数理解析研究所講究録 1216 巻 2001 年 1-12

脳波を記述する積分方程式について

(Integral Equation for the Electroencephalography)

大阪大学　鈴木　貴 *
藤田保健衛生大学　久保明達 **

* Takashi Suzuki
Department of Mathematics, Graduate School of science, Osaka University,
** Akisato Kubo
School of Health sciences, Fujita Health University

1. Introduction

脳波 (Electroencephalography$\cdots$脳電波) 脳内の神経回路を流れる電流 (Neuron 流) が、大脳, 随液, 頭蓋骨, など電導率の異なる導体を貫いて, 頭皮上に発生させる電場の電位差.

支配方程式 (Geselowitz[4] 1967)

$$\nabla\times\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{J},\qquad \nabla\cdot\boldsymbol{B}=0.\qquad in\quad R^3 \tag{1}$$

Ampère 則

$$\boldsymbol{J}=\boldsymbol{J}^p-\sigma(x)\nabla V:\text{全電流密度} \tag{2}$$

$$\begin{cases}\boldsymbol{J}^p(x)\text{:Neuron 流 (Primary 流)}\\ -\sigma(x)\nabla V:\text{secondary 流}\\ V(x):\text{Neuron 流の引き起こす電場}\\ \sigma(x):\text{電導率}\\ \mu_0=4\pi/c:\text{透磁率（}c>0\text{ 光速)}\\ \boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}(x):\boldsymbol{J}(x)\text{ により発生する磁場}\end{cases}$$

<u>仮定</u>　次の仮定をおく.

$$\sigma(x)=\begin{cases}\sigma_i>0(x\in\Omega_i\setminus\Omega_{i-1}),\ i=1,2,\cdots,m+1,\\ \sigma_0>0(x\in\Omega_0),\end{cases}$$

$\Omega_0,\Omega_1,\cdots,\Omega_m\subset R^3$ を有界領域の列とし次を満たす.

$$\Omega_0\subset\subset\Omega_1\subset\subset\cdots\subset\subset\Omega_m\subset\subset R^3,$$

$S_i=\partial\Omega_{i-1}(i=1,2,,\cdots,m+1)$ 滑らかで, $\Omega_{m+1}=R^3$ とする.
(1) の適合条件として

$$\nabla\cdot\boldsymbol{J}=0\qquad in\quad R^3$$

を仮定する。R^3 上の超関数の意味でとれば、(2) より

$$\sigma_i \Delta V = \nabla \cdot \boldsymbol{J}^p \quad in \quad \Omega_i \setminus \Omega_{i-1}, \tag{3}$$

$$\left[\sigma(x)\frac{\partial V}{\partial n}\right]_{-}^{+} = 0 \quad \text{on} \quad S_i,\ i = 1, 2, \cdots, m+1.$$

ただし、

$$A_+(\xi) = \lim_{x \to \xi,\ x \in \Omega_i} A(x), \qquad A_-(\xi) = \lim_{x \to \xi,\ x \in \Omega_{i-1}} A(x)$$

$n : \Omega_{i-1}$からみて外向き法線ベクトル.

$$S = \bigcup_{i=1}^{m} S_i, \quad \Gamma(x) = \frac{1}{4\pi|x|} \ \text{とおく.}$$

$\mathrm{supp}\boldsymbol{J}^p \subset \bar{\Omega}_0, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{J}^p \in L^2(\Omega_0)$ と仮定。

$V(x) \in H^1(R^3),\ V(x)$: 区分的に滑らかとすれば

$$-\int_{\Omega_0} \nabla \cdot \boldsymbol{J}^p(y)\Gamma(x-y)dy = -\int_{R^3} \nabla \cdot (\sigma(y)\nabla V(y))\Gamma(x-y)dy$$

(3) より

$$= \int_{R^3} \sigma(y)\nabla V(y) \cdot \nabla_y \Gamma(x-y)dy$$

を得る. $x \in R^3 \setminus S,\ 0 < \varepsilon \ll 1$ とすると

$$\int_{R^3} \sigma(y)\nabla V(y) \cdot \nabla_y \Gamma(x-y)dy = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{R^3 \setminus B(x,\varepsilon)} \sigma(y)\nabla V(y) \cdot \nabla_y \Gamma(x-y)dy.$$

