空間 $x > 0$ を満たす Bingham 流体を想定し、この流体の境界面 ($x = 0$) において z 方向の剪断応力を加えたときの系の応答を知りたい。ところが、もともと Bingham モデルでの非流動状態の扱いは、音速無限大の仮定をおいているようなものなので、この応力の影響は“瞬時に”無限遠まで伝わり、系全体が一斉に流動化するはめになる。これは確かに $t \rightarrow \infty$ で正しい結論なのだけれども [7]、ほんとうに知りたいのは有限の t で何が起きるかということなのだ。急激に加えられた応力に対する非定常過程を考える場合には、音速の有限性が本質的であるように思われるので、Bingham 流体に弾性を導入し、急激に応力が加えられたときの系の応答 (特に応力波の挙動) を見ることにする。

2 弾塑性モデルの構築

2.1 系の設定

以下、3次元性による複雑さを回避するため、流れは z 方向の1方向流、すなわち $\mathbf{v} = w\hat{\mathbf{z}} = (0, 0, w(x, y, t))$ であるものとする (速度 \mathbf{v} の x 成分および y 成分がゼロになるような拘束をかけている状況を想定する)。さらに、圧力勾配は存在しない (すなわち応力の等方成分は一様である) と仮定し、Poiseuille 流れを排除する。したがって、運動方程式に関する限り、応力としては偏応力だけを考えればよい。

非圧縮性を仮定すると $\partial_z w = 0$ であり、速度勾配テンソル $\nabla\mathbf{v}$ の対称成分は

$$\frac{1}{2}(\nabla\mathbf{v} + {}^t\nabla\mathbf{v}) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \partial_x w \\ 0 & 0 & \partial_y w \\ \partial_x w & \partial_y w & 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

のように書ける。このとき、Bingham 流体 (および Newton 流体) では、応力テンソル $\boldsymbol{\tau}$ は

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & {}^t\boldsymbol{\tau} \\ \boldsymbol{\tau} & 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

で与えられ⁵、もちろん対称テンソルである。また、 $\boldsymbol{\tau} \stackrel{\text{def}}{=} \hat{\mathbf{z}} \cdot \boldsymbol{\nabla} = (\tau_{xz}, \tau_{yz}, 0)$ は (x, y) 面内のベクトルとしてふるまい (したがって $\boldsymbol{\tau} = (\tau_x, \tau_y)$ と書いて良い)、かつ $\boldsymbol{\nabla}$ と同じだけの情報を含ん

⁴剛体のなかの応力分布を考えようとしても、下手をすると不定問題になるし (「4脚問題」を想起せよ)、仮にうまくいったとしても今度は応力を変位であらわすことができない。

⁵応力テンソルの符号は通常の定義に従う。すなわち、 τ_{ij} は、 j 方向の法線をもつ微小面において、面の表側 (法線ベクトルの正の側) にある流体が面の裏側にある流体に及ぼす力の i 成分を示す。

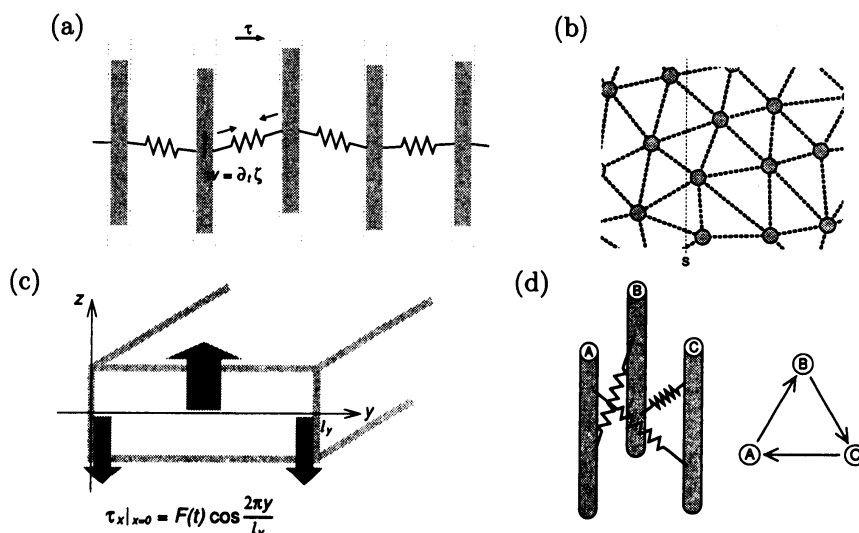


図 1: 割箸モデル

である。したがって、応力テンソル ∇ の代わりに“応力ベクトル” τ を考えれば済むので解析が簡単になる。特に、 ∇ の固有多項式が

$$|-\lambda \mathbf{1} + \nabla| = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & -\lambda & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + |\tau|^2 \lambda \quad (|\tau| = \sqrt{\tau_x^2 + \tau_y^2}) \quad (5)$$

