

A modular invariance of intertwining operators

宮本雅彦

筑波大学数学系

1 序文

頂点作用素代数の研究集会なので、頂点作用素代数に関する用語を定義なしに使っていきます。ここでは、頂点作用素代数の加群の加群への作用（交絡作用素）がモジュラー不変性を示すことを紹介します。応用として、頂点作用素代数の交絡作用素のトレイス関数として有理数ウエイトのモジュラー形式を構成したり、トレイス関数を正確に求めたりすることができます。例えば、極小不連続系列と呼ばれる頂点作用素代数のある加群の交絡作用素のトレイス関数が、丁度デデキントのエータ関数の有理数ベキであることを示します。

頂点作用素代数のモジュラー不変性の最初の重要な結果はツーの定理です。これは頂点作用素代数の持つモジュラー不変性の典型的な例なので、この説明から始めます。

$V = \bigoplus_{n=0}^{\infty} V_n$ を中心電荷 c の有理型頂点作用素代数とします。 V は Zhu が導入した 2 番目の次数

$$V = \bigoplus_{n=0}^{\infty} V_{[n]}$$

を持ちます。（§2.1 参照）

既約加群 $(W, Y^W(*, z))$ に対して、 $v \in V_n$ の元に対する加群への頂点作用素 $Y^W(v, z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} v^W(m) z^{-m-1}$ のトレイス関数を次のように定義します。 $o(v) := v^W(n-1)$ は次数を保つ作用素なので、これを使って、

$$S_W(v, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} (\text{tr}_{|W_{r+n}} o(v)) e^{2\pi\sqrt{-1}\tau(r+n-c/24)}$$

と定義します。ここで、 $W = \bigoplus_{m=0}^{\infty} W_{r+m}$ は次数作用素 $L(0)$ に関する分割で、 r は最小次数です。このトレイス関数を線形に拡張して、 V のすべての元に対して定義します。ここで、 c は中心電荷であり、 q は $e^{2\pi i\tau}$ を表します。この関数は上半平面 $\{\tau \in \mathbb{C} | \text{Im}\tau > 0\}$ において正則となることが分かります。

このトレイス関数に対してモジュラー群 $SL(2, \mathbb{Z})$ の作用を次のように定義します。

$\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z})$ と [ウエイト] k の V の元 $v \in V_{[k]}$ に対して、

$$\sigma(S(v, \tau)) = \frac{1}{(c\tau + d)^k} S\left(v, \frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right)$$

とおき、線形に拡張します。

仮定から、 V は有理型なので、既約加群は有限個しかありませんが、各既約 V -加群 W^1, \dots, W^m に対してトレイス関数 $S^{W^i}(v, \tau)$ がそれぞれ定義できます。ツーの定理は頂点作用素代数が有理型であり、ある有限条件 (C_2 -条件) を満足するならば、モジュラー群 $SL(2, \mathbb{Z})$ の任意の元 σ に対して、トレイス関数の σ による像はトレイス関数達の線形結合であることを示しています。

すなわち、 $v \in V$ の取りかたに依存しない複素数 λ_{ij} があって、

$$\sigma(S^{W^i}(v, \tau)) = \sum_{j=1}^m \lambda_{ij} S^{W^j}(v, \tau)$$

であり、トレイス関数の組

$${}^t(S_1(v, \tau), \dots, S_k(v, \tau))$$

を考えると、 $[\text{wt}]v = k$ なら、これがウエイト k のベクトル型モジュラー形式となることを証明しています。

歴史的に、このような現象はあるアフィンリー代数に対して観察されていたのですが、これは、頂点作用素代数の本質的な性質です。例えば、上のリー代数はすべて頂点作用素代数となります。しかも、頂点作用素代数の中には、ムーンシャイン頂点作用素代数のように、既約加群がただ一つしか持たないものがあるので、このような場合には、トレイス関数が（線形表現付き）モジュラー形式となっていることを示しています。

この理論はドン、リー、メイソン達によって、自己同型付きのトレイスを考えるオービフォールド模型に拡張されています [DLM]。私もこの理論を頂点作用素代数のテータ関数や多変数型のトレイス関数に拡張しています。