さらに

$$\int_{R^3 \setminus B(x,\varepsilon)} \sigma(y)\nabla V(y) \cdot \nabla_y \Gamma(x-y)dy = \sum_{i=1}^{m} \int_{S_i} [\sigma(x)V(y)]_{-}^{+} \frac{\partial}{\partial n_y}\Gamma(x-y)ds_y$$

$$+ \int_{\partial B(x,\varepsilon)} \sigma(y)V(y)\frac{\partial}{\partial n_y}\Gamma(x-y)ds_y$$

$$\xrightarrow{\varepsilon \downarrow 0} \sum_{i=1}^{m} (\sigma_{i-1} - \sigma_i) \int_{S_i} V(y)\frac{\partial}{\partial n_y}\Gamma(x-y)ds_y + \sigma(x)V(x).$$

である. 故に、$x \in R^3 \setminus S$ に対し次を得る.

$$\sigma(x)V(x) = -\int_{\Omega_0} \nabla \cdot \boldsymbol{J}^p(y)\Gamma(x-y)dy - \sum_{i=1}^{m}(\sigma_{i-1}-\sigma_i)\int_{S_i} V(y)\frac{\partial}{\partial n_y}\Gamma(x-y)ds_y \tag{4}$$

を得る. ここで二重層ポテンシャルの性質から

$$H_i(x) = \int_{S_i} V(y)\frac{\partial}{\partial n_y}\Gamma(x-y)ds_y$$

は S_i 上 $\frac{1}{2}(H_{i+}+H_{i-}) = H_i$ を満たす. 故に,

$$\frac{\sigma_i+\sigma_{i-1}}{2}V(\xi) = -\int_{\Omega_0} \nabla \cdot \boldsymbol{J}^p(y)\Gamma(\xi-y)dy - \sum_{i=1}^{m}(\sigma_{i-1}-\sigma_i)\int_{S_i} V(y)\frac{\partial}{\partial n_y}\Gamma(\xi-y)ds_y \tag{5}$$

$$(\xi \in S_i,\ i=1,2,\cdots,m)$$

を得, これを**脳波に関するGeselowitz方程式**と呼ぶ.

本稿の目的・・・(5) の解析的理論について考える. $\{J^p(x)|x \in \bar{\Omega}_0\}$ から $\{V(\xi)|\xi \in S_m\}$ を求める, すなわち順問題を考え, Fredholm の積分論により一意可解性を証明、併せて数値解法に関する注意を与える。数値計算により解を求める直接法については H.A. Schlitt, et.al.[8](1995) がある. 2層の場合には, 鈴木-渡辺-下川原 [10] において基礎的な理論と数値計算に対する議論はすでにできており, これに沿って m 層の場合にまで一般化する. さらに, 藤田-斉藤-鈴木 [11] の議論にそって, 解のフーリエ級数による近似について考える.

2 一意可解性

Theorem 1. $\mathrm{supp}\boldsymbol{J}^p \subset \bar{\Omega}_0$, $\boldsymbol{J}^p$ の各成分が $L^q(\Omega_0)(q>3)$ に属するとき, $\sigma_i > 0$, $\sigma_i \neq \sigma_{i-1}(1 \le i \le m)$ ならば (4) を満たす $V \in C(S)$ が一意的に存在する.

Proof. 超関数として $\nabla \cdot \boldsymbol{J}^p \in W^{-1,q}(R^3)$, $\mathrm{supp}\nabla \cdot \boldsymbol{J}^p$:compact. 一方, $\Gamma \in W^{1,q'}_{loc}(R^3)(1 < q' < 3/2)$

$$g = \int_{\Omega_0} \nabla \cdot \boldsymbol{J}^p(y)\Gamma(\cdot - y)dy = \Gamma * \nabla \cdot \boldsymbol{J}^p,$$

は $well\ defined$ であり, ソボレフの不等式より R^3 上連続であることがわかる.