となることから分かるように、応力不変量は本質的に $|\tau|$ だけである。

2.2 Bingham 流体の 1 方向流

一般に、Bingham 流体などの“広義の粘性流体”の 1 方向流れは、 w 方向の運動方程式

$$\rho \frac{\partial w}{\partial t} = \text{div } \tau = \frac{\partial \tau_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_y}{\partial y} \quad (6)$$

および構成方程式 (応力ひずみ関係式)

$$\text{grad } w = \left(\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, 0 \right) = \eta^{-1} \Phi(\tau) \quad (7)$$

によって支配される。ここで τ は式 (4) に現れる“応力ベクトル”であり、 $\Phi(\cdot)$ は非 Newton 粘性をあらわす関数である。特に、 $\Phi(\tau) = \tau$ すなわち $\Phi(\cdot)$ が恒等関数なら Newton 流体に帰着する。

ここで、Bingham 塑性体における Φ の形を具体的に示す必要がある。もし ∇ あるいは τ が、たとえば $\tau = (\tau(x, t), 0)$ のように実質的に 1 成分しかもたないならば、

$$\Phi(\tau) = \begin{cases} 0 & (|\tau| < \tau_*) \\ \tau - \tau_* \text{sgn}(\tau) & (|\tau| > \tau_*) \end{cases} \quad (8)$$

のようになる。関係式 (8) を多次元の 1 方向流れに一般化したものを、あとで式 (12) として示す。

2.3 弾性をもつ Bingham 流体

非流動状態から流動状態に移行する動的過程を知るには、応力波の伝播を考えなければならない。そこで、Bingham 塑性体に弾性応答をつけ加えたモデルを構築する。なお、降伏条件としては素

直な1次元 Bingham 塑性を2次元に拡張することだけを考え、Coulomb 摩擦 (Saint-Venant モデル) やチキソトロピーはすべて無視する。また、Yoshimura らのモデル [9] では、流動状態で弾性と粘性が応力加法的になっているが、我々のモデルでは応力は共通であるものとする。

ここでは1方向流だけを考えているので、微視的な機構⁶として、図1(a)のようなものを想定しよう。つまり、運動量を担う「割箸」が λ 程度の間隔で平行に並んでいて、それらのあいだをゴムひもがつないでいる。割箸は質量をもち、軸方向(z 方向とする)にうごくことができるが、それ以外の運動はできないように拘束されている。ゴムひもは、ある張力 T_0 で張られており、両側の変位の差 s_{ij} に応じて z 方向の復元力 $f = T_0 s_{ij} / \lambda$ を発生させる(線形弾性を象徴)。ただし、ゴムひもの端は有限の“Bingham 摩擦”によって割箸に固定されているだけなので、復元力 f がある限度を超えると、ゴムひもと割箸のあいだに、超過した力に比例した速さですべりが生じる(Bingham 塑性を象徴)。すなわち、このゴムひもは、Bingham 的ダッシュポットとバネとを直列(変位加法的)につないだような相互作用をあらわしている。これらの割箸(質量)とゴムひも(相互作用)は、 (x, y) 平面内に一様かつ等方的に分布しているものとする。もちろん、微視的に見ると図1(b)のようになるわけだが、巨視的に見ると、隣接する割箸を結ぶベクトル \mathbf{r}_{ij} の方向、すなわちゴムひもの方向を (x, y) 平面に射影したものは、平面内で等方的に分布する。ゴムひもの張力を巨視的に見たものが応力であるから、 \mathbf{r}_{ij} の等方性とは、応力ひずみ関係式が等方的であることを意味する。

図1(b)に示すように、系のなかに面 S をとる。面 S をとおしてはたらく微視的な力 f の合計を計算し、これを巨視的な応力に等しいと置くと、体積あたりのゴムひもの数密度を ν として

$$\boldsymbol{\tau} = -\nu \langle f \mathbf{r} \rangle \quad (9)$$

を得る。つまり、ゴムひもの方向 θ に関する $f \mathbf{r}$ の統計平均

$$\langle f \mathbf{r} \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \oint \frac{d\theta}{2\pi} f \mathbf{r}; \quad f = f(\mathbf{r}(\theta)), \quad \mathbf{r} = \lambda (\cos \theta, \sin \theta) \quad (10)$$

を計算すれば $\boldsymbol{\tau}$ が求められる。計算の過程は省略し、結果のみを示すと、“応力ベクトル” $\boldsymbol{\tau}$ は

$$S \partial_t \boldsymbol{\tau} + \eta^{-1} \Phi(\boldsymbol{\tau}) = \text{grad } w \quad (11)$$

のような方程式に従うことが分かる。ただし、 $\Phi(\boldsymbol{\tau})$ は式(8)の $\Phi(\tau)$ を一般化したもの

$$\Phi(\boldsymbol{\tau}) = \begin{cases} 0 & (|\boldsymbol{\tau}| < \tau_*) \\ \boldsymbol{\tau} - \tau_* \mathbf{e} & (|\boldsymbol{\tau}| > \tau_*) \end{cases} \quad \text{ただし } \mathbf{e} = \frac{\boldsymbol{\tau}}{|\boldsymbol{\tau}|} \quad (12)$$

