数理解析研究所講究録 1212 巻 2001 年 95-101

The configuration space $X(2,5)$ and the family of cyclic pentagonal curves

千葉大学大学院自然科学研究科 (D3)　小池 健二 (Kenji KOIKE)
Graduate School of Science and Technology, CHIBA UNIVERSITY

1 Introduction

Gauss の超幾何級数を 2 変数に拡張した Appell の F_1

$$F_1(\alpha,\beta,\beta',\gamma;x,y)=\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{(\alpha,m+n)(\beta,m)(\beta',n)}{(\gamma,m+n)(1,m)(1,n)}x^m y^n \tag{1}$$

は原点の適当な近傍で収束し、偏微分方程式系

$$\begin{aligned} x(1-x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y(1-x)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\{\gamma-(\alpha+\beta+1)x\}\frac{\partial u}{\partial x}-\beta y\frac{\partial u}{\partial y}-\alpha\beta u=0\\ y(1-y)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+x(1-y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\{\gamma-(\alpha+\beta'+1)y\}\frac{\partial u}{\partial y}-\beta' x\frac{\partial u}{\partial x}-\alpha\beta' u=0 \end{aligned} \tag{2}$$

の解になっています。これは

$$\Lambda=\{(x,y)\in\mathbb{C}^2 : xy(x-1)(y-1)(x-y)\neq 0\} \tag{3}$$

の各点で解空間は 3 次元、解 $u(x,y)$ は一般に $\mathbb{P}^2-\Lambda$ で分岐します。Terada([9]) 及び Deligne-Mostow([1]) は、独立解による射影平面への多価写像

$$\Phi:\Lambda\longrightarrow\mathbb{P}^2,\quad (x,y)\mapsto[u_1(x,y):u_2(x,y):u_3(x,y)] \tag{4}$$

を考え、Φ が open dense な埋め込み $\Lambda\hookrightarrow\mathbb{B}/(\text{monodromy 群})$ を与えるパラメータ $(\alpha,\beta,\beta',\gamma)$ を全て決定しています。ここで、$\mathbb{B}$ は $\mathbb{P}^2$ 内の 2 次元超球

$$\{[u_1:u_2:u_3]\in\mathbb{P}^2 : |u_1/u_3|^2+|u_2/u_3|^2<1\}$$

と同型な領域です。この $(\alpha,\beta,\beta',\gamma)$ に対し、Φ の逆写像を考える事により $\mathbb{B}$ 上の monodromy 群に対する 2 変数保形関数が得られます。$(\alpha,\beta,\beta',\gamma)=(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3},1),(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{5}{4})$ に対しては、Theta 関数を用いて具体的に逆写像が記述されています（[6],[4])。ここでは $(\alpha,\beta,\beta',\gamma)=(\frac{3}{5},\frac{3}{5},\frac{2}{5},\frac{6}{5})$ の場合を考えます。これは最も対称性が高いパラメータであり、前述の 2 つの例とは異なり cocompact な離散群に対する保形関数の具体的構成を与えます。

2 Configuration space $X(2,5)$

この節では $\mathbb{P}^1$ 上の点配置について簡単に復習します。詳しくは [11] 及びその文献等を参照して下さい。$\mathbb{P}^1$ 上の異なる５点の射影変換による同値類

$$\{(\lambda_1,\cdots,\lambda_5)\in(\mathbb{P}^1)^5\ :\ \lambda_i\neq\lambda_j\ (i\neq j)\}/\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$$

を考えます。これを次の様に行列空間の商空間と考え $X(2,5)$ と呼びます。

$$X(2,5)=\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})\backslash\{M=\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5\\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5\end{pmatrix}:d_{ij}(M)\neq 0\ (i\neq j)\}/(\mathbb{C}^*)^5$$

$$d_{ij}(M)=a_ib_j-a_jb_i$$

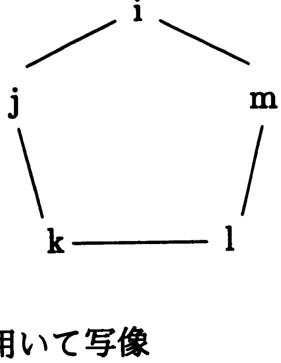
つまり、$(\mathbb{C}^*)^5$ の各列への作用により $[a_i:b_i]$ を $\lambda_i\in\mathbb{P}^1$ の射影座標と見なしています。写像

$$\Lambda\ni(x,y)\mapsto\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & x & y\end{pmatrix}\in X(2,5)$$

