数理解析研究所講究録 1209 巻 2001 年 161-169

IKK システムのリカージョン公式

日大・理工　今井宏治 (Koji Imai)、紺野公明 (Kimiaki Konno)
College of Science and Technology, Nihon Univ.

富山大　角畠浩 (Hiroshi Kakuhata)
Toyama Univ.

1　はじめに

論文 [1] において我々は、一般化された結合型非線形非分散 (非分散) 方程式の逆散乱形式のさらなる拡張を考えた。この拡張された逆散乱形式 (IKK システム) は、一つの Lie 代数を仮定したとき二つのヒエラルキーが結合した可積分方程式を与えるところに特徴がある。その具体例として su(2) を仮定したとき、渦糸の局所誘導方程式のヒエラルキーと非分散方程式のヒエラルキーが結合した可積分方程式が実際に得られた。

今回は、これらの二つのヒエラルキーのリカージョン公式をシステマティックな方法で導出する。また、二つのヒエラルキーが結合した可積分方程式を二つの回転角によって表す。この表示の特別な場合が、変形 KdV ヒエラルキーと sine-Gordon ヒエラルキーが結合した可積分方程式になることも示す。

2　IKK システム

IKK システムは次の逆散乱形式で与えられる:

$$\begin{aligned} \psi_x &= U\psi, \qquad U = \lambda S(x,t) \\ \psi_t &= V\psi, \qquad V = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda^k V_k(x,t). \end{aligned} \tag{1}$$

ここで、S, V_k はある Lie 代数の元、λ は t に依らない固有値、ψ は固有関数。両立条件 $(\psi_x)_t = (\psi_t)_x$、すなわち $U_t - V_x + [U, V] = 0$ から次の

一連の方程式

$$\cdots\cdots,$$

$$\lambda^4: \quad -V_{4x}+[S,V_3]=0, \tag{2a}$$

$$\lambda^3: \quad -V_{3x}+[S,V_2]=0, \tag{2b}$$

$$\lambda^2: \quad -V_{2x}+[S,V_1]=0, \tag{2c}$$

$$\lambda^1: \quad S_t-V_{1x}+[S,V_0]=0, \tag{2d}$$

$$\lambda^0: \quad -V_{0x}+[S,V_{-1}]=0, \tag{2e}$$

$$\lambda^{-1}: \quad -V_{-1x}+[S,V_{-2}]=0, \tag{2f}$$

$$\lambda^{-2}: \quad -V_{-2x}+[S,V_{-3}]=0, \tag{2g}$$

$$\cdots\cdots$$

が得られる。(2d) において、V_1 は (2) の $\lambda^2,\lambda^3,\lambda^4,\ldots$ に対する式から、V_0 は (2) の $\lambda^0,\lambda^{-1},\lambda^{-2},\ldots$ に対する式から決めることができる。より具体的には、V_1 は $V_k=0\,(k\geq 2)$ の場合、$V_k=0\,(k\geq 3)$ の場合 $\cdots$ のそれぞれから一つ決めることができ、一つのヒエラルキー $W_{1,1},W_{1,2},W_{1,3},\ldots$ を構成する。同様に V_0 もまた一つのヒエラルキー $W_{0,0},W_{0,-1},W_{0,-2},\ldots$ を構成する。これらの重ね合わせによって与えられる

$$V_k=\sum_{i=k}^{\infty}\alpha_i W_{1,i-k+1} \quad (k=1,2,\ldots), \tag{3a}$$

$$V_{-k}=\sum_{j=k}^{\infty}\alpha_{-j} W_{0,-j+k} \quad (k=0,1,\ldots) \tag{3b}$$

は (2) を満たすことが示される。ここで α_k は任意定数。このようにして、二つのヒエラルキーが結合した可積分方程式

$$S_t-\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k W_{1,k_x}+\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_{-k}[S,W_{0,-k}]=0 \tag{4}$$