で、ここで $|\boldsymbol{\tau}| = \sqrt{\tau_x^2 + \tau_y^2}$ である。降伏応力は $\tau_* = (2/\pi) f_* \lambda \nu$ によって与えられ、ここで f_* は微視的な降伏値、 λ はゴムひもの平均的な長さ、 ν はゴムひもの数密度である。結論として、系の挙動は、運動方程式(6)および構成方程式(11)(12)に従うことが分かる。

3 数値計算

3.1 次元解析

考えている流れが1方向流れであるため、流れに平行な方向(z 方向)とそれ以外の方向とのあいだにカップリングがなく、長さの尺度を独立にとることができる(方向性次元解析)。そこで、 $[L_x] = [L_y] \neq [L_z]$ とする。このとき、たとえば z 方向の速度 w の次元は $[w] = [L_z T^{-1}]$ である。

支配方程式系に含まれるパラメータは、密度 ρ 、弾性係数 S 、粘性係数 η 、降伏応力 τ_* の4つで、これらはすべて次元的に独立である⁷。そこで、4つのパラメータによってちょうど4つの独立な

⁶ただし、「微視的」とは言っても、熱運動が効くほど小さくはないものとする。

⁷もちろん、これは方向性次元解析を用いた場合の話である。平行流に対する攪乱を考えるような場合には、 $L_z/L_x = S\tau_*$ が“無次元”パラメータとして重要になるだろう。

基準量 T_* , L_x , L_z , M が確定する。特に、 $T_* = S\eta$ は粘弾性の (あるいはゴムひものすべりの) 緩和時間であり、 $c \stackrel{\text{def}}{=} L_x/T_* = 1/\sqrt{\rho S}$ は x 方向の音速⁸である。以下、特に断らない限り、 ρ , S , η , τ_* がすべて 1 になるような単位系で考えることにする。

3.2 解くべき問題の定式化

長方形領域 (正確に言えば四角柱)

$$D = \left\{ (x, y) \mid x_{\min} < x < x_{\max}, y_{\min} < y < y_{\max} \right\} \quad (13)$$

のなかの速度場 w および応力場 τ の時間発展を数値計算により求めることを考える。状況としては、 $x = 0$ で加えた荷重に対する系の応答を見たいので、境界条件を次のように設定する:

- 境界面 $x = x_{\min}$ では、応力の法線方向成分 $\tau_x|_{x=x_{\min}}$ を既知関数 $\tau_{\text{BC}}(y, t)$ として与える。
- 境界面 $x = x_{\max}$ では、応力波の反射をなるべく生じないように、非流動状態での弾性波に対する透過条件 $(\partial_t + c\partial_x)w = 0$ を課す (もちろん $c = 1$)。
- 系の側面 (境界面 $y = y_{\min}$ および $y = y_{\max}$) では、応力の法線方向成分がゼロ、すなわち $\tau_y = 0$ という条件を課す。

ここでは、境界での応力として、次の関数形を用いる:

$$\tau_x|_{x=0} = \tau_{\text{BC}}(y, t) = F(t) \cos ky \quad (14)$$

具体的に $k = 2\pi/\ell_y$ とした場合の概念図を図 1(c) に示す。1次元の場合は $k = 0$ とすれば良い。

3.3 1次元の数値計算結果

1次元の計算結果を図 2 に示す。境界条件はもちろん y に依存せず (すなわち $k = 0$)、また、境界での応力 $\tau_x|_{x=x_{\min}} = \tau_{\text{BC}}(t)$ の時間依存性は図 3 のようになっているものとする。計算領域は $x_{\min} = 0$, $x_{\max} = 15$ としている。計算スキームには CIP 法 [10] を用いた。

図 2(a) に示された計算結果を見る限り、場の量は連続であって、不連続性は生じない。すなわち、流動部分 ($|\tau| > 1$ の部分) と非流動部分 ($|\tau| < 1$ の部分) の境界 (降伏点あるいは降伏面) では、 $\partial_x\tau$ や $\partial_x w$ は不連続になるが、 τ や w そのものは連続である。いちおう、関本 [8] とつじつまが合っているように思える (ただし降伏面の進む向きが逆なので、状況は同じではないのだが)。

図 2(b) に、 τ の時空間発展を (x, t) 面での等値線図として示す。弾性領域で応力波が音速で進むのは当然であるが、降伏面もまた音速で進むことが分かる⁹。

4 残留応力の生成と 2次元での数値計算

4.1 内部ひずみと残留応力

2次元の数値計算に移る前に、内部ひずみと残留応力について定式化しておく。

まず、「割箸モデル」から導いた Bingham 弾塑性体の応力ひずみ関係式 (11) を、連続体の立場から見直してみる。割箸の変位の場を $\zeta = \zeta(x, y, t)$ とし、これが — 少なくとも局所的には — 弾