$$\boldsymbol{X} = \prod_{i=1}^{m} C(S_i) \text{ とし}$$

$$\boldsymbol{W} = \begin{pmatrix} \frac{\sigma_1+\sigma_0}{2}V_1 \\ \cdots \\ \frac{\sigma_m+\sigma_{m-1}}{2}V_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_1 \\ \cdots \\ W_m \end{pmatrix} \in \boldsymbol{X},\ \boldsymbol{G} = -g\begin{pmatrix} 1 \\ \cdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{X}$$

$$KW = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^m \int_{S_i} \frac{2(\sigma_{i-1}-\sigma_i)}{\sigma_{i-1}+\sigma_i} W_i(y) \frac{\partial}{\partial n_y}\Gamma(\cdot - y)dS_y \\ \cdots \\ \sum_{i=1}^m \int_{S_i} \frac{2(\sigma_{i-1}-\sigma_i)}{\sigma_{i-1}+\sigma_i} W_i(y) \frac{\partial}{\partial n_y}\Gamma(\cdot - y)dS_y \end{pmatrix} \in \boldsymbol{X},$$

(5) は

$$\boldsymbol{W} + K\boldsymbol{W} = \boldsymbol{G} \qquad \text{in} \qquad \boldsymbol{X} \tag{6}$$

と書ける. 二重層ポテンシャルの性質から, 仮定の下で, $K : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}$ は compact. Riesz-Schauder の理論から, -1 が K の固有値でなければ (6) は一意可解となる.

まず, 実際に Regularity の高い解の存在を示そう.$C_0^\infty(R^3)$ を $\|\sigma(x)\nabla\cdot\|$ で完備化したものを $X = \dot{H}^1(R^3)$ とおく. Sobolev の不等式より $X \hookrightarrow L^6(R^3)$, $f \in C_K(R^3)$ を任意にとり, 0 拡張すれば, $f \in X'$ だから

$$|<f,\varphi>| \le \|\varphi\|_6\|f\|_{\frac{6}{5}} \le C\|\nabla\varphi\|_2\|f\|_{\frac{6}{5}}. \qquad (\forall\varphi \in X)$$

が成り立つ.Riesz の表現定理より、$\sigma(x)$ に対する仮定の下で

$$\exists^1 V \in X, \ \int_{R^3} \sigma(x)\nabla V\cdot\nabla\varphi dx = <\varphi, f> \quad (\forall\varphi \in X) \tag{7}$$

が成り立つ. De Giorgi-Nash-Moser type の Elliptic regulariy(Gilbarg-Trudinger[5]p.202) より $V(x)$ は R^3 上局所 Hölder 連続である.

(4) と同様に

$$\sigma(x)V(x) = \int_{R^3} f(y)\Gamma(x-y)dy - \sum_{i=1}^m(\sigma_{i-1}-\sigma_i)\int_{S_i} V(y)\frac{\partial}{\partial n_y}\Gamma(x-y)dS_y \quad (x \in R^3 \setminus S)$$

(5) と対応して

$$\frac{\sigma_i+\sigma_{i-1}}{2}V(\xi) = \int_{R^3} f(y)\Gamma(\xi-y)dy - \sum_{i=1}^m(\sigma_{i-1}-\sigma_i)\int_{S_i} V(y)\frac{\partial}{\partial n_y}\Gamma(\xi-y)dS_y$$

$$(\xi \in S_i, \ i = 1, 2, \cdots, m)$$

が成立. 特に

$$\boldsymbol{G} = \begin{pmatrix} \int_{\Omega_0} f(y)\Gamma(\cdot - y)dy \\ \cdots \\ \int_{\Omega_0} f(y)\Gamma(\cdot - y)dy \end{pmatrix} \in \boldsymbol{X} \text{ に対して (6) は解}\boldsymbol{W}\text{を持つ.}$$

最後に, -1 が K の固有値でないことを示そう.

Riesz-Schauder の理論から, -1 が K の固有値であるとすると、双対問題の固有関数 $\boldsymbol{\Phi}$ に対して, $< G, \boldsymbol{\Phi} >= 0$, すなわち

$$\exists \varphi_i \in C(S_i)(1 \le i \le m),\ (\varphi_i \not\equiv 0,\ 1 \le \exists i \le m),$$