この講演の目的は、このツーの定理を拡張し、有理数ウエイトを持つモジュラー形式を頂点作用素代数の加群の間の交絡作用素によるトレイス関数として構成することです。

では、主定理を述べておきましょう。

主定理

V を $C_{[2,0]}$ -条件 (§2.2) を満足する有理型頂点作用素代数とし、 U を既約 V -加群とする。 $\{W^1, \dots, W^k\}$ を既約 V -加群の集合とし、 $I^{ij}(*, z)$ を一次独立なタイプ $\begin{pmatrix} W^i \\ U W^j \end{pmatrix}$ の交絡作

用素全体とします。この時、 $u \in U_{[r]}$ に対して、 $(S_{I^{ij}}(u, \tau))$ はウエイト r のベクトル型モジュラー形式となる。

この定理の応用としては、頂点作用素代数の加群の場合には、既約加群が一つしかない頂点作用素代数（ホロモルフィック頂点作用素代数）は例外的（例えば8の倍数の中心電荷に対してしか存在しない）ですが、交絡作用素の空間が一次元のもものが一つしかないことはかなりの割合で起こります。すなわち、加群 U の場合には、ほとんどの加群 W に対してタイプ $\binom{W}{U}$ の交絡作用素が存在しないのです。それ故、ベクトル型のモジュラー形式としても、項の少ないベクトル型になるものが多いわけです。特に、そのような交絡作用素の空間が一次元となる場合には、有理数ウエイトのモジュラー形式が出てきて、トレイス関数そのものを決定してくれることが期待できるわけです。このような例を最後に載せてあります。

2 準備

結果を述べる前に、必要な準備をします。この原稿を通して、 $(V, Y, \mathbf{1}, \omega)$ は中心電荷 c の有理型の頂点作用素代数とし、 W, U で常に V -加群を表すとします。

2.1 2番目のウエイト

ツーは頂点作用素代数を変形して、頂点作用素代数 $(V, Y, \mathbf{1}, \omega)$ の中に2番目の頂点作用素代数構造 $(V, Y[\cdot], \mathbf{1}, \tilde{\omega})$ を導入しました。ここで、 $Y[a, z]$ は斉次元 $a \in V_{\text{wt}(a)}$ に対して

$$Y[a, z] = Y(a, e^z - 1)e^{z\text{wt}(a)} \in \text{End}(V)[[z, z^{-1}]]$$

で定義します。真空は同じですが、2番目のヴィラソロ元 $\tilde{\omega}$ は $\omega - \frac{c}{24}\mathbf{1}$ で定義します。2番目のヴィラソロ元の2番目の頂点作用素の係数を次のように展開しておきます。

$$Y[\tilde{\omega}, z] = \sum_{n \in \mathbb{Z}} L(n)z^{-n-2}$$

この展開を使って、 V に新しい次数つけを入れることができます。

$$V_{[n]} = \{v \in V \mid L[0]v = nv\}$$

重要な性質の一つとして、

$$\begin{aligned} v[0] &= \sum_{i=0}^{\infty} \binom{\text{wt}(v)-1}{i} v(i) \\ [o(v), o(u)] &= o(v[0]u). \end{aligned}$$

が成り立ちます。

2.2 有限条件

モジュラー不変性の証明に使う C_2 -条件と呼ばれる有限条件の説明をしましょう。

定義 2.1 V -加群 U に対して、 U の部分加群 $C_2(U)$ を $\{a(-2)u : a \in V, u \in U\}$ 達で張られた部分空間とします。この部分空間による剰余空間 $U/C_2(U)$ が有限次元であるとき、 U は C_2 -条件を満たすと言います。

また、 $C_{[2,0]}$ を $C_2(U)$ と $\{a[0]u : a \in V, u \in U\}$ で張られた部分空間とします。この空間による剰余空間 $U/C_{[2,0]}(U)$ が有限次元であるとき、 U は $C_{[2,0]}$ -条件を満たすと言います。

$C_2(U)$ -条件を満たせば、容易に $C_{[2,0]}$ -条件を満たすことがわかります。

2.3 交絡作用素

次に、有理数ウエイトのモジュラー形式を得る為の交絡作用素を定義しておきましょう。

定義 2.2 $(W^1, Y^1), (W^2, Y^2), (W^3, Y^3)$ を V -加群とします。タイプ $(\begin{smallmatrix} W^3 \\ W^1 \\ W^2 \end{smallmatrix})$ の交絡作用素とは線形写像

$$\begin{aligned} W^1 &\rightarrow \text{Hom}(W^2, W^3)\{z\} \\ w_1 &\rightarrow I(w_1, z) = \sum_{r \in \mathbb{C}} w_1(r) z^{-r-1} \end{aligned}$$

