数理解析研究所講究録 1212 巻 2001 年 65-72

ロドリーグの公式について

田島 慎一 (S. Tajima)
新潟大学工学部情報工学科 (Niigata Univ.)

1 序

ルジャンドル多項式は, 区間 $[-1, +1]$ 上の直交多項式系をなす特殊関数であり, ロドリーグの公式により

$$p_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$

で与えられる. このロドリーグの式を用いると, ルジャンドル多項式が満たす基本的関係

$$(n+1)p_{n+1}(x)-(2n+1)xp_n(x)+np_{n-1}(x)=0,$$

$$\frac{d}{dx}(1-x^2)\frac{d}{dx}p_n(x)+n(n+1)p_n(x)=0,$$

や, 直交関係

$$\int_{-1}^{+1} p_n(x)p_m(x)dx=\frac{2}{2n+1}\delta_{n,m} \tag{1}$$

を容易に導けることも広く知られている.

ルジャンドル多項式と同様に, エルミート多項式やラゲール多項式もロドリーグ型の表示を持つ. そのため, これらの古典的直交多項式系を導入する際にその定義としてロドリーグの公式を用いることが普通に行われている. その意味で, ロドリーグの公式は常識に属するとみなされていると思う. しかし, あえてその常識をすべて忘れ去り, ロドリーグの公式について考えてみることにする. 次に述べる結果を導き, ロドリーグの公式の裏側に隠れた構造をあきらかにしていくことがここでの目的である.

定理 閉区間 $[-1, +1]$ 上の (実解析的) 関数 $\varphi(x)$ をとる. 関数 $\varphi(x)$ が

$$\int_{-1}^{+1}\varphi(x)x^k dx=0, \quad k=0,1,\ldots,n-1$$

を満たす必要十分条件は, 閉区間 $[-1, +1]$ 上定義される (実解析的) 関数 $\psi(x)$ であり次の式を満たすものが存在することである.

$$\varphi(x)=\frac{d^n}{dx^n}((x^2-1)^n\psi(x)).$$

2　特性関数と微分方程式

線形汎関数の言葉を用いて直交条件

$$\int_{-1}^{+1}\varphi(x)dx=0,$$

を表現することからはじめる. 閉区間 $[-1,\ +1]$ の複素近傍で正則な関数 φ に対し

$$\varphi\longrightarrow\int_{-1}^{+1}\varphi(x)dx$$

なる線形写像を考える. 区間 $[-1,\ +1]$ の特性関数 χ を

$$\chi(x)=\begin{cases}1 & x\in[-1,\ +1]\\ 0 & x<-1,\ 1<x\end{cases}$$

で定めると

$$\int_{-1}^{+1}\varphi(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\chi(x)dx$$

を得る.

注　この特性関数 χ のヒルベルト変換は

$$\int_{-1}^{+1}\frac{1}{z-x}dx=\log\frac{z+1}{z-1}$$

であるので, 複素領域で区間 $[-1,\ +1]$ を反時計まわりに囲む線積分を用いて, 積分を

$$\int_{-1}^{+1}\varphi(x)dx=\frac{1}{2\pi i}\oint\{\log\frac{z+1}{z-1}\}\varphi(x)dz$$

の形に表すこともできる.

この積分 $\int_{-1}^{+1}\varphi(x)dx$ を φ と χ の pairing と考え, 以下 $<\varphi,\ \chi>$ で表すことにする.

$$<\varphi,\ \chi>=\int\varphi(x)\chi(x)dx=\int_{-1}^{+1}\varphi(x)dx.$$

ここで, χ の満たす微分方程式を求めておこう. 特性関数 χ を超関数として微分すると, 導関数 $\dfrac{d\chi}{dx}$ は 2 点 $-1,+1$ に台をもつデルタ関数となる. 従って χ は次の微分方程式を満たす.

$$(x^2-1)\frac{d\chi}{dx}=0.$$

この関係を使うと, 任意のテスト関数 ψ に対して

$$<\psi,(x^2-1)\frac{d\chi}{dx}>=0$$

が成り立つことが分かる. ここで部分積分をすれば

$$< \frac{d}{dx}((x^2-1)\psi), \chi >= 0$$

を得る. 関数 ψ は任意であるので, 特に $\psi(x)=1$ なる定数関数を取れば, χ と直交する一次多項式として $\frac{d}{dx}(x^2-1)$ を得るがこれはロドリーグの公式に他ならない.

3　常微分方程式系の導入と双対性の利用

この節では, 2 つの直交条件

$$\int_{-1}^{+1} \varphi(x)dx = \int_{-1}^{+1} \varphi(x)xdx = 0$$

を満たすような関数 φ を特徴付けることを考える.