があって次を満たす

$$\sum_{i=1}^{m} \int_{S_i} (\int_{R^3} f(y)\Gamma(\xi - y)dy \cdot \varphi_i(\xi))dS_\xi = 0 \text{ for } \forall f \in C_K(R^3)$$

$$= \int_{R^3} (\sum_{i=1}^{m} \int_{S_i} (\Gamma(\xi - y)\varphi_i(\xi))dS_\xi) f(y)dy.$$

f の任意性より

$$I(y) = \sum_{i=1}^{m} \int_{S_i} \Gamma(\xi - y)\varphi_i(\xi)dS_\xi = 0(y \in R^3 \backslash S)$$

がなりたつ. 一重層ポテンシャルの性質 (Garabedion[3]) から各 S_i 上

$$0 = \left[\frac{\partial I}{\partial n}\right]_{-}^{+} = -\varphi_i$$

が成り立ち, $\varphi_1 = \varphi_2 = \cdots = \varphi_m = 0$ となり矛盾. 故に, -1 は $\boldsymbol{K}$ の固有値ではない. ／

3　反復列の収束

この節では, $\nabla \cdot \boldsymbol{J}^p \in L^2(\Omega_0)$ のとき、二層モデルにおいて (5) に対する反復列

$$\frac{\sigma_1 + \sigma_0}{2} V_{n+1}(\xi) = -\int_{\Omega_0} \nabla \cdot \boldsymbol{J}^p(y)\Gamma(\xi - y)dS_y - (\sigma_0 - \sigma_1)\int_{S_1} V_n(y)\frac{\partial}{\partial_{n_y}}\Gamma(\xi - y)dS_y \quad (8)$$

$n = 0, 1, 2, \cdots$ は常に指数的な速さで解に収束することを示そう.

以下 $\Omega = \Omega_0,\ S_1 = \partial\Omega$ とおく.

$$\Delta V = 0 \quad \text{in} \quad \Omega, \qquad\qquad V = f \quad \text{on} \quad \partial\Omega \quad (9)$$

において

$$V(x) = \int_{\partial\Omega} (-V(y)\frac{\partial}{\partial n_y}\Gamma(x - y) + \frac{\partial}{\partial n_y}V(y) \cdot \Gamma(x - y))dS_y . (x \in \Omega)$$

二重層ポテンシャルの性質から

$$\frac{1}{2}f(\xi) + \int_{\partial\Omega} f(y)\frac{\partial}{\partial n_y}\Gamma(\xi - y)dS_y = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial n_y}V(y)\Gamma(\xi - y)dS_y \quad (\xi \in \partial\Omega) \tag{10}$$

ここで右辺は一重層ポテンシャル. 積分は主値 (P.V.) をとる.
Nedelec-Planchard[6](1973), Okamoto[7](1988) より

$$(\mathcal{P}g)(\xi) = \int_{\partial\Omega} g(\xi)\Gamma(\xi - y)dS_y \text{ は } H^{-1/2}(\partial\Omega) \to H^{-1/2}(\partial\Omega) \text{ 同型}$$

$L^2(\partial\Omega)$ 内で有界な自己共役作用素を実現.
特に Okamoto より

$$< \varphi, T_f >= \int_{\partial\Omega} f\varphi dS \quad (\varphi \in \mathcal{E}(R^3))$$

で定まる compact 台をもつ R^3 上の超関数 T_f, T_g のフーリエ変換を用いて

$$A(f,g) = \int_{\partial\Omega}\int_{\partial\Omega} g(\xi)f(x)\Gamma(\xi - \eta)d\xi d\eta \text{ は}$$

$$A(f,g) = \int_{R^3} \frac{1}{|\xi|^2}\hat{T}_f(\xi)\hat{T}_g(\xi)d\xi$$

と表される。Okamoto と同様にして

$$|\hat{T}_f(\xi) - \hat{T}_f(0)| \le C\|e^{ix\cdot\xi} - 1\|_{H_x^{5/2}(\partial\Omega)} \cdot \|f\|_{H_x^{-5/2}(\partial\Omega)}$$

$$\le C|\xi|\|f\|_{H_x^{-5/2}(\partial\Omega)}$$

$$|\hat{T}_f(0)| = const| < 1, T_f > | \le C\|f\|_{H_x^{-5/2}(\partial\Omega)}.$$

$$\int_{|\xi|\le 1} \frac{d\xi}{|\xi|^2} < +\infty \text{ より}$$

$$\int_{|\xi|\le 1} \frac{1}{|\xi|^2}|\hat{T}_f(\xi)\hat{T}_g(\xi)|d\xi \le C\|f\|_{H^{-5/2}(\partial\Omega)}\|g\|_{H^{1/2}(\Omega)}. \tag{11}$$

