数理解析研究所講究録
第1214巻 2001年 62-75

3-transposition groups

Masaaki Kitazume (Chiba University)

北詰 正顕 (千葉大・理)

1 はじめに

散在型単純群の中で，代表的なものとして語られるのは，Mathieu 群，Conway 群，Monster の系列であろう。「系列」と書いたけれども，Golay code, Leech lattice, Moonshine VOA と続く 24 という数字に彩られた数学的対象は，まさに奇跡的である。一方，同じ 24 という数字を冠する Fischer 群 F_{24} は，この系列に入れるには，手がかりが少なすぎる。歴史的には，Fischer が Monster に (baby Monster を経由して) たどり着く出発点であったにも関わらず。

本稿では，F_{24} を頂点とする，3-transposition groups について，概略をまとめたいと思う。対称群の一般化とも言える単純な定義ながら，深いものを含んでいる対象である。最近になって ([M]) 頂点作用素代数の宮本自己同型の (２つある内の) type II と呼ばれるものが必ず 3-transposition group になる，という結果によって思わぬところに再登場したのは記憶に新しい。２１世紀に向けてとは大げさだが，まだまだ研究すべきことは多いと思われる。本稿がこれからの研究の助け・きっかけになれば幸いである。

なお，１２月の集会では私の話の組立が悪く，いくつかの話を省略した。本稿では，その部分も加えたが，特に，3-transposition groups の構成については，３月の九大における「代数的組合せ論ミニ集会」で話したことが，この原稿作成の大きな助けになった。ここに記して，感謝いたします。

2 定義，分類定理と実例

2.1 定義と分類定理

定義 2.1. 群 G が 3-transposition group であるとは，

(1) G は位数２の元の共役類の和集合 D で生成される。(i.e. $G = \langle D\rangle, D^G = D$)

(2) D の相異なる２つの元の積の位数は２または３。(i.e. $a(\neq)b \in D \Longrightarrow |ab| = 2$

が成り立つことである。

最も典型的な例は，n 次対称群 S_n と，その互換全体の集合を D としたものである。定義の条件 (1) で「和集合」としたのは，S_n の部分群 $S_k \times S_{n-k}$ なども仲間に入れるためである。定義から，D の部分集合で生成される部分群 K は，$K \cap D$ で生成される 3-transposition group になる。このような部分群を D-subgroup と呼ぶ。なお，ここでは，群 G に有限性を仮定しなかった。

ここで，後に用いる記号と用語を導入しておく。$G = \langle D \rangle$ を 3-transposition group とするとき，$d \in D$ に対して

$$D_d = \{a \in D \mid |ad| = 2\}, \quad A_d = \{a \in D \mid |ad| = 3\}$$

とおく。明らかに，$D = \{d\} \cap D_d \cap A_d$ となる。次に，S を任意の Sylow 2-subgroup とするとき，$|S \cap E|$ を G の width と呼ぶ。この値は，D に含まれる互いに可換な元の個数の最大値を意味する。

さて，Fischer は 3-transposition group をある条件の下に分類した。実例の紹介も兼ねて，その定理を述べておこう。

定理 2.2 (B. Fischer [F1]). G を有限群で，*3-transpositions* の共役類 D で生成されているとする。さらに，次を仮定する（その意味については後述）。

$$O_2(G) \subset Z(G) \supset O_3(G).$$

このとき，(G, D) は，中心を除いて（つまり，$(G/Z(G), DZ(G)/Z(G))$ をあらためて (G, D) とおけば）次のいずれかに同型である。（ただし $\varepsilon = \pm 1$ とする。）
(1) $G \cong S_n$, $D = \{\textit{transpositions}\}$,
(2) $G \cong S_{2n}(2)$, $D = \{\textit{transvections}\}$,
(3) $G \cong O^{\varepsilon}_{2n}(2) : 2$, $D = \{\textit{transvections which preserve a (fixed) quadratic form}\}$,
(4) $G \cong O^{\varepsilon}_{2n}(3) : 2$, $D = \{\textit{reflections w.r.t the norm } 1 \textit{ vectors}\}$
(5) $G \cong O_{2n+1}(3) : 2$ *or* $O_{2n+1}(3)$, $D = \{\textit{reflections w.r.t the norm } \varepsilon \textit{ vectors}\}$
(6) $G \cong U_n(2)$, $D = \{\textit{transvections}\}$
(7) $G \cong F_{22}, F_{23}, F_{24}$, *D: a unique class*
(8) $G \cong O^+_8(2).S_3, O^+_8(3).S_3$, *D: a unique class*

