数理解析研究所講究録 1213 巻 2001 年 28-33

A Note on Hrushovski's Pseudoplanes

池田宏一郎 (Koichiro Ikeda)
豊田工業高等専門学校

安定な理論 (stable theory) の可算モデルに関する有名な予想として Lachlan 予想が知られているが、安定な理論を単純な理論 (simple theory) に置き換えた次の予想がある：

拡張された Lachlan 予想 可算モデルの数が有限個となる様な単純な理論は存在しない。

この予想は解かれてないが、もし可算モデルの数が有限個となる単純理論が存在するならば、その理論は無限の weight をもつ small な理論でなければならない。ここでは Hrushovski[2], Herwig[1] の方法を用いて、以下の定理を証明することを目標とする：

定理 無限の weight をもつ、安定でないが単純かつ small な理論が存在する。更にこの理論の 1-type はひとつしかない。

1 関数 f の定義

- 二項関係 $R_i(*,*)(i<\omega)$ は次の条件を満たしているものとする：
    1. 各 $i<\omega$ に対して $\models \forall x \forall y(R_i(x,y) \rightarrow R_i(y,x))$;
    2. 各 $i<\omega$ に対して $\models \forall x \forall y(R_i(x,y) \rightarrow x \neq y)$;
    3. $i \neq j \rightarrow \models \forall x \forall y(\neg(R_i(x,y) \wedge R_j(x,y)))$
- 言語 $L=\{R_i : i<\omega\}$.
- $A, B, C, \ldots$ は有限 L 構造を表す。

- 自然数の増加列 $(s_i)_{i<\omega}, (k_i)_{i<\omega}$，および自然数から実数への関数の列 $(f_i)_{i<\omega}$を次の様に構成する：
  1. $s_0 = 2$;
  2. $f_0(x) = \dfrac{1}{s_0}\log x$;
  3. $k_0 = \min\{k < \omega : f_0(k) > 2\}$;
  4. s_{n+1}を次の条件を満たすようにとる：
     - $s_{i+1} \geq 2s_i$;
     - 任意の A に対して、$|A| \leq 2k_n, \delta_n(A) > f_n(|A|) \Rightarrow \delta_n(A) > f_n(|A|) + \dfrac{4k_n}{s_{n+1}}$. (但し、$\delta_n(A) = |A| - \sum_{j=0}^{n} \dfrac{1}{s_j}|R_j^A|$);
  5. $f_{n+1}(x) = \begin{cases} f_n(x) & (x \leq k_n) \\ \dfrac{1}{s_n}\log\dfrac{x}{k_n} + f_n(k_n) & (k_n \leq x) \end{cases}$
  6. $k_{n+1} = \min\{k < \omega : f_n(k) > n+2\}$

定義　関数 $f : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ を次の様に定義する：

$$f(x) = \begin{cases} f_0(x) & (0 \leq x \leq k_0) \\ f_1(x) & (k_0 < x \leq k_1) \\ f_2(x) & (k_1 < x \leq k_2) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \end{cases}$$

定義　A, B を有限 L 構造とする。このとき

- $\delta_i(A) =_{\mathrm{def}} |A| - \sum_{j=0}^{i} \dfrac{1}{s_j}|R_j^A|$.
- $\delta(A) =_{\mathrm{def}} \lim_{i\to\infty} \delta_i(A)$.
- $\delta(A/B) =_{\mathrm{def}} \delta(AB) - \delta(B)$.

特に $A \subset B$ のとき

- $A \leq B$ (A は B で閉) $\Leftrightarrow_{\mathrm{def}}$ $X \subset B - A$ に対して$\delta(X/A) > 0$.

δの定義より$\leq$に関する以下の性質はあきらか。

性質 1 (i) $A \subset B \subset C \in K$ かつ $A \leq C$ ならば $A \leq B$.
(ii) すべての $A \in K$ に対して $\emptyset \leq A$
(iii) $A, B \subset C \in K$ とする。このとき $A \leq C$ ならば $A \cap B \leq C$.