一方

$$\int_{|\xi|\ge 1} \frac{1}{|\xi|^2}|\hat{T}_f(\xi)\hat{T}_g(\xi)|d\xi \le 2\int_{R^3} \frac{1}{1 + |\xi|^2}|\hat{T}_f(\xi)\hat{T}_g(\xi)|d\xi$$

$$\le 2\left(\int_{R^3} \frac{|\hat{T}_f(\xi)|^2}{(1 + |\xi|^2)^3}d\xi\right)^{1/2}\left(\int_{R^3}(1 + |\xi|^2)|\hat{T}_g(\xi)|^2 d\xi\right)^{1/2}$$

$$= 2\|T_f\|_{H^{-3}(R^3)}\|T_g\|_{H^1(R^3)}. \tag{12}$$

$$H^1(R^3) \cong H^{-1}(R^3)' \text{ を考慮して}$$

$$\|T_g\|_{H^1(R^3)} = \sup(|<\varphi, T_g>| \,|\, \|\varphi\|_{H^{-1}(R^3)} \leq 1)$$

$$= \sup(|<\varphi, T_g>| \,|\, \varphi \in D(R^3),\ \|\varphi\|_{H^{-1}(R^3)} \leq 1)$$

$$= \sup(|<T_\varphi, g>| \,|\, \varphi \in D(R^3),\ \|\varphi\|_{H^{-1}(R^3)} \leq 1). \tag{13}$$

が成り立っている. 一方, 次が知られており

$$\|T_\varphi\|_{H^{-1}(R^3)} \approx \|\varphi\|_{H^{-1/2}(\partial\Omega)} \quad \text{(Okamoto[7])}$$

これより

$$\|T_g\|_{H^1(R^3)} \approx \sup(|<g,\ T_\varphi>| \,|\, \varphi \in D(R^3),\ \|\varphi\|_{H^{-1/2}(R^3)} \leq 1)$$

$$= \|g\|_{H^{1/2}(R^3)}. \tag{14}$$

がいえる.　一方

$$\|T_f\|_{H^{-3}(R^3)} = \sup(|<\varphi,\ T_f>| \,|\, \varphi \in H^3(R^3),\ \|\varphi\|_{H^3(R^3)} \leq 1)$$

$$\approx \sup(|<\varphi,\ T_f>| \,|\, \varphi \in H^{5/2}(\partial\Omega),\ \|\varphi\|_{H^{5/2}(\partial\Omega)} \leq 1)$$

$$= \|f\|_{H^{-5/2}(\partial\Omega)}. \tag{15}$$

だから , (11)-(15) より

$$|A(f,g)| \leq C\|f\|_{H^{-5/2}(\partial\Omega)} \cdot \|g\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}$$

が言え, よって

$$\mathcal{P} : H^{1/2}(\partial\Omega) \to H^{5/2}(\partial\Omega)$$

有界とみなされる。ここで (9) において

$$f \in H^{3/2}(\partial\Omega) \Rightarrow \exists \tilde{f} \in H^2(\Omega),\ \tilde{f}|_{\partial\Omega} = f$$

だから, elliptic regurality より

$$V \in H^2(\Omega),\ \frac{\partial V}{\partial n} \in H^{1/2}(\partial\Omega)$$

が言え, (10) より

$$\frac{1}{2}I + K : H^{3/2}(\partial\Omega) \to H^{5/2}(\partial\Omega)$$

が有界となる. 特に, $K : H^{3/2}(\partial\Omega) \to H^{3/2}(\partial\Omega)$ とみなせて, J^p に対する仮定のもとで, (8) は $H^{3/2}(\partial\Omega)$ における反復列となる. このとき, 次の結果を得る.

Theorem 2. $\sigma_p(K) \subset [-1/2,\ 1/2)$.

このことより Spectre 半径の性質から

$$T = -\frac{2}{\sigma_1 + \sigma_0}(\sigma_0 - \sigma_1)K \text{ に対し, } \limsup_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n} = \frac{|\sigma_0 - \sigma_1|}{\sigma_0 + \sigma_1} < 1, \tag{16}$$

$(1-T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n$ が norm 収束し, Scheme(8) は指数的に収束する.