超関数 χ と $x\chi$ を用いると上記の条件は$< \varphi,\ \chi >=< \varphi,\ x\chi >= 0$ となる. このことに注目して, まず, 超関数 $x\chi$ の満たす微分方程式系を求める. 微分作用素としての恒等式

$$(x\frac{d}{dx}-1)x = x^2\frac{d}{dx}, \quad \frac{d^2}{dx^2}x = x\frac{d^2}{dx^2}+2\frac{d}{dx}$$

を用いると, $x\chi$ が次の微分方程式系を満たすことが分かる.

$$(x^2-1)(x\frac{d}{dx}-1)(x\chi(x)) = 0, \quad (x^2-1)^2\frac{d^2}{dx^2}(x\chi(x)) = 0.$$

ここで, 微分作用素としての恒等式

$$(x^2-1)^2\frac{d^2}{dx^2} = ((x^2-1)\frac{d}{dx}-2x)(x^2-1)\frac{d}{dx}$$

に注意すれば, 超関数 χ と $x\chi$ を解として持つような微分方程式として

$$(x^2-1)^2\frac{d^2}{dx^2}u(x) = 0$$

を得る. 逆に, この微分方程式の超関数解でその台が閉区間 $[-1,\ +1]$ に含まれるようなものは すべて, 超関数 $\chi, x\chi$ の線形結合で表せる (cf. 小松 [4]). 従って, 微分方程式

$$(x^2-1)^2\frac{d^2}{dx^2}u(x) = 0$$

は, 超関数 χ と $x\chi$ を記述する微分方程式であると言える. 微分作用素環におけるイデアルの概念を用いると, この辺の事情をもう少しきちんと述べることができる.

常微分作用素環 D における左イデアル I_1, J_1 を

$$I_1 = \langle (x^2-1)\frac{d}{dx} \rangle, \quad J_1 = \langle (x^2-1)(x\frac{d}{dx}-1),\ (x^2-1)^2\frac{d^2}{dx^2} \rangle$$

で定める. イデアル I_1 は χ, イデアル J_1 は $x\chi$ の満たす微分方程式系にそれぞれ対応しているので, イデアルの共通部分 $I_1 \cap J_1$ は超関数 χ と $x\chi$ を同時に解として持つような微分方程式系を考えることに相当する. 先ほど述べたことは次のように言い替えることが出来る.

事実 $I_1 \cap J_1 = \langle (x^2-1)^2 \frac{d^2}{dx^2} \rangle$ が成り立つ.

次の節でこの結果の初等的証明を与えることにして, ここではこの結果を認めて議論を先に進める.

超関数 χ と $x\chi$ を同次方程式 $Pu=0$ の解として持つような微分作用素 $P \in I_1 \cap J_1$ を取る. P は適当な微分作用素 Q を用いて, $P = Q(x^2-1)^2 \frac{d^2}{dx^2}$ と表すことが出来る. 任意の関数 ψ に対し

$$\langle \psi,\ P\chi \rangle = \langle \psi,\ x\chi \rangle = 0$$

が成り立つが, 微分作用素 P の形式随伴作用素を使って部分積分すれば

$$\langle \frac{d^2}{dx^2}(x^2-1)^2 Q^* \psi, \chi \rangle = \langle \frac{d^2}{dx^2}(x^2-1)^2 Q^* \psi, x\chi \rangle = 0$$

を得る. ここで特に, $Q=1, \psi=1$ とすればロドリーグの公式

$$\langle \frac{d^2}{dx^2}(x^2-1)^2, \chi \rangle = \langle \frac{d^2}{dx^2}(x^2-1)^2, x\chi \rangle = 0$$

を導く事が出来る.

4 微分作用素環における S-多項式

常微分作用素環における左イデアル I_1, I_2, J_1 を次のように置く.

$$I_1 = \langle (x^2-1)\frac{d}{dx} \rangle, \quad I_2 = \langle (x^2-1)^2 \frac{d^2}{dx^2} \rangle, \quad J_1 = \langle (x^2-1)(x\frac{d}{dx}-1),\ (x^2-1)^2\frac{d^2}{dx^2} \rangle.$$

この節では, グレブナ基底を利用することで $I_1 \cap J_1 = I_2$ が成り立つことを確かめていく.

まず,

$$A = (x^2-1)\frac{d}{dx}, \quad B = (x^2-1)(x\frac{d}{dx}-1), \quad C = (x^2-1)^2\frac{d^2}{dx^2}$$

とおく. 計算をはじめる前にいくつかの恒等式を準備しておく.