を得る。

具体例として、Lie 代数が su(2) である場合を考える。su(2) の任意の元 A,B の間の内積を次のように定義する:

$$(A,B)=-2\mathrm{Tr}(AB). \tag{5}$$

このとき su(2) の任意の元 A, B, C の間に次の関係式が成り立つ:

$$(A,[B,C]) = (B,[C,A]) = (C,[A,B]), \tag{6a}$$

$$(A,[A,B]) = 0, \tag{6b}$$

$$[A,[B,C]] = (A,C)B - (A,B)C. \tag{6c}$$

また、条件

$$(S,S) = 1 \tag{7}$$

と境界条件

$$S \to S_0(\text{定数行列}); \quad S_t, S_x, S_{xx}, S_{xxx} \cdots \to 0 \qquad (x \to -\infty) \tag{8}$$

を課す。

まず、V_1 に関するヒエラルキーを求める。$V_k = 0\,(k \geq 2)$ の場合、(2c) において

$$V_1 = S \tag{9}$$

にとれる。したがって、

$$W_{1,1} = S \tag{10}$$

が得られる。$V_k = 0\,(k \geq 3)$ の場合、(2b), (2c) において

$$V_2 = S, \quad V_1 = -[S, S_x] \tag{11}$$

にとれる。ここで、(6c) と (7) から得られる関係式 $[S,[S,S_x]] = -S_x$ を使った。したがって、

$$W_{1,2} = -[S, S_x] \tag{12}$$

が得られる。$V_k = 0\,(k \geq 4)$ の場合、(2a), (2b), (2c) において

$$V_3 = S, \quad V_2 = -[S, S_x], \quad V_1 = -\frac{1}{2}(S_x, S_x)S - [S,[S, S_{xxx}]] \tag{13}$$

にとれる。したがって、

$$W_{1,3} = -\frac{1}{2}(S_x, S_x)S - [S,[S, S_{xxx}]] \tag{14}$$

が得られる。同様にして、$W_{1,k}\,(k \geq 4)$ を得ることができる。

V_0 に関するヒエラルキーも同様な方法によって求めることができる:

$$
\begin{aligned}
&W_{0,0} = S_0,\\
&W_{0,-1} = \int_{-\infty}^{x} [S(x',t), S_0]\mathrm{d}x',\\
&W_{0,-2} = \int_{-\infty}^{x} [S(x',t), \int_{-\infty}^{x'} [S(x'',t), S_0]\mathrm{d}x'']\mathrm{d}x'],\\
&\qquad\qquad \cdots\cdots .
\end{aligned}
\tag{15}
$$

したがって、これらの $W_{1,k}$ と $W_{0,-k}$ を (4) に代入して次の可積分方程式を得る:

$$
\begin{aligned}
&S_t - \alpha_1 S_x - \alpha_2(-[S, S_{xx}]) - \alpha_3\left(-S_{xx} - \frac{3}{2}(S_x, S_x)S\right)_x - \cdots\\
&\quad + \alpha_0[S, S_0] + \alpha_{-1}[S, \int_{-\infty}^{x}[S(x',t), S_0]\mathrm{d}x']\\
&\quad + \alpha_{-2}[S, \int_{-\infty}^{x}[S(x',t), \int_{-\infty}^{x'}[S(x'',t), S_0]\mathrm{d}x'']\mathrm{d}x'] + \cdots = 0.
\end{aligned}
\tag{16}
$$

S を曲線に対する接ベクトルにとると、V_1 に関する項は渦糸の局所誘導方程式のヒエラルキーとなっている。また、係数 α_{-1} の項によって与えられる方程式は非分散方程式と一致する。

次節で、この su(2) case に対する $W_{1,k}, W_{0,-k}$ をそれぞれ $W_{1,1}, W_{0,0}$ から順次与えるようなリカージョン公式を導く。

3 リカージョン公式

局所誘導ヒエラルキーに対するリカージョン公式

(3a) を (2) に代入すると

$$
-W_{1,k-1_x} + [S, W_{1,k}] = 0 \quad (k = 2, 3, \ldots) \tag{17}
$$

を得る。以下で (17) から、$W_{1,k-1}$ から $W_{1,k}$ を与えるリカージョン公式を導く。

まず、(17) と S との交換関係をとり、関係式 (6c) と条件 (7) を使うと

$$
W_{1,k} = w_k S - [S, W_{1,k-1_x}] \quad (k = 2, 3, \ldots) \tag{18}
$$

を得る。ここで、$w_k \equiv (S, W_{1,k})$。次に、w_k を $W_{1,k-1}$ によって表すことを考える。(17) と S との内積をとり、関係式 (6b) を使うと関係式

$$(S, W_{1,k_x}) = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots) \tag{19}$$