で、

- (1) $I(w_1, z)$ は量子作用素と同じ性質を満たす。
 - (2) $L(-1)$ は微分として作用する。即ち $I(L(-1)w_1, z) = \frac{d}{dz} I(w_1, z)$
 - (3) 局所可換が成り立つ。 $(x-z)^N (Y^3(v, x)I(w_1, z) - I(w_1, z)Y^2(v, x)) = 0 \quad N \gg 0$
 - (4) 正規積と可換 $I(v^1(n)w_1, z) = Y(v, z) \cdot_n I(w_1, z)$
- という条件を満たすものです。

$I(\begin{smallmatrix} W^3 \\ W^1, W^2 \end{smallmatrix})$ でタイプ $(\begin{smallmatrix} W^3 \\ W^1, W^2 \end{smallmatrix})$ の交絡作用素全体のなすベクトル空間とし、その次元を $N_{W^1, W^2}^{W^3}$ で表します。この次元をフュージョン規則と呼びます。

$u \in U_r$ と交絡作用素 $I \in I(\begin{smallmatrix} W \\ U \\ W \end{smallmatrix})$ に対して $I(u, z) = \sum u^I(r) z^{-r-1}$ と展開すると、 $o^I(u) := u^I(\text{wt}(u) - 1)$ は次数を保つ作用となることが定義から出てきます。

2.4 トレイス関数

上の次数を保つ作用素 $o^I(u)$ を使ってトレイス関数を次のように定義します。

$$S_W^I(u, \tau) = \text{tr}_W o^I(u) \exp(2\pi\sqrt{-1}\tau(L(0) - c/24))$$

この関数は上半平面で正則であることがわかります。

2.5 ツー代数

$a \in V$ の $u \in U$ への作用を

$$\begin{aligned} a \cdot u &:= \operatorname{Res}_x \frac{(1+x)^{\operatorname{wt}(a)}}{x} Y(a, x)u \\ u * a &:= \operatorname{Res}_x \frac{(1+x)^{\operatorname{wt}(a)-1}}{x} Y(a, x)u. \end{aligned}$$

で定義し、

$$O(U) := \langle \operatorname{Res}_x \frac{(1+x)^{\operatorname{wt}(a)}}{x^2} Y(a, x)u, \rangle$$

とおきます。そうすると、 $A(V) := V/O(V)$ は積 \cdot を持つ結合代数であり、 $A(U) := U/O(U)$ は左作用 \cdot 、右作用 $*$ で両側 $A(V)$ -加群となります。

容易に、

$$a \cdot u - u * a = \operatorname{Res}_x (1+x)^{\operatorname{wt}(a)-1} Y(a, x)u = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{\operatorname{wt}(a)-1}{i} a_i u = a[0]u$$

が出てきます。

定理 2.3 (Zhu) W_0 を有限次元の $A(V)$ -加群とすると、 V -加群 W で、 W のトップ空間 $\{w \in W \mid v(\deg v - 1 - n)w = 0 \forall n > 0\}$ が W_0 と一致するものが存在する。

3 楕円関数

頂点作用素代数の計算で出てくるモジュラー形式を説明しておきましょう。

アイゼンシュタイン級数 $G_{2k}(\tau)$ ($k = 1, 2, \dots$) とは

$$\begin{aligned} G_{2k}(\tau) &= \sum_{(m,n) \neq (0,0)} \frac{1}{(m\tau + n)^{2k}} \text{ for } k \geq 2, \\ G_2(\tau) &= \frac{\pi^2}{3} + \sum_{m \in \mathbb{Z} - \{0\}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(m\tau + n)^2} \text{ for } k = 1 \end{aligned}$$

で与えられるものです。これらは q -展開

$$G_{2k}(\tau) = 2\xi(2k) + \frac{2(2\pi i)^{2k}}{(2k-1)!} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2k-1} q^n}{1-q^n}$$

を持っています。ここで、 $\xi(2k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}}$ 、 $q = e^{2\pi i \tau}$ です。この q -展開が頂点作用素代数の局所可換性と 2 番目のウエイトから出てくるといのが頂点作用素代数のモジュラー不変性のからくりです。