ただし n は，(1) $n \geq 5$, (2) $n \geq 2$, (3),(4) $\varepsilon = +$ のとき $n \geq 3$, $\varepsilon = -$ のとき $n \geq 2$, (5) $n \geq 2$, (6) $n \geq 4$ をみたすものとする。

記号は，ATLAS に従って，単純群が表に出るように記述した。: 2 が付いているのは，単純群が index 2 で含まれていることを意味している。S_n と F_{24} は単純群を意味しない。これらを $A_n : 2$, $F'_{24} : 2$ と表すことも，もちろん出来る。

ここに現れた直交群やユニタリ群については，他の本 [N], [A2] を参照されたい。(5) では "or" などと曖昧な書き方をしてしまったが，これは n と ε で決まるとい

うより，内積の取り方に依る。ベクトル空間の内積を，正規（長さ 1）直交基底を取るように定めれば，$\varepsilon=1$ のとき $:2$ の付かない単純群が出てくる。$\varepsilon=-1$ なら，$:2$ の付く方になる。

なお，(7) は Fischer 群と呼ばれる系列で，F_{22}, F_{23}, F'_{24} が散在型単純群である。最後の (8) の 2 つは，分類における例外的なもので，群としては前者が $\mathrm{Aut}(O_8^+(2))$ で，後者は $\mathrm{Aut}(O_8^+(3))$ のある部分群である。この 2 つは，$G'=G''$ という仮定を付ければ除くことも出来る。

この分類定理を完成させた Fischer の原論文 [F1] は，一部分 [F2] を除いて出版されなかった。理由は推測しか出来ないが，後述の Uniqueness theorem と F_{24} の構成の不完全さによるのだろう。近年になり，これを補完する意味合いも込めて，Cuypers-Hall [CH2] は，有限性（さらには上記の仮定）を仮定しない分類定理を完成させた。少しさかのぼるならば，先鞭を付けた形の R. Weiss の仕事 [W1] がある。

2.2 3-transposition groups の実例

群の例示としては，あまりに沢山が出てきてしまったので，もう少し身近なものに絞った例を述べよう。対称群を含むワイル群と線形群の間に次のような同型が成り立つ。ただし，簡単のため $W^*(E_k) := W(E_k)/\{\pm 1\}(k=7,8)$ という記号を用いる。

例 2.3 (Weyl 群).

$$U_4(2) \cong O_5(3) < O_5(3):2 \cong O_6^-(2):2 \cong W(E_6)$$

$$S_6(2) \cong W^*(E_7), \quad O_8^+(2) \cong W^*(E_8)$$

$$O_6^+(2):2 \cong S_8, \quad O_4^-(3):2 \cong S_4(2) \cong S_6, \quad O_4^-(2):2 \cong S_5$$

この例は仲々に味わい深い。第 1 行の，基礎体 $\mathbb{F}_4, \mathbb{F}_3, \mathbb{F}_2$ の入り交じった関係は，それだけで異様である。後に，

$$O_{2n}^{\pm}(2) > S_{2(n-1)}(2) > O_{2(n-1)}^{\mp}(2)$$

という列について述べるが，上記の例によれば，$\varepsilon=+$ の場合，$n=4$ のときが $W^*(E_8) > W^*(E_7) > W^*(E_6)$ という例外型 Weyl 群の系列に相当しており，$n=3$ のときは，何故か 7 が抜けた対称群の列 $S_8 > S_6 > S_5$ に相当することが読みとれる。E 型の系列はただ添え字が 1 増えるという以上の変化をしているのである。

分類定理に現れない群にも重要なものがある。$O_2(G) \neq 1$ をみたす群の典型例は S_4 で，より一般に Weyl 群 $W(D_n)$ が該当する。$O_3(G) \neq 1$ をみたす群の典型例は S_3 で，一般に，3 元体上の直交群（分類定理の (4),(5)）の長さ 0 のベクトルの固定部分群として得られる parabolic subgroup が該当する。F_{24} の部分群に

$3^7 \cdot O_7(3)$ というのがあるが，直交群の場合と異なり "non-split" という著しい特徴がある。Monster には $3^8 \cdot O_8^-(3):2$ という non-split な部分群があるが，こちらは 3-transposition group ではない。しかし，同じ様な構造の $3^8 \cdot O_8^-(3):2$ という 3-transposition group は存在する ([CH2])。

S_3, S_4 に匹敵する小さな群の中にも，とても重要な群がある。3つの互いに非可換（積の位数は3）である 3-transposition で生成される群は4通り（本質的には3通り）であることが知られている。おなじみの S_3 $((1\,2),(1\,3),(2\,3))$, S_4 $((1\,2),(1\,3),(1\,4))$, に加えて，次の生成元と関係式で定義される群

$$H := \langle\ a,b,c \mid a^2 = b^2 = c^2 = (ab)^3 = (bc)^3 = (ca)^3 = (abac)^3 = 1\ \rangle$$