を得る。また、(18) は x で微分すると

$$W_{1,k_x} = w_{kx} S + w_k S_x - [S_x, W_{1,k-1_x}] - [S, W_{1,k-1_{xx}}] \tag{20}$$

となる。この式と S との内積をとって、条件 (7) と関係式 (6b),(19) を使うと

$$w_k = \int_{-\infty}^{x} (S(x', t), [S_x(x', t), W_{1,k-1_x}(x', t)])\mathrm{d}x' \tag{21}$$

を得る。(18) と (21) は、$W_{1,k-1}$ から $W_{1,k}$ を与えるリカージョン公式となっており、$W_{1,1}$ として S を与えると順に $W_{1,2}, W_{1,3}, \ldots$ が求められる。この局所誘導ヒエラルキーに対するリカージョン公式は、Langer と Perline [2] による橋本写像を用いる方法等幾つかの方法で導出されているが、我々の導出法は従来の方法に比べより直接的で簡単化された方法になっている。

非分散方程式のヒエラルキーに対するリカージョン公式

(3b) を (2) に代入すると

$$-W_{0,k-1_x} + [S, W_{0,k}] = 0 \quad (k = 0, -1, -2, \ldots) \tag{22}$$

を得る。$W_{0,k-1}$ から $W_{0,k}$ を与えるリカージョン公式は単純な積分によって得られる:

$$W_{0,-j} = \int_{-\infty}^{x} [S(x', t), W_{0,-j+1}(x', t)]\mathrm{d}x' \quad (j = 1, 2, \ldots). \tag{23}$$

$W_{0,0}$ を定数行列 S_0 で与えると順に $W_{0,-1}, W_{0,-2}, \ldots$ が求められる。

4 回転角表示

su(2) の基底として次のものを選ぶ:

$$X_k \equiv -\frac{\mathrm{i}}{2}\sigma_k \quad (k = 1, 2, 3). \tag{24}$$

ここで、$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ は Pauli 行列。境界条件 (8) の中の S_0 を

$$S_0 = X_3 \tag{25}$$

とおく。このとき、条件 (7) から S は次のように表せる:

$$S = \mathrm{e}^{\gamma X_3} \mathrm{e}^{\varphi X_2} X_3 \mathrm{e}^{-\varphi X_2} \mathrm{e}^{-\gamma X_3}. \tag{26}$$

ここで、γ, φ はそれぞれ 3 軸、2 軸の周りの回転角を表し、(8) に対応して境界条件

$$\varphi \to 0 (\operatorname{mod} 2\pi); \quad \varphi_t, \varphi_x, \varphi_{xx}, \ldots, \gamma_t, \gamma_x, \gamma_{xx}, \ldots \to 0 \quad (x \to -\infty) \tag{27}$$

を満たす。以下で、二つのヒエラルキーが結合した可積分方程式 (4) を回転角 γ, φ で表すことを考える。

新しい基底

$$T_k \equiv \mathrm{e}^{\gamma X_3} \mathrm{e}^{\varphi X_2} X_k \mathrm{e}^{-\varphi X_2} \mathrm{e}^{-\gamma X_3} \quad (k = 1, 2, 3) \tag{28}$$