あまり本質的ではありませんが、表記の為に、アイゼンシュタイン級数を次のように正規化しておきます。これは 2 番目の頂点作用素代数構造を定義するときの定数の取り方だけに依存しており、その定数を変えるところちらも変化します。 $k \geq 2$ に対して、

$$E_k(\tau) = \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^k} G_k(\tau)$$

定義から、 $E_2(\tau)$ は次の変換公式を満たします

$$E_2\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = (c\tau + d)^2 E_2(\tau) - \frac{c(c\tau + d)}{2\pi\sqrt{-1}}$$

ここで、 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z})$ です。また、 $E_{2k}(\tau)$ はウエイト $2k$ ($k > 1$) のモジュラー形式です。

ツーは論文の中で、ワイアストラッセのペー関数を変形した次のような関数を導入しています。

$$P_k(z, q) = \frac{1}{(k-1)!} \sum_{n \neq 0} \frac{n^{k-1} z^n}{1 - q^n}$$

ここで、 $\frac{1}{1-q^n} = \sum_{i=0}^{\infty} q^{ni}$ 、 $\frac{1}{1-q^{-n}} = -q^n \frac{1}{1-q^n}$ ($n > 0$) です。 $P_k(z, q)$ は領域 $\{(z, q) \mid |q| < |z| < 1\}$ の任意の閉集合の中で絶対一様収束しています。

3.1 $E_k(\tau)$ と $P_k(z, q)$ の関係

一般に、 $a \in V, u \in U$ の取りかたに依存しない係数 c_i があって、 $a[-1]u = \sum_{i \geq -1} c_i a(i)u$ と展開できます。この係数を使って、

$$\begin{aligned} & \sum_{i \geq -1} c_i \operatorname{Res}_w ((w-z)^i z^{n-i} w^{-\operatorname{wt}(a)} P_m\left(\frac{z}{w}, q\right) \\ & - \sum_{i \geq -1} c_i \operatorname{Res}_w ((-z+w)^i z^{n-i} w^{-\operatorname{wt}(a)} P_m\left(\frac{zq}{w}, q\right) \\ & = E_m(\tau). \end{aligned}$$

が成り立ちます。

4 トレイス関数の性質

W を V -加群とし、任意の $I(*, z) \in I(U \overset{W}{W})$ に対して、

$$F_W^I : (V, \mathcal{H}) \otimes \dots \otimes (U, \mathcal{H}) \otimes \dots (V, \mathcal{H}) \rightarrow \mathbb{C}$$

$$\begin{aligned}
& F_W^I((a_1, z_1), \dots, (u, z_i), \dots, (a_n, z_n)) \\
&= z_1^{\text{wt}(a_1)} \dots z_n^{\text{wt}(a_n)} \text{tr}_{|W} Y^W(a_1, z_1) \dots I(u, z_i) \dots Y^W(a_n, z_n) q^{L(0)}
\end{aligned}$$

によって定義します。ここで、 $a_j \in V, u \in U$ です。例えば、 $F^I((u, z), \tau) = \text{tr}_{|W} o^I(u) q^{L(0)}$ であり、これは z に依存していません。

命題 4.1 任意の $a \in V, u \in U$ に対して、

$$F^I((a[0]u, z), q) = \text{tr}_{|W} o(a[0]u) q^{L(0)} = 0.$$

が成り立つ。

証明が簡単なので、示します。

[Proof]

$$\begin{aligned}
0 &= \text{tr}_{|W} (o(a)I(u, z)q^{L(0)} - I(u, z)q^{L(0)}o(a)) = \text{tr}_{|W} [o(a), I(u, z)]q^{L(0)} \\
&= \text{tr}_{|W} \sum_{i=0}^{\infty} \binom{\text{wt}(a)-1}{i} z^{\text{wt}(a)-1-i} I(a(i)u, z) q^{L(0)} = z^{-\text{wt}(a)} F^I((a[0]u, z), q)
\end{aligned}$$