と，その中心 $\langle (abc)^2 \rangle$ による剰余群 $H/Z(H)$ である。ただし，実例（分類定理に出てくる群の D-subgroup）としては $H/Z(H)$ は存在しないようである。従って，以下では $H/Z(H)$ という群の存在の可能性はないものとして記述することにする。なお，記号 H は [F1] による。[CH2] では，$SU_3(2)'$ と書かれている。また，上記の関係式の最後を $(abac)=1$ にすれば S_3, $(abac)^2=1$ にすれば S_4 の定義式になる。

この H の 3-transposition の共役類は9個からなり，全て互いに非可換である。群構造としては位数 3^3 の extra-spatial group を index 2 で含む形をしている。一般に，位数が 2×3^N という形の 3-transposition group は，D の全ての元が互いに非可換になる。このような群を，[CH2] では "Moufang type" と呼んでおり，彼らの結果では，Moufang type を除く全ての（無限群も含めた）3-transposition group が分類されている。また，分類定理は，この H（または $H/Z(H)$）を含まない場合 ((1)–(3)) と含む場合 ((4)–(8)) とに分けて進められるのである。

この Moufang type の群も H を筆頭に，興味深いものがあり，名前にあるように Moufang loop との関連から，研究の歴史は古い。筆者は [K2] で，先に述べた $3^7 \cdot O_7(3)$ (non-split) の具体的な構成を与えたが，そこでもある種の Moufang loop と，対応する Moufang type の群が活躍した。そういう意味で，次の問題も Moufang loop との関わりから面白いかもしれないと思う。

問題 1. 3-transposition group $3^8 \cdot O_8^-(3):2$ (non-split) のわかりやすい構成を与えよ。

2.3 頂点作用素代数の問題から

以下，頂点作用素代数に関わる問題をいくつか述べる。宮本雅彦氏 ([M]) による，頂点作用素代数の宮本自己同型（その内の type II と呼ばれるもの）に関わる問題である。用語の説明を一切省いているので，興味のない方は読み飛ばしても差し支えない。

問題 2. type II の宮本自己同型で生成される群は H を含むか？(今のところ，存在は知られていない。)

問題 3. Code VOA の type II の宮本自己同型で生成される部分群 $G = \rangle D \langle$ が次のような構造

$$G/O_2(G) \cong H \text{ かつ } d \in D \text{ に対し } |d^{O_2(G)}| = 8$$

を持つものは存在するか？（初めの条件を $G/O_2(G) \cong S_3$ に替えれば，Hamming code VOA が該当する。）

問題 4. [KM] で分類した Code VOA の自己同型群のうち，$O_2(G) \neq 1$ であるものの構造を，Cuypers-Hall の結果を用いて，完全に決定せよ。

3 一般論

3.1 分類への諸定理

ここでは，分類定理に至る一般論について概略を述べる。その一部は，原論文の出版された部分 [F2] にあるほか，[A2] に詳しい記述がある。ここで述べる形は，Cuypers-Hall [CH1] による。

以下，$G = \langle D \rangle$ は，3-transposition の共役類 D で生成されていると仮定する。

定理 3.1 (Normal subgroup theorem). $Z(G) = 1$ を仮定すると，次のいずれかが成り立つ。
(1) $V := \langle\ ab \mid A_a = A_b\ \rangle \neq 1 (< O_2(G))$,
(2) $W := \langle\ ab \mid D_a = D_b\ \rangle \neq 1 (< O_3(G))$,
(3) $\langle\ ab \mid |ab| = 2\ \rangle$ は単純群である。

前節の分類定理における仮定は，ここで (1), (2) が起こらないということを意味している。これだけで，群がおおむね単純群であることが導かれてしまうのである。3-transposition group を考えるときには，G の D に対する，共役による置換表現を考えることをよくする。(1) または (2) が成立しているときには，この置換表現が

$$\{\ b \mid A_a = A_b\ \}, \{\ b \mid D_a = D_b\ \}$$

という集合が $a \in D$ を含む非原始域になる。分類定理の仮定は，さらに (8) を除外する仮定 $(G' = G'')$ を付けると，置換表現が原始的であることを意味している，というのが次の定理である。

定理 3.2 (Transitivity theorem). $Z(G) = V = W = 1$ と $G' = G''$ を仮定する。このとき，$d \in D$ の中心化群 $C_G(d)$ は，D_d と A_d のそれぞれに可移に作用する。特に D への置換表現は *rank 3* である。

