数理解析研究所講究録 1214 巻 2001 年 1-3

71 : 35 または $L_2(71)$ はモンスター単純群 $\mathbb{M}$ の極大部分群である

熊本大学・理学部　八牧宏美 (Hiroyoshi Yamaki)†
Dept. of Math., Kumamoto Univ.

有限群 G の素数グラフ $\Gamma(G)$ とはその位数を割る素数の集合 $\pi(G)$ を頂点集合とし、相異なる頂点 p,r は群 G に位数 pr の元が存在するとき辺で結んで出来るグラフのことである。このグラフは群の構造を明らかにするために有効なことが知られてきた ([1], [3], [4], [6])。ここでは素数グラフを用いてモンスター単純群 $\mathbb{M}$ の奇数位数の極大部分群について考えたい。

$$|\mathbb{M}| = 2^{46}.3^{20}.5^9.7^6.11^2.13^3.17.19.23.29.31.41.47.59.71.$$

でありシロー 71-部分群の正規化群 71 : 35 は

$$|71:35| = 5.7.71 = 2,485$$

のフロベニウス群である。射影特殊線形群 $L_2(71)$ は 71 : 35 を極大部分群として含むがモンスター単純群 $\mathbb{M}$ が $L_2(71)$ を部分群ないしは節として含むかどうかは知られていない。

$$|L_2(71)| = 2^3.3^2.5.7.71 = 178,920$$

であるから 71 : 35 と $L_2(71)$ はモンスター単純群 $\mathbb{M}$ と比較して驚くほど小さな群である。しかし、次の結果を素数グラフを用いて示すことが出来る。

定理 1. 71 : 35 または $L_2(71)$ はモンスター単純群 $\mathbb{M}$ の極大部分群である。

$\mathbb{M}$ については次の 2 つの補題が成り立つ。

補題 1. シロー 71-部分群が正規化する位数が 71 と素な $\mathbb{M}$ の部分群は自明なものに限る。

$\mathbb{M}$ の極大 2-局所部分群は Meierfrankenfeld と Shpectorov によって完全に分類された。すなわち Atlas の表に Ho が発見した $7^2 : SL(2,7)$ を付け加えれば極大 p-局所部分群の完全な表がえられる ([8])。これらの極大 p-局所部分群で位数が 71 で割り切れるものは $p \neq 71$ のときは存在しない。

補題 2. モンスター単純群 $\mathbb{M}$ に含まれる可能性がある位数が 71 で割り切れる非可換単純群は $L_2(71)$ に限る。

$\{71\}$ が $\Gamma(\mathbb{M})$ の連結成分であることから有限単純群の素数グラフの連結成分の分類を使えばよい ([5], [7], [9])。あるいは計算機を用いて確かめることもできる。

---

†Supported in part by Grant-in-Aid for Scientific Research (C; No.12640030), Japan Society for the Promotion of Science.
京都大学数理解析研究所研究集会「群論とその周辺ー総括と展望」での講演.

非連結な素数グラフを持つ群についての基本的な結果は Gruenberg と Kegel によって得られた次の補題である。有限単純群の分類、すなわち有限単純群の外部自己同型群は可解群となること、を用いれば次のようになる ([3], [9])。

補題 3. 有限群 G の素数グラフ $\Gamma(G)$ が非連結ならば次の何れかが成立する。

(1) G はフロベニウス群または 2-フロベニウス群

(2) G の正規部分群からなる列

$$G \rhd M \rhd N \rhd 1$$

が存在して M/N は非可換単純群、G/M と N は π-冪零群。ただし π は $\Gamma(G)$ の 2 を含む連結成分である。

さて G をモンスター単純群 $\mathbb{M}$ の極大部分群で位数が 71 で割り切れるものとする。$|G| > 71$ であり、$\Gamma(G)$ が非連結となるから補題 1、補題 2 を考慮して補題 3 を使えばよい。(1) のときは $G \simeq 71:35$、(2) のときは $G \simeq L_2(71)$ となる。