⁸ ここで音速と言っているのは、もちろん、横波の位相速度のことである。今の問題では、非圧縮性を仮定しているので縦波の速度は無限大であり、また、1方向流を仮定しているため表面波のようなものは存在しないことに注意しておく。

⁹ もちろん「音速」は横波の速度のことである。

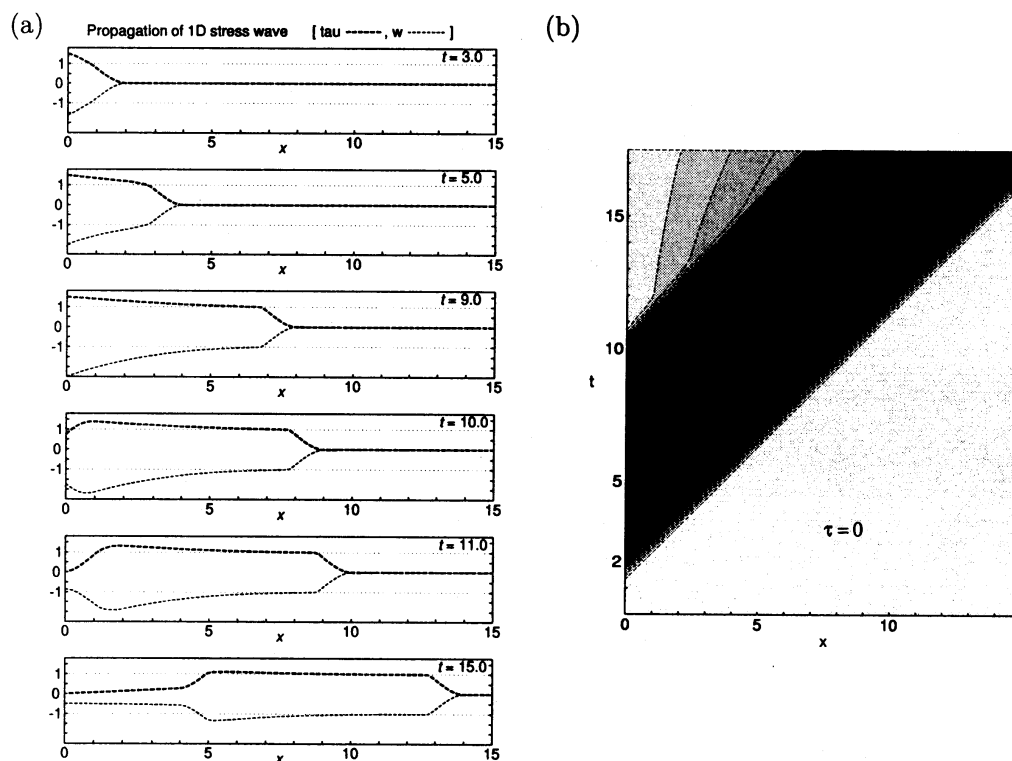


図 2: CIP 法による 1 次元の計算結果: (a) 各瞬間の応力場および速度場. (b) 応力場の時空間発展.

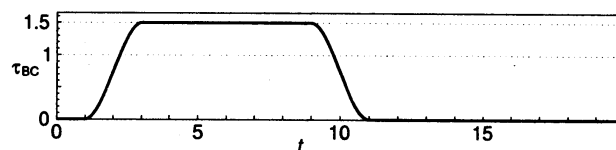


図 3: 境界条件 (1 次元)

性(ゴムの伸び)の寄与 ζ_E と Bingham 塑性(ゴムのすべり)の寄与 ζ_B の和で書けるような場合を考えてみる。このとき、流体の速度 w は

$$w = \dot{\zeta} = \dot{\zeta}_E + \dot{\zeta}_B \quad (15)$$

であり、弾性部分の構成方程式 (Hooke の法則) および塑性部分の構成方程式は、それぞれ

$$\tau_E = S^{-1} \text{grad } \zeta_E \quad (16)$$

$$\eta \text{grad } w = \Phi(\tau_B) \quad (17)$$

のように勾配を用いて書ける。モデルの仮定により、弾性部分と塑性部分の応力は共通であって $\tau_E = \tau_B = \tau$ が成り立ち、このことと式 (15)–(17) から、確かに構成方程式 (11) が出てくる。