定理の証明の前に, まず 次のことに注意する.
i)$-\frac{1}{2} \in \sigma_p(K)$ であるのは

$$-\Delta v = 0 \qquad \text{in} \quad \Omega, \qquad \frac{\partial v}{\partial n} = g \qquad \text{on} \quad \partial\Omega$$

に対する公式 (10) より

$$\frac{1}{2}v(\xi) + \int_{\partial\Omega} v(\xi)\frac{\partial\Gamma}{\partial n_y}(\xi - y)dS_y = \int_{\partial\Omega} g(\xi)\Gamma(\xi - y)dS_y. \quad (\xi \in \partial\Omega) \tag{17}$$

$v \equiv 1$ に対して $g \equiv 0$ が成り立つことからわかる.

ii) $\frac{1}{2} \notin \sigma_p(K)$ であるのは古典的な Fredholm の理論. 実際 (9) において

$$V(x) = -2\int_{\partial\Omega} \mu(y)\frac{\partial}{\partial n_y}\Gamma(x - y)dS_y, \quad (x \in \Omega)$$

$$\mu - 2K\mu = f, \qquad \text{on} \quad \partial\Omega \tag{18}$$

が成立. 2 重層ポテンシャルの性質より $f = 0 \Rightarrow \mu = 0$ がいえる. これより $\frac{1}{2}$ は K の固有値ではない。

Proof of Theorem2
最初に K の固有値が実数であることに注意する. 実際

$$\Delta v = 0 \quad \text{in} \quad \Omega, \qquad v = f \quad \text{in} \quad \partial\Omega$$

$$\Delta w = 0 \quad \text{in} \quad \Omega, \qquad w = g \quad \text{on} \quad \partial\Omega$$

とすると

$$\int_{\partial\Omega} (\frac{\partial v}{\partial n} g - f \frac{\partial w}{\partial n}) dS = 0 \tag{19}$$

(10) より

$$\frac{\partial v}{\partial n} = \mathcal{P}^{-1}(\frac{f}{2} + Kf)$$

同様に

$$\frac{\partial w}{\partial n} = \mathcal{P}^{-1}(\frac{g}{2} + Kg)$$

だから, (19) より

$$(\mathcal{P}^{-1}(\frac{f}{2} + Kf),\ g) = (f,\ (\mathcal{P}^{-1}(\frac{I}{2} + K))^* g) = (f, \mathcal{P}^{-1}(\frac{g}{2} + Kg))$$

が成り立つ. f と g の任意性より

$$(\mathcal{P}^{-1}(\frac{I}{2} + K))^* = \mathcal{P}^{-1}(\frac{I}{2} + K)(* \cdots L^2 adjoint) \tag{20}$$

を得る. 次に, $\mu \in C$ を $\frac{I}{2} + K$ の固有値、$f \neq 0$ を固有関数とすると

$$\mathcal{P}^{-1}(\frac{I}{2} + K)f = \mu \mathcal{P}^{-1} f \tag{21}$$

がいえ, (20) より

$$(\mathcal{P}^{-1}(\frac{I}{2} + K)f, f) = (f, \mathcal{P}^{-1}(\frac{I}{2} + K)f)$$

が成り立つから, (21) より

$$\mu \|\mathcal{P}^{-1/2} f\|^2 = \bar{\mu} \|\mathcal{P}^{-1/2} f\|^2,$$

がいえ, $\mu = \bar{\mu}$ がいえる.

次ぎに (5) にもどって Theorem 1 の証明を再現すれば $\sigma_0, \sigma_1 > 0,\ \sigma_0 \neq \sigma_1$ に対し

$$2^{-1} \frac{\sigma_0 + \sigma_1}{\sigma_0 - \sigma_1} \notin \sigma_p(K).$$

このような σ_0, σ_1 の任意性から

$$\sigma_p(K) \cap (-\infty, -2^{-1}) = \emptyset, \quad \sigma_p(K) \cap (2^{-1}, \infty) = \emptyset$$

がわかる. 故に, Theorem 2 の結果を得る. ／

注意 1. 3 層以上の場合には常に反復列

$$\frac{\sigma_i + \sigma_{i-1}}{2} V_{n+1}(\xi) = -\int_{R^3} \nabla \cdot J^p(y) \Gamma(\xi - y) dy - \sum_{i=1}^{m} (\sigma_{i-1} - \sigma_i) \int_{S_i} V_n(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \Gamma(\xi - y) dS_y$$

$$(\xi \in S_i, \ i = 1, 2, \cdots)$$

が収束する保証はないが, $|\sigma_{i-1} - \sigma_i| \ll 1$ のときは可能である.