次に、頂点作用素代数のトレイス関数から P -関数が出てくる事実をみてみましょう。

命題 4.2

$$\begin{aligned}
& F^I((a, x), (u, z), q) \\
&= z^{-\text{wt}(u)} \text{tr}_{|W} o(a) o^I(u) q^{L(0)} + \sum_{m \in \mathbb{N}} P_{m+1}(z/x, q) o^I(a[m]u) q^{L(0)} \\
& F^I((u, z), (a, x), q) \\
&= z^{-\text{wt}(u)} \text{tr}_{|W} o(a) o^I(u) q^{L(0)} + \sum_{m \in \mathbb{N}} (P_{m+1}(zq/x, q) - \delta_{m,0}) o^I(a[m]u) q^{L(0)}
\end{aligned}$$

[Proof] $k \neq 0$ に対して、 $o_k(a) = a(\text{wt}(a) - 1 + k)$ とおきます。

$$\begin{aligned}
& \text{tr}_{|W} o_k(a) I(u, z) q^{L(0)} \\
&= \text{tr}_{|W} [o_k(a), I(u, z)] q^{L(0)} + \text{tr}_{|W} I(u, z) o_k(a) q^{L(0)} \\
&= \sum_{i \in \mathbb{N}} \binom{n+k}{i} z^{n+k-i} \text{tr}_{|W} I(a(i)u, z) q^{L(0)} + \text{tr}_{|W} I(u, z) q^{L(0)} o_k(a) q^k \\
&= \sum_{i \in \mathbb{N}} \binom{n+k}{i} z^{n+k-i} \text{tr}_{|W} I(a(i)u, z) q^{L(0)} + \text{tr}_{|W} o_k(a) I(u, z) q^{L(0)} q^k
\end{aligned}$$

$\text{tr}_{|W} o_k(a) I(u, z) q^{L(0)}$ に関して解くと、

$$\text{tr}_{|W} o_k(a) I(u, z) q^{L(0)} = \frac{1}{1 - q^k} \sum_{i \in \mathbb{N}} \binom{n+k}{i} z^{n+k-i} \text{tr}_{|W} I(a(i)u, z) q^{L(0)}$$

を得ます。これを使って、

$$\begin{aligned}
& F^I((a, x), (u, z), q) \\
&= z^{\text{wt}(u)} \text{tr}_{|W} o(a) I(u, z) q^{L(0)} + z^{\text{wt}(u)} \sum_{k \neq 0} x^{-k} \text{tr}_{|W} o_k(a) I(u, z) q^{L(0)} \\
&= z^{\text{wt}(u)} \text{tr}_{|W} o(a) I(u, z) q^{L(0)} \\
&+ z^{\text{wt}(u)} \sum_{k \neq 0} x^{-k} \frac{1}{1-q^k} \sum_{j \in \mathbb{N}} \binom{\text{wt}(a)_i - 1 + k}{i} z^{\text{wt}(a) - 1 + k - i} \text{tr}_{|W} I(a(i)u, z) q^{L(0)} \\
&= z^{\text{wt}(u)} \text{tr}_{|W} o(a) I(u, z) q^{L(0)} + \sum_{i \in \mathbb{N}} \sum_{k=1}^{\infty} \binom{\text{wt}(a)_i - 1 + k}{i} \frac{1}{1-q^k} \left(\frac{z}{x}\right)^k \\
&+ \binom{\text{wt}(a)_i - 1 - k}{i} \frac{1}{1-q^{-k}} \left(\frac{z}{x}\right)^{-k} F^I((a(i)u, z), q) \\
&= \text{tr}_{|W} o(a) o^I(u) q^{L(0)} + \sum_{m \in \mathbb{N}} \frac{P_{m+1}(z/x, q)}{(2\pi\sqrt{-1})^{m+1}} o^I(a[m]u) q^{L(0)}
\end{aligned}$$

が出てきます。 ■

非常に重要な結果として、次の結果が上の命題と正規積の定義より出てきます。これにより、トレイス関数とアイゼンシュタイン級数が結び付きます。

命題 4.3

$$\begin{aligned}
& \text{tr}_{|W} o(a) o^I(u) q^{L(0)} \\
&= \text{tr}_{|W} o^I(a[-1]u) q^{L(0)} - \sum_{k=1}^{\infty} E_{2k}(\tau) \text{tr}_{|W} o^I(a[2k-1]u) q^{L(0)}
\end{aligned}$$

特に、 $o(L[-1]u) = 0$ なので、次の結果を得ます。

定理 4.4 $a \in V, u \in U$ に対して、次が成り立つ。

$$0 = \text{tr} o(a[-2]u) q^{L(0)} + \sum_{k=2}^{\infty} (2k-1) E_{2k}(\tau) \text{tr}_{|W} o(a[2k-2]u) q^{L(0)}$$