さて、空間的にも時間的にも常に $|\tau| < \tau_*$ であり、塑性流動が全く生じない場合を考えよう。この場合、初期に $\zeta_B = 0$ であったならば、いつまでも $\zeta_B = 0$ であって変化しないことになるから、Hooke の法則 (16) で $\zeta = \zeta_E$ としたものがそのまま系の構成方程式になる。割箸モデルに即して言うと、ゴムのすべりが一度も生じたことがなく、したがって内部ひずみの全くない状態では、ゴムの弾性力 τ は割箸の変位 ζ の勾配で書けるはずである。つまり、Hooke の法則を $\zeta = \zeta_E$ の勾配で書いた式 (16) がいたるところで成り立ち、したがって

$$\oint \tau \cdot dr = 0 \quad \text{すなわち} \quad \text{rot } \tau = \partial_x \tau_y - \partial_y \tau_x = 0 \quad (18)$$

が成立しなければならない。式(18)は、式(16)を満たすような ζ_E の1価性を保証する条件である。さて、そうだとすれば、条件式(18)の破れの程度を示す量

$$\mathbf{H}[C] \stackrel{\text{def}}{=} \oint_C \boldsymbol{\tau} \cdot d\mathbf{r} \quad \text{あるいは} \quad \mathbf{h} \stackrel{\text{def}}{=} \text{rot } \boldsymbol{\tau}$$

が“内部ひずみ”の大きさをあらわす量だということになる。これらの量がゼロにならない状況は、微視的には図1(d)のような“三すくみ状態”であって、このとき、 ζ_E が一意的に定義できない。Hookeの法則(16)によって \mathbf{H} を $\tilde{\mathbf{u}} \stackrel{\text{def}}{=} \text{grad } \zeta_E$ の積分に読み替えるならば

$$\mathbf{B} \stackrel{\text{def}}{=} S\mathbf{H} = \oint \tilde{\mathbf{u}} \cdot d\mathbf{r}$$

となり、 \mathbf{B} は結晶の転位論におけるBurgersベクトル[5, 11]に相当する。ただし、Burgersベクトルの定義は微視的な構造に大きく依存しているが、 \mathbf{H} あるいは \mathbf{h} は巨視的な応力によって直接定義される量であるから、結晶以外の物質でも意味をもつことを指摘しておきたい¹⁰。以下、仮に \mathbf{H} を「応力循環」、 \mathbf{h} を「応力渦度」と呼ぶことにしよう。

さて、内部ひずみをあらわす「応力渦度」 $\mathbf{h} = \text{rot } \boldsymbol{\tau}$ の生成について知るため、 $\boldsymbol{\tau}$ を(2次元)Helmholtz分解する:

$$\boldsymbol{\tau} = (\partial_x \phi, \partial_y \phi) + (-\partial_y \psi, \partial_x \psi) \quad (19)$$

ただし、ポテンシャル ϕ および ψ は、Poisson方程式

$$\text{div } \boldsymbol{\tau} = \Delta \phi, \quad \text{rot } \boldsymbol{\tau} = \Delta \psi$$

の解として定められる。式(19)の第2項(ψ の項)が「応力渦度」に寄与する部分であり、内部ひずみによる残留応力をあらわしている。

系のもつ力学的エネルギー密度 \mathcal{E} は、適当に無次元化すると

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} w^2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\tau}^2 = \frac{1}{2} [w^2 + (\text{grad } \phi)^2 + (\text{grad } \psi)^2] - \det \begin{bmatrix} \partial_x \phi & \partial_y \phi \\ \partial_x \psi & \partial_y \psi \end{bmatrix} \quad (20)$$

で与えられる。ここで最後のJacobian(\det の項)は、空間積分するとゼロになるから(ただし ϕ および ψ が適当な境界条件を満たすものとして)、系のもつ力学的エネルギー E は

$$E = \int \mathcal{E} d^2 \mathbf{r} = \int \frac{1}{2} [w^2 + (\text{grad } \phi)^2 + (\text{grad } \psi)^2] d^2 \mathbf{r} \quad (21)$$

で与えられる。最後の $(\text{grad } \psi)^2/2$ の項が内部ひずみのエネルギーをあらわす。

4.2 3次元への拡張

内部ひずみの存在しない条件(18)は、変形 ζ がすべて弾性変形 ζ_E から成るとして、式(16)により ζ_E が矛盾なく定められるという条件であった。変形 ζ を与えることは、物質座標 $\mathbf{a} = \mathbf{a}(x, y) = {}^t(x, y, z_0)$ から位置 $\mathbf{x} = \mathbf{a} + {}^t(0, 0, \zeta)$ への対応を定めることを意味する。このとき、 $d\mathbf{x} = \overleftrightarrow{\mathbf{F}} \cdot d\mathbf{a}$ で変形勾配テンソル $\overleftrightarrow{\mathbf{F}}$ を定義し¹¹、さらに微小変形を仮定すると、ひずみテンソル $\overleftrightarrow{\mathbf{e}}$ は

$$\mathbf{1} + 2\overleftrightarrow{\mathbf{e}} = {}^t\overleftrightarrow{\mathbf{F}} \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \partial_x \zeta \\ 0 & 1 & \partial_y \zeta \\ \partial_x \zeta & \partial_y \zeta & 1 \end{bmatrix}, \quad F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial a_j} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \partial_x \zeta & \partial_y \zeta & 1 \end{bmatrix} \quad (22)$$