補題 1 次が成り立つ.

(i) $C = ((x^2-1)\frac{d}{dx} - 2x)A,$

(ii) $xC = ((x^2-1)\frac{d}{dx} - 2x)B.$

補題 2 次が成り立つ.

(i) $xA - B = x^2 - 1$,

(ii) $x\dfrac{d}{dx}A - \dfrac{d}{dx}B = 2x$,

(iii) $(x^2\dfrac{d}{dx} - x)A - (x\dfrac{d}{dx} - 2)B = 2$.

証明 (i) は明か. 恒等式

$$2x = \frac{d}{dx}(x^2-1) - (x^2-1)\frac{d}{dx} = \frac{d}{dx}(x^2-1) - A$$

に (i) の結果を代入すれば,

$$2x = \frac{d}{dx}(xA - B) - A = x\frac{d}{dx}A - \frac{d}{dx}B$$

をえる. 最後に, $x(2x) - 2(x^2-1) = 2$ と (i), (ii) を組み合わせれば (iii) を得る.

補題 3 微分作用素 B, C はイデアル J_1 のグレブナ基底である.

証明 B, C の S-多項式を計算すると

$$(x^2-1)\frac{d}{dx}B - xC = 2xB$$

となることから明かである.

微分作用素環 D に新たな不定元 t を付加し, 環 $D[t]$ のイデアル $\tilde{I}$ を次で定める.

$$\tilde{I} = \langle tA, (1-t)B, (1-t)C\rangle.$$

このとき, $\tilde{I} \cap D = I_1 \cap J_1$ が成り立つので, Buchberger アルゴリズムを用いてイデアル $\tilde{I} \cap D$ のグレブナ基底を求めればイデアルの共通部分を決定できる.

まず, tA と $(1-t)C$ の S-多項式を求めると,

$$((x^2-1) - 2x)tA + (1-t)C = C$$

となるので, $C \in \tilde{I} \cap D$ を得る.

次に, tA と $(1-t)B$ の S-多項式を計算すると

$$S_1 = xtA + (1-t)B = (xA - B)t + B = (x^2-1)t + B$$

となる. 更に, S_1 と tA の S-多項式を計算すると

$$S_2 = \frac{d}{dx}S_1 - tA = (\frac{d}{dx}(x^2-1) - A)t + \frac{d}{dx}B = 2xt + \frac{d}{dx}B$$

を得る. この計算を見ると, この節の最初に補題として述べた恒等式と全く同じことを計算していることが分かる. そこで, S-多項式の計算の替わりに補題の (iii) の恒等式を利用してみると,

$$t = (\frac{1}{2}x^2\frac{d}{dx} - x)tA + (1 - \frac{1}{2}x\frac{d}{dx})tB$$

より,

$$S_3 = 2t + (x\frac{d}{dx} - 2)B$$

がイデアル $\tilde{I}$ に属することが分かる. これらをもとにして不定元 t を消去していく. Buchberger アルゴリズムに忠実に従って計算すると, イデアル $\tilde{I}$ のグレブナ基底で不定元 t を含まないものは C のみであることを確かめることが出来る. 例えば, S_2 と S_3 の S-多項式を求めると,

$$xS_3 - S_2 = x(x\frac{d}{dx} - 2)B - \frac{d}{dx}B = ((x^2-1)\frac{d}{dx} - 2x)B = xC$$

となるが, この作用素は C で割り切れる. このようにして $\tilde{I} \cap D = \langle C \rangle$ を確かめることが出来る.

補足 超関数として χ, $x\chi$ を考える代わりに $(x+1)\chi$, $(x-1)\chi$ を取り, それぞれが満たす微分方程式を求め, 対応するイデアルの共通部分を求めるとかなり楽な計算でその共通部分が I_2 となることを確かめることが出来る.

5 ロドリーグの公式と微分作用素環

いままでのことを一般化することでつぎの結果を得る.

定理 超関数 $\chi, x\chi, ..., x^{n-1}\chi$ を annihilate するような微分作用素のなすイデアルを I_n とおく. この時, 次が成り立つ.

$$I_n = \langle (x^2-1)^n \frac{d^n}{dx^n} \rangle$$

この定理自体は証明を要しないほどひどく当たり前の結果とも言えるが, この結果の双対を取ることでロドリーグの公式が導ける訳である. イデアル I_n の構造がこのように簡単であるので, ロドリーグの公式が成り立つと考えることが出来る.