さらに、微分との関係を示しましょう。

$\frac{d}{dq} \text{tr}_{|W} q^{L(0)} = \text{tr}_{|W} o(\omega) q^{L(0)}$ なので、

補題 4.5 任意の $u \in U$ に対して、

$$\text{tr}_{|W} o(\tilde{\omega}) o(u) q^{L(0)} = \left(q \frac{d}{dq} - \frac{c}{24} \right) \text{tr}_{|W} o(u) q^{L(0)}$$

であり、ゆえに、

$$\begin{aligned}
& \text{tr}_{|W} o(L[-2]u) q^{L(0)} - \sum_{k=1}^{\infty} E_{2k}(\tau) \text{tr}_{|W} o(L[2k-2]u) q^{L(0)} \\
&= \left(q \frac{d}{dq} - c/24 \right) \text{tr}_{|W} o(u) q^{L(0)}
\end{aligned}$$

が成り立つ。

5 トーラス上の 1 点関数の空間

記号を用意します。

(a) $M(\Gamma(1))$ でモジュラー群 $\Gamma(1) = SL_2(\mathbb{Z})$ 上の正則モジュラー形式全体の環を表します。これはウエイトに関して次数分解

$$M(\Gamma(1)) = \bigoplus_{k \geq 0} M_k(\Gamma(1))$$

しています。

(b) $U(\Gamma(1))$ で $M(\Gamma(1)) \otimes_{\mathbb{C}} U$ を表します。

(c) $O_q(U)$ で、以下の元で生成された $U(\Gamma(1))$ の $M(\Gamma(1))$ -部分空間を表します。

$$v[0]u, \quad v \in V, u \in U$$

$$v[-2]u + \sum_{k=2}^{\infty} (2k-1)E_{2k}(\tau) \otimes v[2k-2]u \quad v \in V, u \in U$$

定義 5.1 U の 1 点関数の空間 $C_1(U)$ とは以下の条件を満たす関数

$$S(*, \tau) : U(\Gamma(1)) \otimes \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$$

よりなる \mathbb{C} -線形空間である。

(C1) $u \in U(\Gamma(1))$ に対して、 $S(u, \tau)$ は τ に関して正則

(C2) $S(u, \tau)$ は $M(\Gamma(1))$ -線形である。

(C3) $u \in O_q(U)$ に対して、 $S(u, \tau) = 0$

(C4) $u \in U$ に対して、

$$S(L[-2]u, \tau) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \frac{d}{d\tau} S(u, \tau) + \sum_{k=1}^{\infty} E_{2k} S(L[2k-2]u, \tau)$$

が成り立つ。

最初に定義したトレイス関数を線形に $M(\Gamma(1)) \otimes U$ まで拡張します。この時、次の結果を得ます。

命題 5.2

$$S^I(*, \tau) \in C_1(U)$$

主定理は

定理 5.3 U は C_2 -条件を満たす V の既約加群、 $\{W^1, \dots, W^m\}$ を既約 V -加群全体の集合とし、 $\{I^{kj}(*, z) : j = 1, \dots, j_k\}$ でタイプ $\begin{pmatrix} W^k \\ U \\ W^k \end{pmatrix}$ の交絡作用素全体の空間 $I\left(\begin{smallmatrix} W^k \\ U \\ W^k \end{smallmatrix}\right)$ の基底とする。この時、 $C_1(U)$ は

$$\{S_{I^{kj}}(*, \tau) \quad : \quad k = 1, \dots, m, j = 1, \dots, j_k\}$$

で張られている。

6 有理数ウエイトのモジュラー形式

有理数ウエイトのモジュラー形式を扱うためには、すこし精密に分岐を定義する必要があるので、その説明をしておきます。

モジュラー群 $SL(2, \mathbb{Z})$ は2元 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ で生成されているのはよく知られています。それゆえ、それぞれで不変であることを示せば良いわけですが、既約加群上のトレイス関数の定義から、 $\tau \rightarrow \tau + 1$ による変換公式は自明であり、ウエイトには関係していません。それ故、 $\gamma(\tau) = \frac{-1}{\tau}$ に対して示せば良いことになります。