2. $\sigma_{m+1} = 0$ の場合は (3) を $i = 1, \cdots, m$ で成り立たせ, $V = 0$ on $\partial\Omega_m$ となる $V(x)$ を求める問題が現れ, $X = H_0^1(\Omega_m)$, $f = -\nabla \cdot J^p$ に対する (7) に定式化できる。

3. Stampacchia 評価 (1965) より Theorem 1 に対する仮定のもとで真の解 $V \in W^{1,q}(\Omega_0)$ $(q > 3)$ となるので accute type の分割に基づく有限要素近似 $V_h(x)$ は $V(x)$ に一様収束する。(Ciarlet-Rariart 1973)

4. 解のフーリエ級数による近似計算について

この節では, m 層の場合について Theorem 1 の証明の中で得られた $\dot{H}^1(R^3)$ に属する解についてのフーリエ級数近似を考える.

i) Bounded domain

Ω を bounded domain とする.$C_0^\infty(\Omega)$ を $\|\sigma(x)\nabla \cdot\|$ で完備化した空間を $Y(\Omega) = \dot{H}^1(\Omega)$ とおく. ポアンカレの不等式より次が成り立つ.

$$|<\varphi, f>| \le \|f\|\|\varphi\| \le C\|f\|\|\sigma(x)\nabla\varphi\|, \text{ for } \varphi \in Y(\Omega).$$

$Y(\Omega)$ の内積を $\mathcal{A}(u,v) = \int_\Omega \sigma(x) \nabla u \cdot \nabla v dx$ と置く. Riesz の表現定理より, $\exists 1 V(x) \in Y(\Omega)$ を得る.

$$\text{(s.t.)} \int_\Omega \sigma(x) \nabla V \cdot \nabla \varphi dx = <\varphi, f>, \quad \text{for } \forall \varphi \in Y(\Omega).$$

Cubic domain:$\Omega' = [x_0, \ x_1] \times [y_0, \ y_1] \times [z_0, \ z_1]$, $x_i, \ y_i \ and \ z_i \in R$, $i = 0, 1$, を考える. 特に $\Omega' \supset \Omega$, $diam(\Omega') < 2\pi a$ なるものを考える. V の Ω' での拡張 $\tilde{V} \in H_0^1(\Omega')$ を考える. $\tilde{V}$ は Ω' で多重フーリエ級数展開（溝畑 [12]）でき

$$\tilde{V} = \sum_{\alpha \in z^n} C_\alpha e^{ia^{-1}\alpha \cdot x}, \ C_\alpha = (2\pi a)^{-n} (V, e^{ia^{-1}\alpha \cdot x}), \ \alpha \in (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in Z^n.$$

$$\|\tilde{V}\|^2_{H^1_0(\Omega')} = \sum_{|\nu|\le 1} \|D^\nu \tilde{V}\|^2_{L^2(\Omega')}$$
$$= (2\pi a)^{-n} \sum_{\alpha\in Z^n} (\sum_{|\nu|\le 1} (a^{-1}\alpha)^{2\nu})|C_\alpha|^2.$$

と展開される. 故に $B = \{e^{ia^{-1}\alpha\cdot x} | a \in \boldsymbol{N},\ \alpha \in (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in Z^n\}$ は $Y(\Omega)$ の基底であり $B = \{v_1, v_2, \cdots\}$ とおく. これを $Y(\Omega)$ において正規直交化したものを $\{v'_1, \cdots, v'_n\}$ とおく. このとき次のように書ける.

$$\begin{pmatrix} v'_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ v'_N \end{pmatrix} = S_N \begin{pmatrix} v_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ v_N \end{pmatrix},\ S_N = (s_{ij})_{i,j=1,\ldots,N}.$$