この辺りのことに Aschbacher が早くから注目していたことは，興味深い。[A1] がそれである。その後，odd transpositions に関する仕事も残しているが，ここでは触れない。

次に続くのは，分類の根幹を作る定理である。この定理の証明が，原論文には全く書かれていないのが，出版に至らなかった理由の一つであろう。証明は後に，Weiss により [W2] として発表されている。

定理 3.3 (Uniqueness theorem). $Z(G)=V=W=1$ と $G'=G''$ を仮定する。このとき，$G=\langle D\rangle$ は，D_d, $D_d\cap D_x$ $(d\in D, x\in A_d)$ の構造から一意に定まる。

多くの場合 D_d は，中心化群 $C_G(d)$ を生成するので，この定理は中心化群からの特徴付けと近いものがある。先に挙げた例 2.3 で並べたのは，実はこの

$$G=\langle D\rangle>\langle D_d\rangle>\langle D_d\cap D_x\rangle$$

という系列なのであった。つまり，$W^*(E_8)$ は $W^*(E_7)$ と $W(E_6)$ から特徴づけられる。一般に，$O_{2n}^{\pm}(2)$ が $S_{2(n-1)}(2)$ と $O_{2(n-1)}^{\mp}(2)$ から特徴づけられる。ここで ε によらず D_d に対応する群 $S_{2(n-1)}(2)$ は同じものであることに注意されたい。

さて，この定理は実は「特徴付け」を超えて,「構成」へとつながるものなのである。すなわち，多くの場合

$G=\langle D\rangle$ は，D_d と $D_d\cap D_x$ から構成される（べき）

なのである。分類は（有限単純群分類がそうであったように）Uniqueness theorem を用いて，下から順に特徴付けて行く。最後の段階で，散在型単純群を得るところで「構成」が本質的に必要になるのである。先に，[F1] ではこの定理の証明が不完全だったと書いたが，ひとつひとつ個別に処理すれば良いとも言えるので，そのつもりだったのかもしれない。

例 3.4. 散在型の場合のデータを一覧表にしておこう。

$G=\langle D\rangle$	D_a	$D_a\cap D_b$	$D_a\cap D_b\cap D_c$
F_{24}	F_{23}	$O_8^+(3):S_3$	$O_8^+(2):S_3$
F_{23}	F_{22}	$O_7(3)$	$S_6(2)$
F_{22}	$U_6(2)$	$O_6^-(3):2$	$W(D_6)$

3.2 rank 3 のグラフ

例えば Higman-Sims の群がそうであるように，rank 3 の置換群はグラフの自己同型群として構成されることが多い。Transitivity theorem により，問題の 3-transposition group は rank 3 の置換群なので，まさにそのように構成される。

定義 3.5. 3-transposition group $G = \langle D \rangle$ に対応するグラフ Γ_G （または Γ_D ）を次のように定義する。

> 頂点集合は D で，相異なる２点 $a, b \in D$ を可換 (i.e. $|ab| = 2$) であるときに結ぶ。

中心を無視して，G の代わりに $G/Z(G)$ を考えることにしてもグラフは変わらない。しかし，グラフの同型類と群の同型類は（一般には）一対一対応にならない。例えば，$3^7.O_7(3)$ という群は，split する場合でもしない場合でもグラフは同じものになる。しかし，分類定理 2.2 の仮定をみたす場合には，一対一になってグラフから群を復元することが出来る。これは，次のようなステップ（概略だけを述べる）による。

(1) グラフ Γ の任意の２点 $a, b (b \notin \{a\} \cup \Gamma_a)$ に対し，

$$\Gamma_a \cap \Gamma_b = \Gamma_a \cap \Gamma_c = \Gamma_b \cap \Gamma_c$$

をみたす c がただ一つ存在することを示す。（これは，群における a^b に相当する。）ただし，Γ_a はグラフにおける a の近傍（結ばれる点全体）を表す。

(2) グラフの任意の点 a に対し，点の置換 σ_a を

> $\{a\} \cup \Gamma_a$ 上では恒等写像，$b \notin \{a\} \cup \Gamma_a$ に対しては (1) で示される c を対応させる

と定義する。

(3) 集合 $\Delta = \{ \sigma_a \mid a \in \Gamma \}$ がグラフの自己同型群に含まれ，$\langle \Delta \rangle$ において Δ が 3-transposition の共役類になっていることを示す。