71 を 59 で置き換えることによりシロー 59-部分群の正規化群 59 : 29 に対しても同様なことが示せる。

定理 2. 59 : 29 または $L_2(59)$ はモンスター単純群 $\mathbb{M}$ の極大部分群である。

ここでも 59 : 29 は $L_2(59)$ の極大部分群であるが $L_2(59)$ がモンスター単純群 $\mathbb{M}$ に含まれるか否かは知られていない。

$$|59:29| = 59.29 = 1,711$$

$$|L_2(59)| = 2^2.3.5.29.59 = 102,660$$

であるから両者ともモンスター単純群 $\mathbb{M}$ と比較して驚くほど小さな群である。これほどではないが小さな群が極大部分群になることは BM などで起きている。

注意 1. この方法は $|\mathbb{M}|$ の他の素因数に対しては適用できない。

注意 2. 定理 1, 2 は計算機などを用いて既に確かめられていることかも知れない。

注意 3. $L_2(71), L_2(59), L_2(29), L_2(27), S_z(8)$ は $\mathbb{M}$ に含まれるか否か知られていないようである。

私には $L_2(71)$ が $\mathbb{M}$ に含まれるかどうか予想はできない。$L_2(71)$ が $\mathbb{M}$ に含まれると仮定して何かを計算し矛盾が生ずれば含まれないことになる。しかし $L_2(71)$ が含まれる場合は生成元か何かを見つけて群を構成する必要が有りかなり難しいと思われる。

$L_2(71)$ が $\mathbb{M}$ に含まれると仮定しよう。$\mathfrak{B}$ を $\mathbb{M}$ と $L_2(71)$ の間の Bratteli 図形とする。これは頂点集合を $Irr(\mathbb{M}) \cup Irr(L_2(71))$ とする 2 部グラフである。Chigira と Iiyori によって $\mathfrak{B}$ の結合行列の固有値の平方は一般に有理整数となることが証明されている ([2])。Chigira は $L_2(71)$ の $\mathbb{M}$ への埋め込み方の可能性が 3 通りあることを証明し $\mathbb{M}/L_2(71)$ 上の置換表現の既約表現への分解などを計算し何れの場合もこの事実には矛盾しないことを示している。

References

[1] N. Chigira, Prime graphs and odd order subgroups of simple groups, 第 45 回代数学シンポジュウム報告集、(2000), 185–193.
[2] N. Chigira and N. Iiyori, Bratteli diagrams of finite groups, Comm. Algebra **23** (1995), 5315–5327.
[3] N. Chigira, N. Iiyori and H. Yamaki, Non-abelian Sylow subgroups of finite groups of even order, Invent. Math. **139** (2000), 525-539.
[4] N. Iiyori and H. Yamaki, On a conjecture of Frobenius, Bull. Amer. Math. Soc. **25** (1991), 413–416.
[5] N. Iiyori and H. Yamaki, Prime graph components of the simple groups of Lie type over the fields of even characteristic, J. Algebra, **155** (1993), 335–343. Corrigenda, **181** (1996) 659.
[6] N. Iiyori and H. Yamaki, A conjecture of Frobenius, Sugaku Expositions, Amer. Math. Soc. **9** (1996), 69–85.
[7] A. S. Kondrat'ev, Prime graph components of finite simple groups, Math. USSR Sbornik **67** (1990), 235–247.
[8] S. Norton, Anatomy of the Monster : I, The Atlas of finite groups: Ten years on, Ed. by R. Curtis and R. Wilson, London Math. Soc. Lecture Note Series **249**, 198–214, Cambridge Univ. Press, Cambridge 1998.
[9] J. S. Williams, Prime graph components of finite groups, J. Algebra, **69** (1981), 487–513.
[10] H. Yamaki, Either 71 : 35 or $L_2(71)$ is a maximal subgroup of the Monster, To appear in "Groups and Combinatorics, in memory of Michio Suzuki" Advanced Studies in Pure Math.