注意 2 関数 f は次の性質を満たす：

1. f は上に凸；
2. $k_n < x \leq k_{n+1}$ ならば $f'(x) = \dfrac{1}{s_n x}$;
3. $|A| \leq 2k_n$ かつ $\delta_n(A) > f_n(|A|)$ ならば $\delta(A) > f(|A|)$.

2 K-generic な構造

定義 有限 L 構造のクラス K を以下のように定義する：

$$K =_{\mathrm{def}} \{A : 任意の\ B \subset A\ に対して\ \delta(B) > f(|B|)\}.$$

定義 A, B, C を $A = B \cap C$ を満たす有限 L 構造とする．このとき B と C の A 上の free amalgam（$B \otimes_A C$ とかく）とは次の様な L 構造である：
(i) $|B \otimes_A C| = B \cup C$;
(ii) $R^{B \otimes_A C} = R^B \cup R^C$.

補題 3(Amalgamation) $A \leq B \in K, A \leq C \in K, D = B \otimes_A C$ ならば $B \leq D, C \leq D, D \in K$.

証明 $B \leq D, C \leq D$ はほぼあきらか。$D \in K$ を示す．$|C| \leq |B|$ と仮定してもよい．$k_n < |B| \leq k_{n+1}$ とする。$A \leq B$ より

$$\frac{\delta_n(B) - \delta_n(A)}{|B - A|} \geq \frac{1}{s_n |B|}.$$

注意 2.2 より

$$\frac{\delta_n(B) - \delta_n(A)}{|B - A|} \geq f'(|B|).$$

よって注意 2.1 より

$$\delta_n(D) > f_n(|D|).$$

明らかに $|D| \le 2k_n$ であるので注意 2.3 より

$$\delta(D) > f_n(|D|) \ge f(|D|).$$

故に $D \in K$. ■

定義 次の条件を満たすような L 構造 M を K-generic という：

1. M は可算；
2. A(有限) $\subset M$ ならば $A \in K$;
3. $A \le B \in K$ かつ $A \le M$ ならば $B \cong B' \le M$ を満たすような B' が存在する。

注意 4 「A は閉」は定義可能：すなわち A を解にもつ論理式 $\phi(\bar{x}) \in L$ で、$\phi(A')$ ならば A'(閉) $\cong A$, を満たすものがある。

M を K-generic な構造とする（性質 1 よりその様な M は存在する）。

補題 5 M は飽和モデル。

証明 有限集合 $A(\subset M)$ 上のタイプ p が M で解をもつことを示す。ここで $A \le M$ と仮定して構わない。N をω飽和なモデルとする。N の飽和性より、$\mathrm{tp}(C) = \mathrm{tp}(A)$ を満たす $C \subset N$ が存在するので,$\sigma(A) = C$ を満たす elementary map σが存在する。再び N の飽和性より $\sigma(p)$ の解は N の中に取れるので、その解を D とする。$CD \le N$ と仮定して構わない。このとき M が generic であることより、

$$AB \le M, AB \cong CD$$

を満たす $B \subset M$ が存在する。
主張：$\tau(AB) = CD$ となる elementary map $\tau : M \to N$ が存在する。
証明：L 論理式を並べたものを $\{\phi_i(\bar{x}, \bar{y}_i) : i < \omega\}$ とする。このとき Back-and-forth で次の条件を満たす $(E_i)_{i<\omega}, (F_i)_{i<\omega}$を構成する：
(i) $AB = E_0 \le E_1 \le E_2 \le ... \le M$;
(ii) $M = \bigcup F_i$;

(iii) $CD = F_0 \leq F_1 \leq F_2 \leq \ldots \leq N$;
(iv) $E_iE_{i+1} \cong F_iF_{i+1}$;
(v) i が奇数のとき、各 $j \leq i$ に対して$\phi_j(\bar{x}, \bar{d}) \in L(F_i)$ が無矛盾であるならば F_{i+1}の中に解をもつ。