(4) $G/Z(G) \cong \langle \Delta \rangle$ である。

3.3 $C_G(a)$ の置換表現

次に進む前に，3-transposition の特質から説明することが出来る，もう一つの置換表現について述べる。

前述の「非可換な３元 a, b, c の生成する部分群」を考える。そのときに注意したように $H/Z(H)$ は事実上出てこないと思うことにすると，群構造は３種類ということになる。これらを共役で移すことを考える。まず D を共役類と仮定して，a は固定されると考えて良い。次に，$b \in A_a$ は Transitivity theorem によりひとつに固定して良い。このとき $b^a (= a^b)$ も固定されるので，実際には，ここでは $C_G(a)$ の $\{b, b^a\}$ というペア全体への置換表現を考えていると思うべきである。問題の a, b, c の生成する群は３通りなのだが，S_3 を作る場合は $c = b^a$ なので，これはもう固定されている。だから，残りの c の取り方は（群構造でいうなら）２通りである。実は，ここで「同型なものは共役で移る」という事実が成り立つ場合が多いのである。

すなわち，$C_G(a)$ の $\{\ \{b,b^a\}\mid b\in A_a\ \}$ への置換表現が（多くの場合）rank 3 になるのである。さらに，それ以上のことが成り立つこともある。分類定理の (1)-(3) は，部分群 H を含まないのであった。このことは，今の置換表現が 2 重可移になっていることを示している。

$C_G(a)$ 自体が分類定理の仮定をみたす場合が面白いわけである。$G\cong S_{2n}(2), U_n(2)$ の場合は，その仮定をみたさない。

$G\cong S_n$ の場合は，単に $C_G(a)\cong S_{n-2}$ の $(n-2)$ 重可移表現が現れるだけである。$G\cong O^{\pm}_{2n}(2):2$ のときは，$C_G(a)\cong S_{2(n-1)}(2)$ の 2 重可移表現が現れる。これは，指定された symplectic form に対する 2 次形式全体への置換表現である。

G が 3 元体上の直交群の時は，$C_G(a)$ も同様に直交群になる。この場合は H を含むので rank 3 になるが，それは，singular vector に対する置換表現である。さらに，$G\cong F_{22}, F_{23}, F24$ のときは，それぞれ $C_G(a)\cong U_6(2), F_{22}, F_{23}$ の rank 3 置換表現が現れる。残念ながら $C_G(a)\cong F_{24}$ となる G はないので，F_{24} はこの種の置換表現を持たない。

例 3.6. 一つだけ例を挙げる。$G\cong W^*(E_8)$ とすれば，ここに現れるのは，$C_G(a)\cong W(E_7)$ の 28 次の 2 重可移表現である。$W(E_7)$ が S_8 と同型な D-subgroup を含むことは容易にわかる。8 文字の互換全体を考えて，この S_8 を自然に働かせる。次に，8 文字を 4 つずつに分ける任意の分け方を考えるとき，例えば $\{1,2,3,4\}$ と $\{5,6,7,8\}$ に分けたなら，

$$(1\ 2)\leftrightarrow(3\ 4),(1\ 3)\leftrightarrow(2\ 4),(1\ 4)\leftrightarrow(2\ 3),(5\ 6)\leftrightarrow(7\ 8),(5\ 7)\leftrightarrow(6\ 8),(5\ 8)\leftrightarrow(6\ 7)$$

という置換を考える。これらが生成する置換群が，$W^*(E_7)$ と同型になるのである。

4 3-transposition groups の構成

ここでは，2 種類の「構成」について述べる。一つは確実な定義として述べられる構成法であるが，もうひとつはそうではない。

4.1 Width extension

一つ目の構成法は，前節の置換表現と関係している。これは $C_G(a)$, 正確には $\langle D_a\rangle$ を構成する方法なのである。Width という言葉は，2.1 節で導入したものである。

まず，$a,b,c\in D$ を

$$|ab|=|bc|=3, |ac|=2$$

ととる。互換で言うなら S_4 を生成する $(1\ 2),(2\ 3),(3\ 4)$ を取ったと思えばよい。このとき，

$$K=\langle D_a\rangle, L=\langle D_a\cap D_b\rangle, M=\langle D_a\cap D_b\cap D_c\rangle$$

とおく。K を L, M から構成する方法である。もちろん，G や K のことを知らなくてもできる構成法なので，これらと独立に，3-transposition group $L = \langle E \rangle$ と，その部分群 M が与えられたとして K を構成するのである。

この方法を定義するためには，まず，次のような形の「補題」が必要である。

「補題」 任意の $x, y \in L$ に対し，$M^x \cap M^y$ は $X_0 (\cong L), X_1, ..., X_r$ のいずれかと同型である。

定義 4.1 (Width extension). L, M から定まるグラフ $\Gamma_{L,M}$ を次のように定義する。まず，点集合は $E \cup \{ M^x \mid x \in L \}$ を考える。辺で結ばれる条件は，

> E の 2 元 a, b は（以前と同じく）可換なときに結ぶ。
>
> $a \in E$ と M^x は $a \in M^x$ のとき結ぶ。
>
> M^x, M^y は，共通部分 $M^x \cap M^y$ があらかじめ指定された（例えば）X_1 と同型なときに結ぶ。

と定義する。ここから 3.2 節で述べた方法で K が復元されるのである。

多くの重要な例では，X_1 は L と width が一致する（唯一の）ものが指定される。これが width extension という名前の由来である。

例 4.2. $G \cong W^*(E_8)$ の場合，$K \cong W(E_7)$, $L \cong W(E_6)$, $M \cong W(D_5)$ となる。上記の「補題」は，

$$M^x \cap M^y \cong W(D_5), W(D_4) \text{ or } S_5$$

となる。X_1 として指定するのは $W(D_4)$ である。

演習 4.3. 上記の例で実際にグラフを作り，$W(E_7)$ が復元されることを確かめよ。

4.2 Central extension

記号は，引き続き前節のものを用いる。今度は，問題の $G = \langle D \rangle$ を $K = \langle D_a \rangle, L = \langle D_a \cap D_b \rangle$ から構成する（方法というより）原理のようなものである。

まず，3-transposition group $K = \langle F \rangle$ と部分群 L が与えられたとして，前節と同様の「補題」を用意する。$x, y \in K$ に対する $L^x \cap L^y$ を分類するわけである。K, L から定まるグラフ $\Gamma_{K,L}$ は，次のような定義になる。まず，点集合は $F \cup \{ (L^x)_1, (L^x)_2 \mid x \in K \}$ とする。記号の意味は，L^x に対応する点が 2 つあるという設定を考えるので，添え字で区別したのである。次に，辺で結ばれる条件は，

> F の 2 元 a, b は可換なときに結び，$a \in F$ と $(L^x)_i$ は $a \in L^x$ のとき結ぶ。

ここまでは，前と同様である。最後の $(L^x)_i, (L^y)_j$ は，$L^x \cap L^y$ で場合分けされるのであるが，$(L^x)_1, (L^x)_2$ の区別は一般論ではできない。ここは個別に処理せざるを得ず，非常に大変なのである。

例 4.4. $G \cong W^*(E_8)$ とする。$K \cong W(E_7), L \cong W(E_6)$ である。この場合は，K/L の２重可移表現がうまく記述できるので話は簡単である。例 3.6 によれば，この２８次の置換表現の点集合は，８文字の置換全体と同一視できた[1]。だから，L^x たちも同じ同一視ができる。（厳密には $N_K(L) = L$ という事実が必要。）そこで，$\Gamma_{K,L}$ の点集合を

$$F \cup \{\ (i\ j)_1, (i\ j)_2 \mid 1 \le i < j \le 8\ \}$$

と書くことができて，問題の部分の辺の記述を

$(i\ j)_1$ は，共通の文字のない $(k\ l)_1$，および，１文字共通の $(i\ k)_2$ と結ぶ。

と定義すればよい。

演習 4.5. 上記の例で実際にグラフを作り，$W(E_8)$ が復元されることを確かめよ。

5　F_{22}, F_{23}, F_{24} の構成

最後の節として，散在型の場合の構成について述べる。例 3.4 をご覧いただきたい。この表の下から積み上げて行くわけである。概略だけ言うなら，まず F_{23} を Width extension で構成して，出来上がったものを Central extension として見直しておく。（このとき，F_{22} を同様に作ったときの情報が必要になる。）F_{24} は central extension で作るしかないのだが，まずは F_{23} に相当する部分を（先に見ておいた）Central extension で作っておき，それを全体に延長するのである。

5.1　Width extension

$U_6(2)$, F_{22}, F_{23} は，Width extension で作ることができる。しかし，F_{23} 辺りになると十分難しい。[F1] では，そのための準備の所に明確な誤り[2]がある。そのために，次の重要な補題が抜け落ちてしまっている。このような補題が独力で証明できれば，[F1] は十分読めると思う。

補題 5.1. $L = \langle F \rangle \cong O_8^+(3):2$, $L > M \cong O_8^+(2):2$ とするとき，任意の $x, y \in L$ に対し $M^x \cap M^y \cap F$ は，$O_8^+(2):2$, S_9, $W(D_4) \times W(D_4)$, $S_3 \times S_3 \times S_3 \times S_3$ のいずれかを生成するか，または空集合である。

[1] このことが，例 4.2 の構成から読みとれれば良いと思い試みてみたのだが，すぐにはうまく行かなかった。

[2] 例えば，(15.3.10), (15.3.20), (16.1.21), (16.1.22) の主張は成立しない。

Width extension は数学的に紛れの余地もないし，問題点が残っているわけでもない。しかし，よりエレガントな記述があるなら，その後に続く Central extension の扱いが容易になる可能性もある。

問題 5. F_{22} や F_{23} の Width extension の良い記述を考えよ。

正面から取り組む問題とは思わない。Fischer の議論を追随するだけなら,「問題」でなく「演習」であろう。何かの別の方向からこれらの群の情報を得ることがあったら，そこで得た知識が Width extension の記述に使えないか，と考えていただければ良いと思う。

5.2 Central extension

この section の最初に書いたように，F_{24} 以外は Central extension で構成されるのでは無い。(例えば) F_{23} は Central extension としての構造を持っていて，$(L^x)_i, (L^y)_j$ の辺が定まっているという事を前提として，次の F_{24} に進むのである。

問題 6. Fischer 群（特に F_{24}）の Central extension の良い記述を考えよ。

F_{24} の場合なら，Fischer の議論を完全に正当化するだけでも，十分価値があると思う（論文として出版に値するかどうかはわからないが)。F_{22}, F_{23} でも（$U_6(2)$ でも）良い記述（例えば $W(E_8)$ の例のような簡単な記述）があれば，非常に価値は高いと思う。

なお，Central extension の考え方（そこで必要な情報）は，より大きな群の部分群としての構成において有用である。例えば，${}^2E_6(2)$ の部分群として F_{22} を構成する話が [C] の最後の数ページで実行されている。

最後に [F1] に書かれなかった補題をもう一つ掲げておく。F_{24} の構成で使うはずのものである。

補題 5.2. $K = \langle E \rangle \cong F_{23}$, $K > L \cong O_8^+(3) : S_3$, $L > M \cong O_8^+(2) : S_3$ とする。$x, y, z \in K$ が

$$\langle L^x \cap L^y \rangle \cong \langle L^x \cap L^z \rangle \cong \langle L^y \cap L^z \rangle \cong \langle L^z \cap L \rangle \cong M$$

をみたすとき，

$$L^x \cap L^y \cap L^z \cap L \cap E \neq \emptyset$$

である。

この補題は，$K = F_{23}$ の性質を述べているようだが，この主張を $L^x \cap L^y \cap L^z$ と $L^y \cap L^z \cap L$ との共通部分を調べるものと考えれば，$L^y \cap L^z$ の中で考えることができる。つまりは $M \cong O_8^+(2) : S_3$ での話である。では，この 3 つの共通部分 ($L^x \cap L^y \cap L^z$ など) をどう処理するかと言えば，L^z の中で $L^x \cap L^z$ と $L^y \cap L^z$ の共通部分として調べるのである。これは，補題 5.1 の応用として処理できるのである。

6　$3.F_{24}$

本稿の締めくくりとして（講演でもそうだったように）3-transposition group ではない $3.F_{24}$（位数３の巡回群との拡大）について触れる。

6.1　Conway-Norton 代数

この群は，783×2 次元の可換代数 (Conway-Norton 代数) の全自己同型群であることがわかっているが，このことを示した [K1] の議論は F_{24} の存在を仮定しているので，構成問題に答えたことにはならない。かつて $F_{24} > 2^{12}.M_{24}$ という包含関係からの構成を試みたが，ある理由で頓挫している。

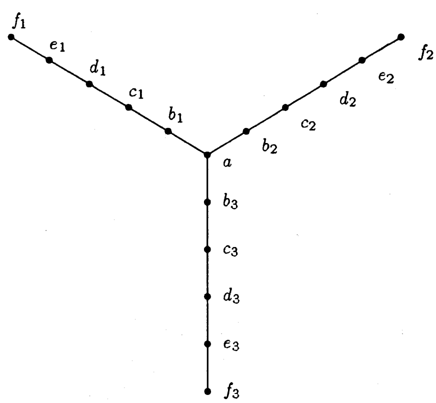
問題 7. 783×2 次元の Conway-Norton 代数を F_{24} の存在と独立に構成し，その自己同型群を計算せよ。

可換代数は，頂点作用素代数と深く関連する可能性がある。モンスターに対するムーンシャイン頂点作用素代数と関連するのが，Griess 代数であるから，その部分代数として考察することが可能なのかもしれない。

6.2　Y-presentation

もう一つの手がかりは，生成元と関係式による記述 Y-presentation である。

次の図形を Y_{555} と呼ぶ。添え字は，中心の点を除いた３本の枝にある点の個数を表している。(ただし，中心の点も入れて数えた方が良いこと[3]があるため，最近では $\mathbb{M}_{666}$ という呼び方もされる。)