を導入する。(26) から

$$S = T_3 \tag{29}$$

である。この基底は以下の関係式を満たす:

$$[T_i, T_j] = \sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ij}{}^k T_k, \quad (T_i, T_j) = \delta_{ij}, \tag{30}$$

$$T_{kx} = \sum_{l=1}^{3} a_k{}^l T_l, \quad k = 1, 2, 3, \tag{31}$$

$$a_2{}^3 = -a_3{}^2 = -\gamma_x \sin\varphi, \quad a_3{}^1 = -a_1{}^3 = \varphi_x,$$
$$a_1{}^2 = -a_2{}^1 = \gamma_x \cos\varphi, \quad a_1{}^1 = a_2{}^2 = a_3{}^3 = 0,$$

$$\begin{aligned} T_1 &= \cos\varphi \cos\gamma X_1 + \cos\varphi \sin\gamma X_2 - \sin\varphi X_3, \\ T_2 &= \cos\gamma X_2 - \sin\gamma X_1, \\ T_3 &= \sin\varphi \cos\gamma X_1 + \sin\varphi \sin\gamma X_2 + \cos\varphi X_3. \end{aligned} \tag{32}$$

方程式 (4) において、まず S_t を計算すると

$$S_t = \varphi_t T_1 + \gamma_t \sin\varphi T_2 \tag{33}$$

を得る。W_{1,k_x} と $[S, W_{0,-k}]$ は、一般に T_1, T_2, T_3 の線形結合によって表せる:

$$W_{1,k_x} = \sum_{j=1}^{3} \mu_k{}^j T_j, \tag{34}$$

$$[S, W_{0,-k}] = \sum_{j=1}^{3} \nu_{-k}{}^j T_j. \tag{35}$$

リカージョン公式 (18) を微分した式 (20) において、$w_{kx}S - [S_x, W_{1,k-1_x}]$ が 0 になることから、W_{1,k_x} のリカージョン公式は次のようになる:

$$W_{1,k_x} = w_k S_x - [S, W_{1,k-1_{xx}}] \quad (k = 2, 3, \ldots). \tag{36}$$

(34) を (36) に代入して、係数 $\mu_k{}^j$ のリカージョン公式

$$\begin{pmatrix} \mu_k{}^1 \\ \mu_k{}^2 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \mu_{k-1}{}^1 \\ \mu_{k-1}{}^2 \end{pmatrix} = \cdots = P^{k-1} \begin{pmatrix} \varphi_x \\ \gamma_x \sin\varphi \end{pmatrix}, \tag{37a}$$

$$\mu_k{}^3 = 0 \tag{37b}$$

を得る。ここで

$$P \equiv \begin{pmatrix} -\varphi_x \,\mathrm{I}\, \gamma_x \sin\varphi + \gamma_x \cos\varphi & \varphi_x \,\mathrm{I}\, \varphi_x + \partial_x \\ -\gamma_x \sin\varphi \,\mathrm{I}\, \gamma_x \sin\varphi - \partial_x & \gamma_x \sin\varphi \,\mathrm{I}\, \varphi_x + \gamma_x \cos\varphi \end{pmatrix},$$

$$\partial_x \equiv \partial/\partial x, \quad \mathrm{I} \equiv \int_{-\infty}^{x} \mathrm{d}x'.$$

また、リカージョン公式 (23) から

$$[S, W_{0,-k}] = [S, \int_{-\infty}^{x} [S(x', t), W_{0,-(k-1)}] \mathrm{d}x'] \quad (k = 0, 1, 2, \ldots) \tag{38}$$

を得る。(35) を (38) に代入して、係数 $\nu_{-k}{}^j$ のリカージョン公式

$$\begin{pmatrix} \nu_{-k}{}^1 \\ \nu_{-k}{}^2 \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} \nu_{-k+1}{}^1 \\ \nu_{-k+1}{}^2 \end{pmatrix} = \cdots = Q^k \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin\varphi \end{pmatrix}, \tag{39a}$$

$$\nu_{-k}{}^3 = 0 \tag{39b}$$

を得る。ここで

$$Q \equiv \begin{pmatrix} {q_1}^1 & {q_1}^2 \\ {q_2}^1 & {q_2}^2 \end{pmatrix},$$

$${q_1}^1 \equiv \sin\gamma \,\mathrm{I} \cos\varphi \cos\gamma - \cos\gamma \,\mathrm{I} \cos\varphi \sin\gamma,$$
$${q_1}^2 \equiv -\sin\gamma \,\mathrm{I} \sin\gamma - \cos\gamma \,\mathrm{I} \cos\gamma,$$
$${q_2}^1 \equiv \cos\varphi(\cos\gamma \,\mathrm{I} \cos\varphi \cos\gamma + \sin\gamma \,\mathrm{I} \cos\varphi \sin\gamma) + \sin\varphi \,\mathrm{I} \sin\varphi,$$
$${q_2}^2 \equiv -\cos\varphi \cos\gamma \,\mathrm{I} \sin\gamma + \cos\varphi \sin\gamma \,\mathrm{I} \cos\gamma.$$