は同型を与えます。５次対称群 S_5 が正則に作用する $X(2,5)$ の最小 compact 化 $\overline{X(2,5)}$ は $\mathbb{P}^2$ の４点 blow-up $\widehat{\mathbb{P}^2}$ と同型になりますが、この射影 model は次の様にして得られます。$\{i,j,k,l,m\}=\{1,2,3,4,5\}$ に対し、

$$(ijklm)(M)=d_{ij}(M)d_{jk}(M)d_{kl}(M)d_{lm}(M)d_{mi}(M)\tag{5}$$

と置きます。$(mijkl)(M)=(ijklm)(M)=-(mlkji)(M)$ に注意して、$(ijklm)$ を（裏表を無視した）円順列と考えると１２種類ある事が分かります。



１２個の多項式 $(ijklm)$ を用いて写像

$$Cross:X(2,5)\longrightarrow\mathbb{P}^{11},\quad M\mapsto[\cdots:(ijklm)(M):\cdots]\tag{6}$$

を考えると、これは embedding を与え像の閉包は $\overline{X(2,5)}$ と同型になります。写像 $Cross$ は $\widehat{\mathbb{P}^2}$ の anti-canonical 写像を制限したものと同一視できます。

3 Period mapping

$(x, y) \in \Lambda$ に対し、Rieemann 面

$$C_{x,y} \ : \ w^5 = z(z-1)(z-x)(z-y) \tag{7}$$

を考えます。これは、$0, 1, \infty, x, y$ で分岐する $\mathbb{P}^1$ の5重被覆で、種数6の Rieemann 面となっています。$\zeta = \exp(2\pi\sqrt{-1}/5)$ として被覆変換

$$\rho \ : \ C_{x,y} \longrightarrow C_{x,y}, \quad (x, y) \mapsto (x, \zeta y)$$

を考えると、ρ の作用により $H_1(C_{x,y}, \mathbb{Z}) \cong (\mathbb{Z}[\rho])^3 \cong (\mathbb{Z}[\zeta])^3$ となり unitary 構造が入ります。$H^0(C_{x,y}, \Omega^1)$ の基底は

$$\varphi_1 = \frac{\mathrm{d}z}{w^2}, \quad \varphi_2 = \frac{\mathrm{d}z}{w^3}, \quad \varphi_3 = \frac{z\mathrm{d}z}{w^3}, \quad \varphi_4 = \frac{\mathrm{d}z}{w^4}, \quad \varphi_5 = \frac{z\mathrm{d}z}{w^4}, \quad \varphi_6 = \frac{z^2\mathrm{d}z}{w^4}$$

で与えられ、$H_1(C_{x,y}, \mathbb{Z})$ の ρ-基底 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ を取ると積分 $\int_{\gamma_i} \varphi_1$ は $(\alpha, \beta, \beta', \gamma)$ $(\frac{3}{5}, \frac{3}{5}, \frac{2}{5}, \frac{6}{5})$ に対する (2) の独立解を与えます。この場合の多価写像 (4) に対する monodromy 群に関して次が知られています。

Theorem ([10])
適当な γ_i に対し写像 $\Phi \ : \ \Lambda \ni (x, y) \mapsto [\int_{\gamma_1} \varphi_1 : \int_{\gamma_2} \varphi_1 : \int_{\gamma_3} \varphi_1] \in \mathbb{P}^2$ の像は

$$\mathbb{B}_A = \{[\eta_1 : \eta_2 : \eta_3] \in \mathbb{P}^2 \ : \ |\eta_1|^2 + |\eta_2|^2 + \frac{1-\sqrt{5}}{2}|\eta_3| < 0\}$$

に含まれ、この時 monodromy 群は

$$\Gamma = \{g \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{Z}[\zeta]) \ : \ {}^t\bar{g}Ag = A\}, \quad A = \mathrm{diag}(1, 1, \frac{1-\sqrt{5}}{2})$$

