数理解析研究所講究録 1219 巻 2001 年 235-244

On Riesz mean for the coefficients of the twisted Rankin - Selberg L-function.

市原由美子 (Yumiko Ichihara)
名古屋大学多元数理科学研究科
(Graduate School of Mathematics, