Title	相対射影性とコホモロジー環 (群論とその周辺 : 総括と展望)
Author(s)	佐々木, 洋城
Citation	数理解析研究所講究録 (2001), 1214: 83-106
Issue Date	2001-06
URL	http://hdl.handle.net/2433/41173
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録 1214 巻 2001 年 76-82

群指標とその応用

東京医科歯科大学教養部　清田正夫

1　指標理論の始まり

次の行列式の因数分解はよく知られている。

$$\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a+\omega b+\omega^2 c)(a+\omega^2 b+\omega c)$$

ここで $\omega^3 = 1 \neq \omega$ 。上の行列式は群行列式 $\Theta(G)$ の特別な場合である。（G が2次と3次の巡回群の場合。）群行列式 $\Theta(G)$ は次のように定義される。

$G = \{g_1 = 1, g_2, \cdots, g_s\}$ を位数 s の有限群とし、G の各元 g_i に対し不定元 x_{g_i} を用意する。$s \times s$ 行列 $(x_{g_i g_j^{-1}})$ の行列式

$$\Theta = \Theta(G) = det(x_{g_i g_j^{-1}})$$

を有限群 G の群行列式と呼ぶ。Θ は変数 $x_{g_1}, \cdots, x_{g_s}$ の s 次同次多項式である。

さて G がアーベル群のとき、$\Theta(G)$ は1次式の積に因数分解できる。

定理 (Dedekind) G がアーベル群のとき、

$$\Theta(G) = \prod_{\chi \in \hat{G}} \left(\sum_{g \in G} \chi(g) x_g \right)$$

が成立する。ここで $\hat{G}$ は G の1次指標全体の集合を表す。

Dedekind は Frobenius への手紙（１８９６年3月２５日付）のなかで上の結果を述べ、G が非アーベル群のとき $\Theta(G)$ がどう分解するか質問した。Frobenius は直ちに群行列式の研究に着手し、驚くべき速さで次の定理を得た。

定理 (Frobenius,1896) $\Theta(G)$ の既約分解を、

$$\Theta(G) = \prod_{i=1}^{k} \Phi_i^{e_i}$$

Φ_i を f_i 次同次式とするとき、次が成立する。

(1) k は G の共役類の個数に一致する。

(2) 1次因子の個数は $|G:G'|$ に一致する。

(3) $e_i = f_i$ が成立する。

Frobenius は上の定理を証明する道具として、非可換群の指標を定義して直交関係などを調べ、それらの性質を駆使して定理の証明に成功した。既約因子 Φ と指標 χ は次の関係で1対1に対応している。(Φ は適当にスカラー倍して変数 x_1 に関して monic となるように正規化しておく。)

$$\Phi = {x_1}^f + {x_1}^{f-1}(\sum_{g\neq 1}\chi(g)x_g) + \cdots$$

すなわち既約因子 Φ から対応する指標 χ を $\chi(1) = f = \Phi$ の次数、$\chi(g) = \Phi$ の ${x_1}^{f-1}x_g$ の係数 $(g \neq 1)$ で定めることができる。逆に指標 χ から既約因子 Φ のすべての係数を計算することができる。

Frobenius の与えた指標（値）の定義は、今の言葉で述べると、central character（群環の中心の1次指標）の値を正規化したものであった。非可換群の指標の定義に可換な対象が用いられていること、および指標が線形表現と関係なく定義されていることは注目に値する。翌１８９７年の論文で、Frobenius は群の線形表現を導入し、前に定義した指標がある線形表現のトレースと一致することを示した。

１８９６年以降 Frobenius は指標理論を発展させるが、その理論は群行列式の既約因子を中心概念とした、大変難解なものであった。Frobenius の指標理論は１９０５年の Schur の論文によって大幅に簡易化された。Schur は指標を行列表現のトレースとして捉え、今日 Schur の補題として知られている結果を用いて、指標理論を再構成した。その後 Noether による加群論的整備を経て、現代の教科書に書かれている有限群の表現論、指標理論が出来上がっていった。

さて現代流の解釈では、$\Theta(G)$ の既約分解は正則表現の既約表現への分解と対応している。Frobenius が基本定理と呼び、苦心して証明を与えた上の主張 (3) は正則表現における既約表現の重複度はその既約表現の次数と一致するという簡単な事実に他ならない。

群行列式の理論は指標理論の再構成の波に呑み込まれて、現代の教科書には現れていないが、最近次の興味ある結果が得られた。

定理 (Formanek and Sibley, 1991) 有限群 G, H に対し、$\Theta(G) = \Theta(H)$ ならば、G と H は同型である。

有限群の概念の自然な拡張はアソシエーションスキームであると思われるので、群行列式の理論の拡張として次の問題が考えられる

問題 $\mathcal{X}=(X,\{R_i\})$ をアソシエーションスキームとし、A_i をその隣接行列とする。 $\Theta(\mathcal{X})=det(\sum A_i x_i)$ とおくとき、
(1) $\Theta(\mathcal{X})$ の分解は？
(2) $\mathcal{X}$ が非可換のときの指標理論は？

$\mathcal{X}$ が可換アソシエーションスキームのときは満足すべき指標理論があり、有限群 G の群アソシエーションスキーム $\mathcal{X}(G)$ にその理論を適応すると有限群の指標理論が得られる。上の問題の意味は、非可換アソシエーションスキームの指標理論を $\Theta(\mathcal{X})$ の分解を通じて構成して、有限群の正則表現から作られるアソシエーションスキームにそれを適応すると有限群の指標理論が生じるようにできないかということである。

2　3つの古典的応用例

ここでは有限群論の定理の証明に指標理論が用いられている例を3つとりあげる。いずれの定理においてもその主張が指標と無関係な点、および例 (B),(C) では指標理論を用いない証明が現在のところ得られていない点に注目していただきたい。

(A) Burnside の $p^a q^b$ 定理。 (1904)
Burnside は指標値に整数論を適用して、次の有名な定理を得た。

定理 (Burnside) 位数が丁度2つの素数で割れる有限群は可解群である。

証明はどの表現論の本にも出ている。およそ７０年後に Bender, Goldschmidt, 松山らにより指標理論に依らない純群論的証明 (character free proof) が得られている。しかし Burnside のエレガントな短い証明は今でもその価値を失っていない。実際には彼は次の結果を証明した。

定理 (Burnside) 有限群 G のある共役類の元の個数が素数べきで1より大とする。このとき G は単純群ではない。

この定理と Sylow の定理から $p^a q^b$ 定理はすぐに導かれる。この定理の純群論的証明はまだ得られていないようである。このような非単純性判定の定理では、証明に指標が利用されることが多い。

(B) Frobenius 核の存在。 (1901)
次の Frobenius の定理も非単純性判定の定理の一種である。

定理 (Frobenius) G を有限群、H を G の真部分群とする。任意の $g \in G-H$ について $H \cap H^g = 1$ ならば、G の正規部分群 N が存在して $G = NH, N \cap H = 1$ が成り立つ。

この定理が出てこない表現論の本も無いと思われる。証明は誘導指標と Frobenius 相互律を用いて H の既約指標に対し、G の既約指標をうまく対応させて行う。この議論を発展させ Brauer, 鈴木は例外指標の理論を作り上げた。例外指標の理論は CA 群、CN 群、Zassenhaus 群の構造決定に重要な役割をはたした。例外指標の一番大掛かりな応用例は Feit による Odd Order Theorem の証明 (の後半部分) であろう。

上の定理の構造論的証明は１００年経った現在でも得られていない。今世紀中に純群論的証明が見つかるかどうか、とても興味のあることである。

(C) Glauberman の Z^* 定理。(1966)

Z^* 定理が古典的というと少し違和感があるが、この定理が群構造論とくに単純群論に必要不可欠なものであることは明らかである。Z^* 定理は位数２の元の fusion に関する定理で次の定理を一般化したものである。

定理 (Brauer - Suzuki) (1959) G を有限群で一般４元数群を 2-Sylow 群に持つとする。このとき $G/O(G)$ の中心は位数 2 である。ここで $O(G)$ は G の奇数位数の最大正規部分群を表す。

2-Sylow 群の位数が 16 以上のときは、通常指標を用いて比較的容易に証明された。一方 2-Sylow 群の位数が 8 のときは、もとの Brauer - Suzuki の証明ではモジュラー指標が使われていたが、後になって Glauberman による通常指標のみを用いる証明 (modular free proof) が得られた (1974)。さて T を上の定理の G の 2-Slow 群とすると、T は一般４元数群なので唯一の位数 2 の元 t を持ち、$T \cap \{t\}^G = \{t\}$ が成立している。次の Z^* 定理は T の構造にかかわらず $T \cap \{t\}^G = \{t\}$ が成立していれば $tO(G)$ が $G/O(G)$ の中心に入ることを主張している。

定理 (Glauberman) T を有限群 G の 2-Sylow 群とし、t を T の位数 2 の元とする。このとき次はすべて同値である。

(1) 任意の $x \in G$ について $[x, t]$ は奇数位数である。

(2) $T \cap \{t\}^G = \{t\}$ 。

(3) $t \in Z^*(G)$ 、ここで $Z^*(G)$ は $G/O(G)$ の中心の逆像である。

2-Sylow 群 T の階数が 1 のとき、すなわち T に含まれる位数 2 の元が一つしかないとき、T は巡回群か一般４元数群となり、それぞれ Burnside の移送定理、Brauer-Suzuki の定理を用いて (3) が証明される。よって T の階数が２以

上と仮定できる。この場合に Glauberman はモジュラー表現論（2-ブロックの理論）を使って定理を証明した。modular free proof はまだ見つかっていない。Z^* 定理の odd analogue は単純群の分類定理を仮定すれば、証明出来ているようである。分類定理を用いない Z^* 定理の odd analogue の証明ははたしてあるのだろうか。もしあるとすれば p-ブロックの理論が使われるはずである。

3 指標次数と群構造

ここでは指標の次数と有限群の構造の関係を述べた定理をいくつか紹介する。以下 G を有限群とし、$Irr(G)$ で G の通常既約指標全体の集合をあらわす。出発点はやはり Frobenius である。

定理 (Frobenius 1896) 任意の $\chi \in Irr(G)$ について、その次数 $\chi(1)$ は G の位数を割り切る。

伊藤昇は上の定理を次のように拡張した。

定理 (Ito 1951) A が G の可換正規部分群であるとき、任意の $\chi \in Irr(G)$ について $\chi(1)$ は $|G:A|$ を割り切る

この定理から G が可換正規な p-Sylow 群を持てば、$\chi(1)$ はすべて p と素になる。伊藤は G が可解群のとき、この逆も成立することを示した。一般の場合は長らく未解決問題となっていたが、Michler によって解決された。

定理 (Michler 1986) 任意の $\chi \in Irr(G)$ について $\chi(1)$ が素数 p と素であるならば、G は可換正規な p-Sylow 群を持つ。

証明には単純群の分類定理が用いられている。最小位数の反例 G はすぐに単純群となることが分かるので、任意の単純群が、位数を割る素数 p について定理の仮定を満たさないことを示せばよい。Michler はリー型の単純群の系列についてこれを実行した。

次の Isaacs の結果は p-べキ零性が既約指標の次数全体から判定できることを示している。

定理 (Isaacs 1986) p を素数とし、$B = \{\chi \in Irr(G) \mid (p, \chi(1)) = 1\}$ とおく。また $\beta(G) = \sum_{\chi \in B} \chi(1)^2$ とおく。このとき G が p-べキ零となる条件は $|G:G'|_p = \beta(G)_p$ が成り立つことである。

系 $\mathbb{C}G \cong \mathbb{C}H$ 、G が p-べキ零ならば、H も p-べキ零となる。ここで $\mathbb{C}G$ は

G の複素数体 $\mathbf{C}$ 上の群環を表す。

次の問題は自然な問いだが、いまだに未解決のようである。

問題 $\mathbf{C}G \cong \mathbf{C}H$ 、G が可解群ならば、H も可解群となるか。

次の Thompson の結果は Isaacs の定理からすぐ出るが、仮定が簡潔なので使いやすい。

定理 (Thompson 1970) $\chi(1) > 1$ となる任意の $\chi \in Irr(G)$ について $\chi(1)$ が p で割り切れるならば、G は p-ベキ零となる。

次はベキ零性の判定定理であるが、証明に単純群の分類定理が用いられている。条件のなかに $Ker\chi$ が現れるので応用が難しい定理である。

定理 (Gagola and Lewis 1999) G がベキ零群となる条件は、任意の $\chi \in Irr(G)$ について $\chi(1)^2$ が $|G : Ker\chi|$ を割り切ることである。ここで $Ker\chi$ は χ に対応する表現の核をあらわす。

次の問題はアソシエーションスキームの理論から派生した問題である。

問題 $Cl(G) = \{C_1, \cdots, C_k\}$ を G の共役類全体の集合とし、$Irr(G) = \{\chi_1, \cdots, \chi_k\}$ とする。$\chi_i(1)^2 = |C_i|$ $(i = 1, \cdots, k)$ が成立するとき、G はベキ零群となるか。

今までに得られている（部分的）結果は、G を問題の仮定を満たす有限群とするとき、

(1) G の p-Sylow 群 P が巡回群ならば、P は G の直積因子である；
つまり　$G = P \times O_{p'}(G)$　が成立する。

(2) G は非可換単純群ではない。((1) と分類定理による。)

だけである。上の Isaacs の定理を使えないかと考えている。

さて最後に最近の結果を 2 つ紹介する。

定理 (Riese 1998) A を G の部分群でアーベル群とする。$\chi(1) = |G : A|$ となる $\chi \in Irr(G)$ があれば、A は G の連正規 (subnormal) 部分群である。

定理 (Riese and Schmid 1998) P を G の p–Sylow 群とする。ある $\chi \in Irr(G)$ について $|G|/\chi(1)$ が p べきならば、P の中心 $Z(P)$ は G の連正規 (subnormal) 部分群である。

最後の定理 (Riese and Schmid 1998) の証明には分類定理が使われている。これらの簡明な定理がごく最近証明されたことは、驚きに値する。２１世紀には、群指標と群構造のあいだの未知の、美しい関係が数多く発見、解明されることを願ってこの報告をおわりとする。

4 参考文献

指標理論の教科書として

Isaacs, Character Theory of finite groups, Academic Press, New York, 1976

Huppert, Character Theory of finite groups, Walter de Gruyter, Berlin ; New York, 1998

等があげられる。第１節の話題については次を参考にした。

Curtis, Pioneers of representation theory, American Mathematical Society, 1999

Lam, Representations of finite groups: a hundred years, Part I and Part II, Notice of the AMS 45 (1998) 361-372, 465-474

Curtis, Representation theory of finite groups: from Frobenius to Brauer, The Mathematical Intelligencer 14 (1992) 48-57

Formanek and Sibley, The group determinant determines the group, Proc. Amer. Math. Soc. 112 (1991) 649-656

第２節の文献は省略する。上の Curtis の本などに載っている。

第３節の文献は登場順に次のとおりである。

Frobenius, Uber die Primfactoren der Gruppendeterminante, S'ber. Akad. Wiss. Berlin (1896) 985-1021

Ito, On the degrees of irreducible representations of a finite group, Nagoya Math. J. 3 (1951) 5-6

Michler, A finite simple group of Lie-type has p-block with different defects, $p \neq 2$, J. Algebra, 104 (1986) 220-230

Isaacs, Recovering information about a group from its complex group algebra, Arch. Math. 47 (1986) 293-295

Thompson, Normal p-complements and irreducible characters, J. Algebra 14 (1970) 129-134

Gagola and Lewis, A character theoretic condition characterizing nilpotent groups, Comm. in Algebra 27 (1999) 1053-1056

Riese, A subnormality criterion in finite groups related to character degrees, J. Algebra 201 (1998) 357-362

Riese and Schmid, Characters induced from Sylow subgroups, J. Algebra 207 (1998) 682-694