M を並べたものを $(a_i)_{i<\omega}$とする。
i が偶数のとき：E_iに入っていない M の元で一番インデックスが小さいものもをとり E_iとの閉包を E_{i+1}とする。このとき

$$XF_i \cong E_{i+1}E_i, X \leq M$$

は論理式で表現できる（注意 4)。よって N の中にその解があるので、それを F_{i+1}とすればよい。
i が奇数のとき：各 $j \leq i$ に対して$\phi_j(\bar{x}, \bar{d}) \in L(F_i)$ が無矛盾ならば N の中に解がとれる。それら（有限個）をすべて集めてきて F_iと閉包をとったものを F_{i+1}とする。このとき M が generic であることより、$E_{i+1} \leq M, E_{i+1}E_i \cong F_{i+1}F_i$ を満たす E_{i+1}が M の中に取れる。

$M' = \bigcup_i F_i$とすると、$M \cong M' \prec N$. よって$\tau(AB) = CD$ を満たす M から N への elementary map τが存在する。

したがって p は M の中に解 B をもつので M は saturated. ■

系 6　Th(M) は small.

3　単純性と weight

定義　$d_M(A) = \inf\{\delta(B) : A \subset B \subset_\omega M\}$

定義　$A \downarrow_C B$ を次の様に定義する：
(i) $d(A/BC) = d(A/C)$;
(ii) $\mathrm{cl}(AC) \cap \mathrm{cl}(BC) \subset \mathrm{cl}(C)$.

定義　三項関係$* \downarrow^0_* *$が以下の性質を満たすとき独立概念であるという：
(i) 不変性
(ii) 対称性：$A \downarrow^0{}_C B$ ならば $B \downarrow^0{}_C A$.
(iii) 推移性：$A \downarrow^0{}_C B, A \downarrow^0{}_{CB} D$ ならば $A \downarrow^0{}_C BD$.
(iv) 拡張性:任意の$\bar{a}, A, B$ に対して、$\bar{a}' \downarrow^0{}_A B$ を満たす $\mathrm{tp}(\bar{a}/A)$ の解$\bar{a}'$が存在

(v) 局所性：任意の$\bar{a}, A$に対して$\bar{a} \downarrow^0{}_B A$を満たす可算な$B \subset A$が存在する。
(vi) 有限性：$\bar{a} \downarrow^0{}_A B \Leftrightarrow$ 任意の$\bar{b} \in B$に対して$\bar{a} \downarrow^0{}_A \bar{b}$.
(vii) Independence Theorem:あるモデルMに対して$\bar{a} \downarrow^0{}_M \bar{b}, \bar{x} \downarrow^0{}_M \bar{a}, \bar{y} \downarrow^0{}_M \bar{b}$であるとする。このとき$\bar{z} \downarrow^0{}_M \bar{a}\bar{b}$を満たす$\mathrm{tp}(\bar{x}/M\bar{a}) \cup \mathrm{tp}(\bar{y}/M\bar{b})$の解$\bar{z}$が存在する。

このとき次の補題が導かれる（詳しくは[3]）。

補題 7 (i) $* \downarrow_* *$は独立概念.
(ii) Tは単純（かつ非安定）。

補題 8 $\mathrm{wt}(T) = \infty$.

証明 次の様な$a, a_i (i < \omega)$がMの中に取れる：

- $\{a\} \cup \{a_0, a_1, \ldots\} \leq M$;
- $R_i(x, y) \Leftrightarrow \{x, y\} = \{a, a_i\}$.

このとき各$i < \omega$に対して$a \not\downarrow a_i$. また各$i < \omega$に対して$2s_i \leq s_{i+1}$なので

$$\delta(a/a_0, a_1, \ldots) = 1 - \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{s_j} \geq 1 - \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j} > 0$$

よって$a_0 a_1 \ldots \leq a a_0 a_1 \ldots \leq M$であるので$\downarrow \{a_i\}_{i<\omega}$. よって$\mathrm{wt}(a) = \infty$. ■

参考文献

[1]Bernhard Herwig, Weight omega in stable theories with few types, Journal of Symbolic Logic, vol.60, 353–373, 1995
[3]Ehud Hrushovski, Simplicity and the Lascar group, preprint, 1997
[3]Frank O. Wagner, Simple Theories, Kluwer Academic Publishers, 2000