の合同部分群

$$\Gamma(1-\zeta) = \{g \in \Gamma \ : \ g \equiv I_3 \bmod 1-\zeta\}$$

と一致する。又、$\Gamma/\Gamma(1-\zeta) \cong S_5$ であり Φ は S_5- 同型 $\overline{X(2,5)} \cong \mathbb{B}_A/\Gamma(1-\zeta)$ を与える。

次に Riemann 面 $C_{x,y}$ の周期行列を $\mathbb{B}_A$ の言葉で具体的に記述します。A_i, B_i を $H_1(C_{x,y}, \mathbb{Z})$ の symplectic 基底 (i.e. 交点数 $A_i \cdot A_j = B_i \cdot B_j = 0, A_i \cdot B_j = \delta_{ij}$) とし行列

$$(Z_1, Z_2) = \begin{pmatrix} \int_{A_1} \varphi_1 & \cdots & \int_{A_6} \varphi_1 & \int_{B_1} \varphi_1 & \cdots & \int_{B_6} \varphi_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \int_{A_1} \varphi_6 & \cdots & \int_{A_6} \varphi_6 & \int_{B_1} \varphi_6 & \cdots & \int_{B_6} \varphi_6 \end{pmatrix}$$

を考えると、$\tau = Z_1^{-1}Z_2$ は 6 次の Siegel 上半空間

$$\mathfrak{S}_6 = \{\tau \in \mathrm{GL}_6(\mathbb{C}) \ : \ {}^t\tau = \tau,\ \mathrm{Im}\tau > 0\}$$

に属します（[5] 参照)。A_i, B_i を適当に定め、ρ の作用を利用して τ を具体的に計算する事により次が得られます。

Lemma 3.1. 写像 $\Omega : \mathbb{B}_A \to \mathfrak{S}_6$, $\Omega(\eta) = (\Omega_{ij})$ を次により定める事ができ，これは modular embedding を与える。

$$\Omega_{11} = (\zeta^3-1)(\eta_1^2+(1+\zeta^3)\eta_2^2+\eta_3^2)/\Delta, \quad \Omega_{44} = -\zeta^2(\eta_1^2+\zeta^2\eta_2^2-(1+\zeta)\eta_3^2)/\Delta,$$
$$\Omega_{22} = (\zeta^3-1)((1+\zeta^3)\eta_1^2+\eta_2^2+\eta_3^2)/\Delta, \quad \Omega_{55} = -\zeta^2(\zeta^2\eta_1^2+\eta_2^2-(1+\zeta)\eta_3^2)/\Delta,$$
$$\Omega_{33} = (\zeta^2-1)(\eta_1^2+\eta_2^2-\zeta^3\eta_3^2)/\Delta, \quad \Omega_{66} = -\zeta^3(\eta_1^2+\eta_2^2-(1+\zeta^4)\eta_3^2)/\Delta,$$
$$\Omega_{12} = (\zeta^3-\zeta)\eta_1\eta_2/\Delta, \quad \Omega_{45} = (\zeta^4-\zeta^2)\eta_1\eta_2/\Delta,$$
$$\Omega_{15} = (\zeta^4-\zeta)\eta_1\eta_2/\Delta, \quad \Omega_{24} = (\zeta^4-\zeta)\eta_1\eta_2/\Delta,$$
$$\Omega_{13} = (1-\zeta^2)\eta_1\eta_3/\Delta, \quad \Omega_{23} = (1-\zeta^2)\eta_2\eta_3/\Delta,$$
$$\Omega_{46} = (\zeta^4-\zeta)\eta_1\eta_3/\Delta, \quad \Omega_{56} = (\zeta^4-\zeta)\eta_2\eta_3/\Delta,$$
$$\Omega_{16} = (\zeta^3-\zeta)\eta_1\eta_3/\Delta, \quad \Omega_{26} = (\zeta^3-\zeta)\eta_2\eta_3/\Delta,$$
$$\Omega_{34} = (1-\zeta^3)\eta_1\eta_3/\Delta, \quad \Omega_{35} = (1-\zeta^3)\eta_2\eta_3/\Delta,$$
$$\Omega_{14} = \zeta^3((1+\zeta)\eta_1^2+(1+\zeta^3)\eta_2^2+\eta_3^2)/\Delta,$$
$$\Omega_{25} = \zeta^3((1+\zeta^3)\eta_1^2+(1+\zeta)\eta_2^2+\eta_3^2)/\Delta,$$
$$\Omega_{36} = (\zeta+\zeta^2)(\eta_1^2+\eta_2^2-\zeta^3(1+\zeta^2)\eta_3^2)/\Delta.$$