「当たり前の結果」でも, 本当に正しいかどうか私のような凡人には一抹の不安が残ることがある. この問題の場合は Buchberger アルゴリズムを利用して計算のみで事実を確かめることが出来るのがうれしい. この節では, $n = 3$ の場合にこの定理を計算により確認してみる.

まず, 超関数 $x^2\chi$ の満たす微分方程式系を求める. 微分作用素 B, C を

$$B = (x^2-1)(x\frac{d}{dx} - 2), \quad C = (x^2-1)^3\frac{d^3}{dx^3}$$

とおくと, $B(x^2\chi) = C(x^2\chi) = 0$ を得る. 微分作用素環における左イデアル J_2 を, $J_2 = \langle B,\ C\rangle$ で定めると, このイデアルが超関数 $x^2\chi$ の満たす微分方程式系になることが容易にわかる. 恒等式

$$((x^2-1)\frac{d}{dx} - 4x)((x^2-1)\frac{d}{dx} - 2x)(x^2-1) = (x^2-1)^3\frac{d^2}{dx^2}$$

を用いて B と C の S-多項式を求めると

$$(x^2-1)^2\frac{d^2}{dx^2}B - xC = (4x(x^2-1)\frac{d}{dx} + 2(x^2-1) - 8x^2)B$$

となるので, B, C はイデアル J_2 のグレブナ基底である.

超関数 $\chi, x\chi$ の満たす微分方程式系は, イデアル

$$I_2 = \langle (x^2-1)^2\frac{d^2}{dx^2}\rangle$$

で決まる. そこで,

$$A = (x^2-1)^2\frac{d^2}{dx^2}$$

とおく. これらの微分作用素 A, B, C を用いてイデアルの共通部分 $I_2 \cap J_2$ を求めればよい. そのために $\tilde{I} = \langle tA, (1-t)B, (1-t)C\rangle$ とおく. 恒等式

$$C = ((x^2-1)\frac{d}{dx} - 4x)A$$

を用いて tA と $(1-t)C$ の S-多項式を計算すれば微分作用素 C が共通部分 $I_2 \cap J_2$ に属すことが確かめられる (これは当たり前). 次に, tA と $(1-t)B$ の S-多項式の計算等をする. 少し計算を楽しめば, $\tilde{I} \cap D = \langle C\rangle$ が成り立つことを確認できる.

6　あとがき

ロドリーグの公式の本質は部分積分にある. 通常の方法でロドリーグの公式を導こうとすると部分積分をする際に, 積分区間の境界からの寄与の扱いが多少煩わしくなる. ここで述べた方法では特性関数の満たす微分方程式を用いるため, 境界からの寄与に相当するものが微分作用素の形に取り込まれていることになる. そのため, 部分積分が自由に出来るようになり議論の見通しが良くなっている.

エルミート多項式やラゲール多項式の場合も, ここで述べた方法でロドリーグの公式を導くことができる. エルミート多項式の場合は積分区間に境界が無いため用いる微分方程式は特異点を持たない. そのためとても簡単にロドリーグの公式を導ける. ラゲール多項式の場合は原点のみに特異点を持つ微分方程式を用いることになる.

2 次元の Appell 多項式の場合に同じ議論を試みると, 常微分方程式系の代わりに, 対象とする領域の境界に沿って確定特異点型の特異点をもつような偏微分方程式系が現れてくる. 2 年くらい前にこの辺のことを少し計算しかけたのだが, 最後までは計算をしなかった. ちゃんとはやらなかったが, ここで述べたやり方と同じ方法でロドリーグの公式が導けると思っている.

参考文献

[1] T. S. Chihara: An Introduction to Orthogonal Polynomials, Gordon and Breach (1978).

[2] C. W. Cryer: *Rodrigues' formula and the classical orthogonal polynomials*, Boll. Un. Math. Ital. (3) 25 (1970), 1–11.

[3] W. Gröbner: *Uber die Konstruktion von Systemen orthogonaler Polynome in ein und zweidimensionalen Bereichen*, Monatsch Math. 52 (1948), 38–54.

[4] H. Komatsu: *On the index of ordinary differential operators*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo 1A **18** (1971–72), 379–398.

[5] O. Rodrigues: *Mémoire sur l'attraction des spheroides*, Corresp. sur l'Ecole Royale Polytech III (1816), 361–385.

[6] P. K. Suetin: Orthogonal Polynomials in Two Variables, Gordon and Breach (1999).

[7] 田島 慎一: **常微分作用素環におけるイデアルの共通部分**, 京都大学数理解析研究所講究録「D-加群のアルゴリズム」 **1171** (2000), 156–163.