¹⁰Burgersベクトルと \mathbf{h} の関係は、たとえば超流動における波動関数のトポロジカルな欠陥としての量子渦と、通常の流体における渦度との関係に似ている。後者はより一般的な概念であって、結晶格子とかBose凝縮とかいった微視的な秩序を前提としない。

¹¹一般に $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{a}, t)$ について考えれば $d\mathbf{x} = \overleftrightarrow{\mathbf{F}} \cdot d\mathbf{a} + \mathbf{v} dt$ であるが(そして、 $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ が与えられた場合、むしろこの関係式で \mathbf{a} を定義するのだが)、変形勾配テンソルを定義するだけなら t を止めて考えれば十分である。

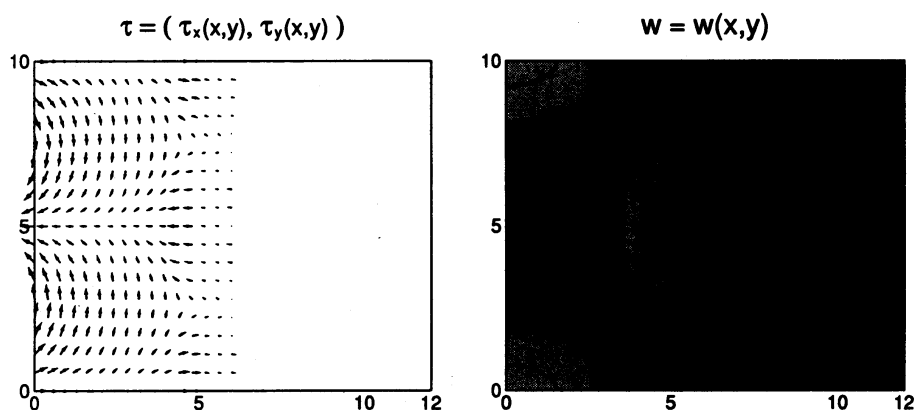


図 4: 境界での応力が比較的小さい場合の計算結果: 応力場と速度場 ($\tau_{BC}^* = 0.8, t = 5$)

となる。他方、応力テンソル $\vec{\tau}$ が式 (4) のように与えられたとすると、Hooke の法則によって

$$2\vec{e} = S\vec{\tau} = S \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_x \\ 0 & 0 & \tau_y \\ \tau_x & \tau_y & 0 \end{bmatrix} \quad (23)$$

のように \vec{e} が定まり、これが式 (22) と整合することを要請すると、応力渦度 $\mathbf{h} = \text{rot } \tau$ がゼロという条件が出てくる。より一般的な \vec{F} を考えれば 3 次元への拡張ができるはずであって、実際、Eshelby[12] は $S_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} -\epsilon_{ikm}\epsilon_{jln}\partial_m\partial_n e_{kl}$ のような不整合テンソル \vec{S} を導いている ($\vec{S} = 0$ が整合条件)。特に、ひずみテンソル \vec{e} が式 (23) のように与えられた場合、 $\mathbf{h} = 0$ ならば $S_{ij} = 0$ が成り立つことが、面倒だが単純な計算によって確認される¹²。

4.3 数値計算結果

残留応力がゼロの一様状態からスタートして有限の残留応力が生じる具体例を示すために、2次元の数値計算をおこなう。境界条件は、式 (14) において $k = 2\pi/l_y$ とし [図 1(c) を参照せよ]、また時間に関して階段関数的な荷重を想定して

$$F(t) = \begin{cases} \tau_{BC}^* & (0 < t < T) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases} \quad (24)$$

とする。境界条件に表れるパラメータのうち、 l と T は $l_y = y_{\max} - y_{\min} = 10$, $T = 10$ に固定し、 τ_{BC} の最大値を $\tau_{BC}^* = 0.8$ および $\tau_{BC}^* = 1.5$ とする (変数はすべて無次元化してある)。計算スキームには、2 ステップ Lax-Wendroff 法 [13, p.609] を用いた。

数値計算の結果のうち、 $t = 5$ および $t = 15$ における場の様子を図 4-8 に示す。このうち、図 5, 7 および 8 は $\text{div } \tau$ および $\text{rot } \tau$ の分布であり、後者 (応力渦度) が内部ひずみによる残留応力の存在を示している。ただし、境界条件 (24) が時間に関して階段関数的であるため、応力波の先頭部分では τ の空間微分はデルタ関数的になるはずであるが、この数値計算結果ではデルタ関数の前後に余計な振動が生じている。つまり、どうやら数値分散がかなり大きいようなので、結果の解釈には注意を要する。

まず、 $\tau_{BC}^* = 0.8$ の場合 (図 4, 5) を見る。この値は降伏値よりも少し下であって、応力集中が生じない限り流動化は起きないはずである。ただし、図 5 を見ると、境界近傍のごく一部で応力集中によって流動化が生じ、 $\text{rot } \tau \neq 0$ となる領域ができています。この部分で「いろいろを切って貼り