ただし $\Delta = \eta_1^2+\eta_2^2-\zeta^3(1+\zeta)\eta_3^2$。

4 Theta map

Theta 関数に関しては [2], [5] を参照して下さい。characteristic $(a,b) \in (\mathbb{Q}^6)^2$ に対し，$\mathfrak{S}_6$ 上の正則関数 $\theta_{(a,b)}$ を Fourier 級数

$$\theta_{(a,b)}(\tau) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^6} \exp[\pi\sqrt{-1}\,{}^t(n+a)\tau(n+a) + 2\pi\sqrt{-1}\,{}^t(n+a)b].$$

により定めます。(a,b) は Jacobi 多様体の torsion 点 $\tau a+b \in \mathbb{C}^6/(\mathbb{Z}+\tau\mathbb{Z})$ と対応しています。曲線 $C_{x,y}$ の分岐点を $P_1,\cdots,P_5$ とすると

$$Z_1^{-1}\,{}^t\!\left(\int_{P_i}^{P_j}\varphi_1,\cdots,\int_{P_i}^{P_j}\varphi_6\right)$$

達は $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^3$ と同型な部分群 $H \subset \mathbb{C}^6/(\mathbb{Z}+\tau\mathbb{Z})$ を生成します。H の元を Riemann 定数と呼ばれる元 $\Xi \in \mathbb{C}^6/(\mathbb{Z}+\tau\mathbb{Z})$ で平行移動したもの達

$\Xi+H$ を考えます。$\Xi+H$ に対応する characteristics 125 個を考えると，殆ど全ての (a,b) に対し $\theta_{(a,b)}(\Omega(\eta))$ は $\mathbb{B}_A$ 上恒等的にゼロとなってしまい意味がないのですが，非自明な関数を与える (a,b) を 12 個見つけることができます。この 12 個を利用して $\mathbb{B}_A/\Gamma(1-\zeta)$ を $\mathbb{P}^{11}$ に埋め込みます。

Theorem 1. *12 個の theta を利用して次の可換図式を得る。*

$$\begin{tikzcd}
\overline{X(2,5)} \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "Cross"'] & \mathbb{B}/\Gamma(1-\zeta) \arrow[dl, "\Theta"] \\
\mathbb{P}^{11} &
\end{tikzcd}$$

ただし，写像 $Cross$ と Θ は

$$\Theta=\begin{bmatrix} \theta_{[[1,1,1]]}(\Omega(\eta))^5 \\ -\theta_{[[1,1,9]]}(\Omega(\eta))^5 \\ \theta_{[[1,9,1]]}(\Omega(\eta))^5 \\ \theta_{[[9,1,1]]}(\Omega(\eta))^5 \\ \zeta^2\theta_{[[1,3,5]]}(\Omega(\eta))^5 \\ \zeta^2\theta_{[[1,7,5]]}(\Omega(\eta))^5 \\ -\zeta^4\theta_{[[3,3,3]]}(\Omega(\eta))^5 \\ \zeta^4\theta_{[[3,3,7]]}(\Omega(\eta))^5 \\ \zeta^4\theta_{[[3,7,3]]}(\Omega(\eta))^5 \\ -\zeta^4\theta_{[[7,3,3]]}(\Omega(\eta))^5 \\ -\theta_{[[7,1,5]]}(\Omega(\eta))^5 \\ -\theta_{[[3,1,5]]}(\Omega(\eta))^5 \end{bmatrix}, \quad Cross=\begin{bmatrix} J(13245)(\lambda) \\ J(13524)(\lambda) \\ J(15324)(\lambda) \\ J(13254)(\lambda) \\ J(15234)(\lambda) \\ J(13425)(\lambda) \\ J(12534)(\lambda) \\ J(12345)(\lambda) \\ J(13452)(\lambda) \\ J(15342)(\lambda) \\ J(12453)(\lambda) \\ J(12354)(\lambda) \end{bmatrix} \tag{8}$$