$t + 2m$ ($-1 \leq t < 1, m \in \mathbb{Z}$) を U の最高ウエイト (最小次数) とします。 U は既約 V -加群なので、 U のすべての元のウエイトは $\mathbb{Z} + t$ に入っています。

まず、 $(-i\tau)^{-t}$ の $-i\mathcal{H}$ における主分岐を $r \geq 0$ に対して $(re^{2\pi\sqrt{-1}\theta})^{-t} = r^{-t}e^{-2\pi\sqrt{-1}t\theta}$ で定義します。ここで、 $-\frac{1}{2} < \theta \leq \frac{1}{2}$ です。 U の元の次数 $t+n$ に対しては τ^{-t-n} は $(\tau^{-t})\tau^{-n}$ として考えます。

定理 6.1 $S(*, \tau) \in C_1(U)$ に対して $\gamma = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z})$ の作用を、 u の2番目のウエイト k に依存して、

$$S|\gamma(u, \tau) = \tau^{-k} S(u, \frac{-1}{\tau})$$

として定義します。この時、 $S|\gamma(*, \tau)$ もまた $C_1(U)$ の元である。

7 例

$L(c, h)$ をヴィラソロ代数の既約加群で、最高ウエイト h 、中心電荷 c となるものとします。物理ではすでに2次元共形場理論として扱われていたのですが、数学的にはフレネル、ツーンによって $L(c, 0)$ が頂点作用素代数としての構造を持つことが示されています。ヴィラソロ代数に関するいろいろな人の結果 (例えば [FQS]、[GKO]) によってヴィラソロ代数のユニタリ最高ウエイト表現の完全な分類がなされており、特に、 $c = c_m = 1 - \frac{6}{(m+2)(m+3)}$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) に対する $L(c, 0)$ は極小不連続系列とよばれる有理型頂点作用素代数であり、それらの既約加群は

$$L(c_m, h_{r,s}^m) \quad h_{r,s}^m = \frac{[(m+3)r - (m+2)s]^2 - 1}{4(m+2)(m+3)} \quad (r, s \in \mathbb{N}, 1 \leq s \leq r \leq m+1)$$

で与えられています。また、これらの加群の間の交絡作用素の空間の次元もすべてファイギン・フックスやワンによって決定されています。

まず、トレイス関数が自明でないことが証明できます。

補題 7.1 U と W を既約 $L(c, 0)$ -加群とし、 $I(U \begin{smallmatrix} W \\ W \end{smallmatrix}) \neq 0$ と仮定します。この時、 u を U の最高ウエイトベクトルとすると、 $S^I(u, \tau) \neq 0$ が成り立つ。

以下の例では常に、 u として最高ウエイトベクトルであり、かつ、 $S^I(u, \tau)$ の初項の係数が1であるようにとります。

例えば、 $L(\frac{1}{2}, 0)$ は極小不連続系列の最初のものであり、3つの既約加群 $L(\frac{1}{2}, 0), L(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), L(\frac{1}{2}, \frac{1}{16})$ を持っています。 $U = L(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ に対して、 $W = L(\frac{1}{2}, \frac{1}{16})$ が唯一のゼロでない交絡作用素を持つものであり、しかもその次元は1次元です。それ故、 u のウエイトは $\frac{1}{2}$ なので、 $S^I(u, \tau)$ はウエイト $\frac{1}{2}$ のモジュラー形式となります。初項は $q^{1/12}$ であり、容易に、デデキントのエータ関数

$$\eta(\tau) = q^{1/24} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)$$

と一致することが分かります。

2番目は $L(\frac{7}{10}, 0)$ です。これは6つの既約加群 $L(\frac{7}{10}, 0), L(\frac{7}{10}, \frac{1}{10}), L(\frac{7}{10}, \frac{3}{5}), L(\frac{7}{10}, \frac{3}{2}), L(\frac{7}{10}, \frac{7}{16})$ と $L(\frac{7}{10}, \frac{3}{80})$ を持っています。 $U = L(\frac{7}{10}, \frac{1}{10})$ に対しては $W = L(\frac{7}{10}, \frac{3}{80})$ が唯一の $I(U \begin{smallmatrix} W \\ W \end{smallmatrix}) \neq 0$ を満たす既約加群であり、交絡作用素の空間は1次元です。故に、最高ウエイト元 $u \in L(\frac{1}{16}, \frac{1}{10})$ に対して、 $S^I(u, \tau)$ はウエイト $\frac{1}{10}$ のモジュラー形式であり、初項 $q^{-\frac{1}{24} \frac{7}{10} + \frac{3}{80}} = q^{\frac{1}{120}}$ は $(\eta(\tau))^{1/5}$ の初項と一致することが分かりますので、 $S(u, \tau) = (\eta(\tau))^{1/5}$ となります。