一方

$$V^{(N)} = \sum_{k=1}^{N} \mathcal{A}(V,\ v'_k)v'_k$$

は

$$= (\mathcal{A}(V, v_1), \cdots, \mathcal{A}(V, v_N))K_N^{-1} \begin{pmatrix} v_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ v_N \end{pmatrix},$$

$$K_N = (\mathcal{A}(v_j, v_k))_{j,k=1,\ldots,N}$$

と書くことができる. 表現定理より

$$\mathcal{A}(V, v_k) =< f,\ v_k >$$

が言え,

$$V^{(N)} = (< f, v_1 >, \cdots, < f, v_N >)K_N^{-1} \begin{pmatrix} v_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ v_N \end{pmatrix} \to V \text{ in } Y(\Omega) \text{ as } N \to \infty$$

となる.

ii) **Unbounded domain**

Ω_a を bounded domain とし, $\Omega_a \supset \Omega_m$, $\Omega_a \to R^3$ as $a \to \infty$ とする. i) において Ω のかわりに Ω_a に対して同様の議論を行い、その解を V_a とおこう。$Y(\Omega_a)$ の内積を $\mathcal{A}(u, v)_a = \int_{\Omega_a} \sigma(x)\nabla u \cdot \nabla v dx$, と置く. V と V_a は Riesz の表現定理より次を満たしている.

$$\int_{R^3} \sigma(x)\nabla V \cdot \nabla\varphi dx =< \varphi, f > \quad \text{for } \forall\varphi \in Y = \dot{H}(R^3),$$

$$\int_{\Omega_a} \sigma(x)\nabla V_a \cdot \nabla\varphi dx = <\varphi, f> \quad \text{for } \forall\varphi \in Y(\Omega_a).$$

故に

$$\mathcal{A}(V|_{\Omega_a} - V_a,\ V|_{\Omega_a} - V_a)_a \le \inf_{v\in Y(\Omega_a)} \mathcal{A}(v - V|_{\Omega_a}, v - V|_{\Omega_a})_a.$$

$Y(\Omega_a)$ は Y で稠密であるから

$$\inf_{v\in Y(\Omega_a)} \mathcal{A}(v - V|_{\Omega_a}, v - V|_{\Omega_a})_a \to 0 \text{ as } a \to \infty.$$

故に, この意味で V_a は V の近似解である. すなわち, 十分おおきな a に対し V_a を $i)$ のフーリエ展開をすることで V の近似計算を得る.

Theorem 3. $\mathcal{A}(V_a - V|_{\Omega_a}, V_a - V|_{\Omega_a})_a \to 0 \quad$ *as* $a \to \infty$.

注意 4. 注意2の場合は, i) の議論をそのまま適用することで解 V がフーリエ級数によって構成できることを示している. また, この節の議論は藤田-斉藤-鈴木 [11], Elliptic boundary value problems と Ritz-Galerkin method の節の方法に沿ってなされる.

References

1. Brezis, H., Analyse Fonctionnelle-Théory et Application, Masson, Paris, 1983.
2. Ciarlet, P.G., Raviart, P.-A., Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., 2(1973) 17-31.
3. Garabedian, P.R., Partial Differential Equations, Chelsea, New York, 1964.
4. Geselowitz, D.B., Biophys. J. 7(1967)1-11.
5. Gilbarg, D., Trudinger, N.S., Elliptic Partial Differential Equations of Second order, Springer, Berlin, 1983.
6. Nedelec, J.C., Planchard, J., PAIRO, R-3(1973)105-129.
7. Okamoto, H., J.Fac. Sci. Uni. Tokyo, Sec. IA 35(1988)345-362.
8. Schlitt, H.A., Heller, L., Aaron, R., Best, E., Ranken, D.M., IEEE Trans. Biom. Eng., 42(1995)52-58.
9. Stampacchia, G., Le problém de Dirichlet pour les équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus, Ann. Inst. Fourier **15**(1965), 189-258.
10. 鈴木 貴, 渡辺一雄, 下川原正博, 脳磁図分析 (MEG) の現況と数学解析, 大阪大学 Research Report in Math., 2000.
11. Fujita, H., Saito, N., Suzuki, T., Operator Theory and Numerical Methods, 近刊.
12. 溝畑 茂, 偏微分方程式論, 岩波書店, 東京, 1970.