¹²なお \mathbf{h} は 1 階微分だが \vec{S} は 2 階微分である。この違いが何を意味するのか、筆者にはまだよく分からない。

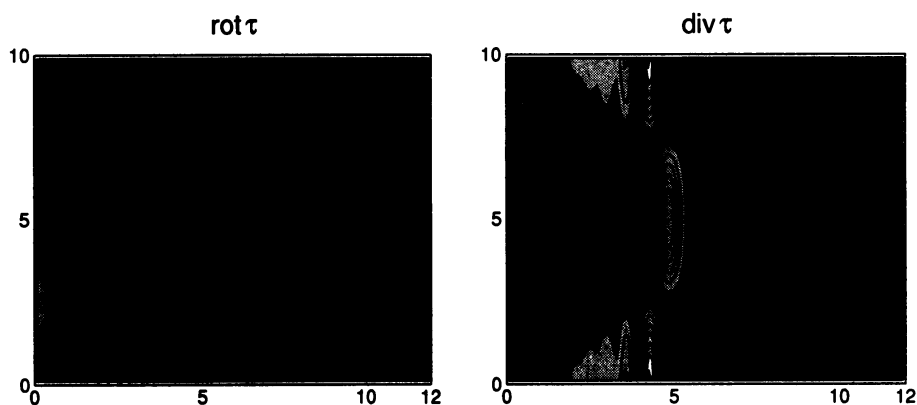


図 5: 図 4 の応力場の Helmholtz 分解

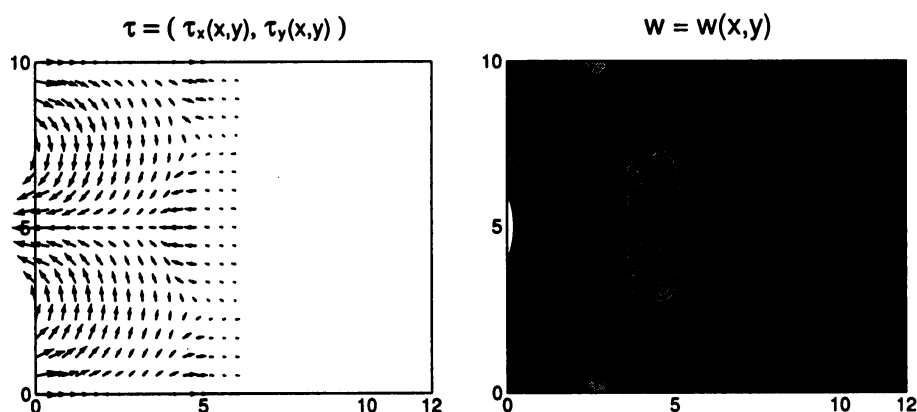


図 6: 境界での応力が比較的大きい場合の計算結果: 応力場と速度場 ($\tau_{BC}^* = 1.5, t = 5$)

合わせる」ような剪断変形が生じていることは直観的に明らかだろう。ただし、応力波の伝播している領域のほぼ全域で $\text{rot } \tau = 0$ であり、応力波モード ($\text{div } \tau$) は内部ひずみ (応力渦度 $\text{rot } \tau$) の影響をほとんど受けていないように見える。

他方、応力が大きい場合、すなわち $\tau_{BC}^* = 1.5$ の場合の結果を検証しよう。時刻 $t = 5$ における速度場の様子 (図 6 の右側) を見ると、 $x = 0$ の近くに、渦跳躍 (vortex jump) すなわち速度 w の勾配が急に変化する面ができていて (ただし速度そのものは連続である)、この面に囲まれるような形で、 $y = 5$ の部分が上向きの速度を、 $y = 0$ の部分が下向きの速度をもって運動している。図 7 の左側に示してある $\text{rot } \tau$ の分布を見ると、ちょうど速度場における渦跳躍に相当するところで応力渦度 $\text{rot } \tau$ が大きな値をとっていて、その外側には、 $\tau_{BC}^* = 0.8$ の場合と同様に、 $y = 2.5$ および $y = 7.5$ を中心とする扇型のひずみ領域が存在している。ただし、ひずみ領域の広がりには $\tau_{BC}^* = 0.8$ の場合よりもずっと大きい。なお、渦跳躍の内側では、速度勾配が存在するにもかかわらず、応力渦度はほとんどゼロである。

境界の応力を $t = 10$ で解放したときに発生する応力波は、さきほどの渦跳躍領域の運動と干渉して複雑な応力場を生じ、いくつかの場所で新たに降伏流動が生じる。その結果、図 8 のような複雑なひずみパターンが作られる。また、応力波も降伏流動の影響を受けて y 方向に複雑な構造をもつようになる。