したがって、(4) は回転角 γ, φ によって次の形に書き直せる:

$$\begin{pmatrix} \varphi_t \\ \gamma_t \sin\varphi \end{pmatrix} - \sum_{k=1}^{\infty} P^{k-1} \begin{pmatrix} \varphi_x \\ \gamma_x \sin\varphi \end{pmatrix} + \sum_{k=0}^{\infty} Q^k \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin\varphi \end{pmatrix} = 0. \qquad (40)$$

このように回転角を用いると、(4) を具体的な形の一本の行列方程式に表すことができる。

条件 $\gamma =$ 一定 を課したとき、方程式 (40) は次の二つの方程式になる:

$$\varphi_x - \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_{2m+1}(-\varphi_x \mathrm{I} \varphi_x \partial x - (\partial x)^2)^m \varphi_x$$
$$+ \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{-2n-1}\{-\mathrm{I}(\cos\varphi \,\mathrm{I} \cos\varphi + \sin\varphi \,\mathrm{I} \sin\varphi)\}^n (\mathrm{I} \sin\varphi) = 0, \qquad (41a)$$

$$-\sum_{m=0}^{\infty} \alpha_{2m}(-\varphi_{xx} \mathrm{I} \varphi_x - {\varphi_x}^2 - (\partial x)^2)^m (-\varphi_{xx})$$
$$+ \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{-2n}\{-(\cos\varphi \,\mathrm{I} \cos\varphi + \sin\varphi \,\mathrm{I} \sin\varphi)\,\mathrm{I}\}^n (-\sin\varphi) = 0. \qquad (41b)$$

(41a) は変形 KdV 方程式のヒエラルキーと sine-Gordon 方程式のヒエラルキーが結合した可積分方程式になっている。例えば、$\alpha_3 = 1$ でそれ以外の α_k が 0 である場合、(41a) は変形 KdV 方程式

$$\varphi_t + \frac{1}{2}\varphi^3 + \varphi_{xxx} = 0 \qquad (42)$$

になる。また、$\alpha_{-1} = -1$ でそれ以外の α_k が 0 である場合、(41a) は sine-Gordon 方程式

$$\varphi_{tx} = \sin\varphi \qquad (43)$$

になる。さらに、ある $m(>0)$ に対して $\alpha_{-2m-1}=(-1)^{m+1}$ でそれ以外の α_k が 0 である場合、(41a) は Sasaki と Bullough [3] による高次 sine-Gordon 方程式

$$\varphi_{tx}=\{\cos\varphi\,\mathrm{I}\cos\varphi+\sin\varphi\,\mathrm{I}\sin\varphi\}^m\sin\varphi \tag{44}$$

になる。

5 まとめ

本稿では、IKK システムの su(2) case に対する二つのヒエラルキーのリカージョン公式をシステマティックな方法で導出した。また、二つのヒエラルキーが結合した可積分方程式の回転角による表示を求め、一方の角度を定数とおいたとき変形 KdV ヒエラルキーと sine-Gordon ヒエラルキーが結合した可積分方程式になることを示した。

V_0 に関するヒエラルキーのリカージョン公式は単純な積分だけで得られるので、他の Lie 代数の場合のリカージョン公式も同じ形をとる。V_1 に関するヒエラルキーのリカージョン公式を、より高次の Lie 代数の場合に対して導出することが今後の課題の一つである。

参考文献

[1] K. Imai, K. Konno and H. Kakuhata: *A System with Two Integrable Hierarchies*, J. Phys. Soc. Jpn. **68** (1999) 1115.

[2] J. Lunger and R. Perline: J. Math. Phys. **35** (1994) 1732.

[3] R. Sasaki and R. K. Bullough: Proc. R. Soc. Lond. **A376** (1981) 401.