で定め，*characteristics* $[[l,m,n]]$ は

$$a=\frac{1}{10}{}^t(l,m,n,l,m,n), \quad b=\frac{1}{10}{}^t(-2l,-2m,-2n,-l,-m,-n)$$

を意味する。

Φ は同型であり $Cross$ は埋め込みなので Θ も埋め込みになる事が分かります。証明は省略しますが ([3] 参照)，基本的には hyperelliptic currve の Thomae の公式を導くのと同じ考え方です。$J(ijklm)$ 達は 1 次関係式と 2 次関係式を満たします。具体的な式は省略しますが，$Cross$ の像は (従って Θ の像は) $\mathbb{P}^5 \subset \mathbb{P}^{11}$ の中で 5 個の 2 次方程式によって定まります。

次に定理の $\theta_{[[l,m,n]]}(\Omega(\eta))^5$ が満たす保型性について述べます。Q を対角行列 $\mathrm{diag}(1,1,-\zeta^3(1+\zeta))$ として

$$F_g(\eta)=\frac{(g\eta)Q^t(g\eta)}{\eta Q^t\eta},\quad g\in\Gamma,\ \eta\in\mathbb{B}_A$$

と置きます。$\mathbb{B}_A$ 上の正則関数 $f(\eta)$ で関数等式

$$f(g\eta)=F_g(\eta)^k f(\eta),\quad g\in\Gamma(1-\zeta),\ \eta\in\mathbb{B}_A$$

を満たすものが成すベクトル空間を $A_k(F_g;\Gamma(1-\zeta))$ で表します。12 個の $\theta_{[[l,m,n]]}(\Omega(\eta))^5$ に対しその積は $A_5(F_g;\Gamma(1-\zeta))$ の元を定める事が分かり次が得られます。

Corollary 4.1. *(1).* 次の $\mathbb{C}$*–algebras* の同型が成り立つ。

$$\begin{aligned}\oplus_{n=0}^{\infty}A_{5n}(F_g;\Gamma(1-\zeta))&=\mathbb{C}[\theta_{[[l,m,n]]}(\Omega(\eta))^5\theta_{[[l',m',n']]}(\Omega(\eta))^5]\\&\cong\oplus_{n=0}^{\infty}\mathrm{H}^0(X,\mathcal{O}_X(-2nK_X))\end{aligned}$$

ただし，$X=\overline{X(2,5)}$ 。
(2). $A_n(F_g;\Gamma(1-\zeta))=\{0\}$ *for* $n\in\mathbb{N},\ n\notin 5\mathbb{Z}$.

参考文献

[1] P. Deligne and G. D. Mostow, Monodromy of hypergeometric functions and non-lattice integral monodromy, Publ. Math I.H.E.S. 63(1986), 5-88.

[2] J. Igusa, Theta functions, Springer, Heidelberg, New-York(1972).

[3] K. Koike, On the family of pentagonal curves of genus 6 and associated modular forms on the ball, preprint.

[4] K. Matsumoto, On Modular Functions in 2 Variables Attached to a Family of Hyperelliptic Curves of Genus 3, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) 16 (1989), no. 4, 557–578.

[5] D. Mumford, Tata Lectures on Theta, Birkhäuser, Boston-Basel-Stuttgard(1983).

[6] H. Shiga, On the representation of the Picard modular function by θ constants I-II, Pub. R.I.M.S. Kyoto Univ. 24(1988), 311-360.

[7] G. Shimura, On purly transcendental fields of automorphic functions of several complex variables. Osaka J. Math. 1(1964), 1-14.

[8] K. Takeuchi, Arithmetic triangle group, J. Math. Soc. Japan, Vol. 29-No. 1(1977), 91-106.

[9] T. Terada, Fonctions hypérgéometriques F_1 et fonctions automorphes I-II, J. Math. Soc. Japan 35(1983), 451-475, 37(1985), 173-185

[10] T. Yamazaki and M. Yoshida, On Hirzebruch's Examples of Surfaces with $c_1^2 = 3c_2$, Math. Ann. 266(1984), 421-431.

[11] M. Yoshida, Hypergeometric functions, my love, Aspects of Mathematics, E32. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig(1997).