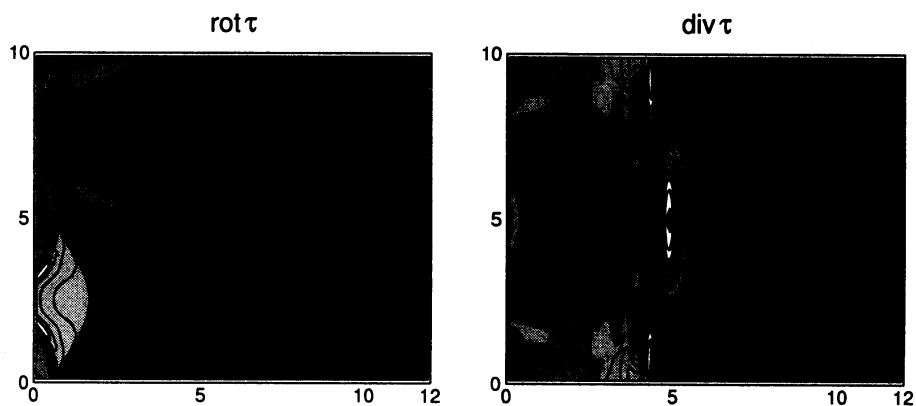


図 7: 図 4 の応力場の Helmholtz 分解

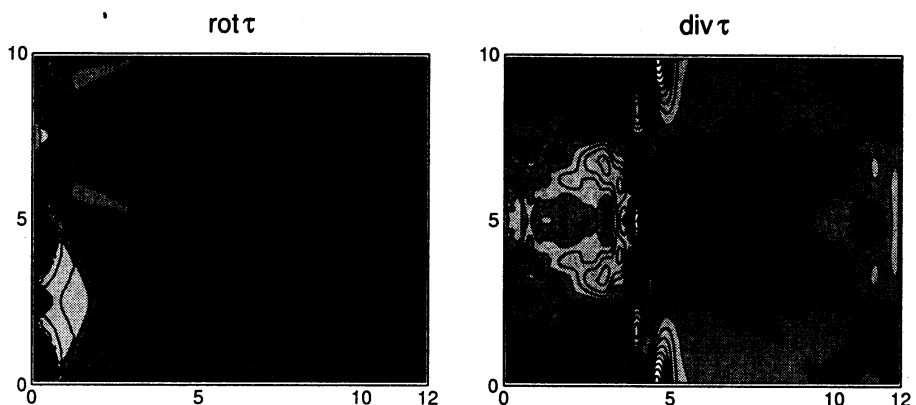


図 8: 時刻 $t = 15$ における応力場の Helmholtz 分解 ($\tau_{BC}^* = 1.5$)

参考文献

- [1] 中川鶴太郎. レオロジー 第 2 版. 岩波全書 249. 岩波書店, 1978.
- [2] 中村喜代次. 非ニュートン流体力学. コロナ社, 東京, 1997.
- [3] 中川鶴太郎. 流れる固体. 岩波科学の本. 岩波書店, 1975.
- [4] 吉田総仁. 弾塑性体力学の基礎. 共立出版, 東京, 1997.
- [5] P. M. Chaikin and T. C. Lubensky. 現代の凝縮系物理学. 吉岡書店, 2000. 松原 武生, 東辻 千枝子, 東辻 浩夫, 家富 洋, 鶴田 健二 訳.
- [6] 宮本嘉久, 深尾浩次, 関本謙. ゴムのガラス転移と塑性変形. 講演概要集 (第 55 回年次大会), 新潟, 2000. 日本物理学会. 講演番号 22pWD-16 (領域 11).
- [7] Ken Sekimoto. An exact non-stationary solution of simple shear flow in a Bingham fluid. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, Vol. 39, pp. 107–113, 1991.
- [8] Ken Sekimoto. Motion of the yield surface in a Bingham fluid with a simple-shear flow geometry. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, Vol. 46, pp. 219–227, 1993.
- [9] A. S. Yoshimura and R. K. Prud'homme. Response of an elastic bingham fluid to oscillatory shear. *Rheologica Acta*, Vol. 26, pp. 428–436, 1987.
- [10] 矢部孝. 固体, 液体, 気体の統一解法を目指す CIP 法. 日本流体力学会 '96 講演論文集, pp. 151–156. 日本流体力学会, 1996.
- [11] L. Landau and Ye. Lifshits. 弾性理論. 東京図書, 増補新版, 1989. 佐藤 常三, 石橋 善弘 訳.
- [12] J. S. Eshelby. The continuum theory of lattice defects. In David Turnbull Frederick Seitz, editor, *Solid State Physics*, Vol. 3, p. 79. Academic Press Inc., New York, 1956.
- [13] W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky, and W. T. Vetterling. *Numerical Recipes in C — C 言語による数値計算のレシピ*. 技術評論社, 1993. 丹慶 勝市, 奥村 春彦, 佐藤 俊郎, 小林 誠 訳.