3番目の $L(\frac{4}{5}, 0)$ は10個の既約加群をもっており、 $U = L(\frac{4}{5}, \frac{2}{5})$ に対して、 $W = L(\frac{4}{5}, \frac{1}{15})$ が条件を満たす唯一の既約加群であり、その交絡作用素全体の空間は1次元です。上の同様の議論で、 $S(u, \tau) = (\eta(\tau))^{4/5}$ であることが分かります。

4番目の $L(\frac{6}{7}, 0)$ は15個既約加群を持っており、 $U = L(\frac{6}{7}, \frac{1}{7})$ に対して、 $W = L(\frac{6}{7}, \frac{1}{21})$ が自明でないタイプ $(U \begin{smallmatrix} W \\ W \end{smallmatrix})$ の交絡作用素を持つ唯一の既約加群であり、その交絡作用素の空間は1次元です。それ故、上の同様に、最高ウエイト元 $u \in U$ に対して $S(u, \tau) = (\eta(\tau))^{2/7}$ です。

参考文献

- [BKMS] E. Bannai, M. Koike, A. Nunemasa and J. Sekiguti, Klein's icosahedral equation and modular forms, preprint 1999.
- [Bo] R. E. Borcherds, Vertex algebras, Kac-Moody algebras, and the Monster, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **83** (1986), 3068-3071.
- [Bu] D. Bump, "Automorphic forms and representations", C.S.A.M 55, Cambridge 1997.

- [DLM] C. Dong, H. Li and G. Mason, Modular-invariance of trace functions in orbifold theory, preprint.
- [FF] B. L. Feigin and D. B. Fuchs, Verma modules over the Virasoro algebra, *Lecture Notes in Math.*, Vol. **1060**, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1984.
- [FLM] I. B. Frenkel, J. Lepowsky, and A. Meurman, "Vertex Operator Algebras and the Monster", Pure and Applied Math., Vol. 134, Academic Press, 1988.
- [FQS] D. Friedan, Z. Qiu and S. Shenker, Conformal invariance, unitarity and two-dimensional critical exponents, *MSRI publ. # 3*, Springer-Verlag, (1984), 419-449.
- [FRW] A. J. Feingold, J. F. X. Ries, and M. Weiner, Spinor construction of vertex operator algebras, triality and $E_8^{(1)}$, *Contemporary Math.* **121**, 1991.
- [FZ] I. B. Frenke, Y. Zhu, Vertex operator algebras associated to representations of affine and virasoro algebras, *Duke Math. J.* Vol. **66** (1992) 123-168.
- [GKO] P. Goddard, A. Kent and D. Olive, Unitary representations of the Virasoro algebra and super-Virasoro algebras, *Commun. Math. Phys.* **103** (1986), 105-119.
- [Ib] T. Ibukiyama, Modular forms of rational weights and modular varieties, *Abhand. Math. Semi. Univ. Hamburg*, to appear.
- [In] E. Ince, "Ordinary Differential Equations", Dover Publications, Inc., 1956.
- [Li1] H. Li, Local systems of vertex operators, vertex superalgebras and modules, *J. Pure Appl. Alg.* **109** (1996), 143-195.
- [Li2] H. Li, Determining fusion rules by $A(V)$ -modules and bimodules, *J. Algebra* **212** (1999) 515-556.
- [Mi1] M. Miyamoto, A modular invariance on the theta functions defined on vertex operator algebras, *Duke Math. J.*, Vol. **101** (2000), 221-236.
- [Mi2] M. Miyamoto, Modular invariance of trace functions on VOA in many variables, preprint.
- [W] W. Wang, Rationality of Virasoro vertex operator algebra, *Duke Math. J. IMRN*, Vol. **71**, No. 1 (1993), 197-211.
- [Zh] Y. Zhu, Modular invariance of characters of vertex operator algebras, *J. Amer. Math. Soc.* **9** (1996), 237-302.