これを Coxeter diagram と見て，点は $x^2 = 1$ をみたす生成元を表し，２点 x, y の間に edge があれば $(xy)^3 = 1$, なければ $(xy)^2 = 1$ という関係式を表すものと

[3]例えば，拡大 E_8-diagram は $Y_{521} = \mathbb{M}_{632}$ であるが，後者の添え字の方が意味 $(\frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = 1)$ がある

する。Y_{555} からいくつかの点を除いた場合も考える。Y_{553} (resp. Y_{533}, Y_{552}) とは，$\{e_3, f_3\}$ (resp. $\{e_2, f_2, e_3, f_3\}$, $\{d_3, e_3, f_3\}$) を除いたものである。この図形で表される関係式に，もう一つ

$$(\#) \quad (ab_1c_1ab_2c_2ab_3c_3)^{10} = 1$$

を付け加えることで，モンスターを含む有限群が定義されるというのが，有名な Y-presentation である。

$$\mathbb{M} \wr 2 \cong < Y_{555}, (\#) >, \quad 2 \times \mathbb{M} \cong < Y_{553}, (\#) >$$
$$2^2.B \cong < Y_{533}, (\#) >, \quad 3.F_{24} \cong < Y_{552}, (\#) >$$

Fischer 群については，[CP] で詳しく調べられており，証明が与えられている。この生成元，あるいは関係式の数学的な意味を知りたいと思う。21 世紀において，次の問題の解決を期待したい。

問題 8. Y_{552} の生成元が自然に現れるような $3.F_{24}$ の構成を与えよ。そして，関係式 (#) の意味を調べよ。

他の Fischer 群 F_{23}, F_{22} も Y_{432}, Y_{332} から

$$2 \times F_{23} \cong < Y_{432}, (\#) >, \quad 2^2.F_{22} \cong < Y_{332}, (\#) >$$

として，それぞれ得られる。また，5 節で何度も出てきた $O_8^+(3):2$ も Y_{422} から得られる。この 3 つは，全て 3-transposition group そのものが出てくる。これらの群の中で，生成元と関係式の意味を探るのも面白いかもしれない。いずれにせよ，3-transposition groups の視点で重要な群は，ことごとく Y_{555} の subdiagram から出てくるのである。そして，その延長線に Monster も Baby Monster もある。何か良い説明はないのだろうか。

参考文献

[A1] M. Aschbacher, A homomorphism theorem for finite graphs, *Proc. Amer. Math. Soc.* **54** (1976), 468–470.

[A2] M. Aschbacher, “3-transposition groups”, Cambridge University Press, 1997.

[C] B. Cooperstein, The Geometry of Root Subgroups in Exceptional Groups, II, *Geometriae Dedicata*, **15** (1983), 1–45.

[CH1] H. Cuypers and J.I. Hall, The Classification of 3-Transposition Groups with Trivial Center, in “Groups, Combinatorics and Geometry”. (M. Liebeck and J. Saxl, Eds), pp. 121–138, London Math. Soc. Lecture Notes 165, Cambridge University Press, 1992.

[CH2] H. CUYPERS AND J.I. HALL, The 3-Transposition Groups with Trivial Center, *J. Algebra*, **178** (1995), 149–193.

[CP] J.H.CONWAY AND A.D.PRITCHARD, Hyperbolic reflections for the Bimonster and $3Fi_{24}$, in "Groups, Combinatorics and Geometry" (1992).

[F1] B. FISCHER, Finite group generated by 3-transpositions, University of Warwick, Lecture notes, 1969.

[F2] B. FISCHER, Finite group generated by 3-transpositions I, *Invent. Math.* **13** (1971), 232–246.

[K1] M.KITAZUME, The Conway-Norton algebras for $\Omega^-(6,3), \Omega(7,3), F'_{24}$, and their full automorphism groups, *Invent. Math.* **88** (1987), 277–318.

[K2] M. KITAZUME, Some Non-split Extensions of the Orthogonal Group $\Omega(7,3)$, *Journal of Algebra*, **224** (2000), 59–76.

[KM] M. KITAZUME AND M. MIYAMOTO, 3-transposition automorphism groups of VOA, *to appear in "Finite Groups Theory and Combinatorics in honor of Michio Suzuki", Advanced Studies in Pure Mathematics.*

[M] M. MIYAMOTO, Griess algebras and conformal vectors in vertex operator algebras, *J. Algebra* **179** (1996), 523–548.

[N] 永尾汎, 群とデザイン, 岩波書店

[W1] R. WEISS, 3-transpositions in infinite groups, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **96** (1984), 371–377.

[W2] R. WEISS, A uniqueness lemma for groups generated by 3-transpositions, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **97** (1985), 421–431.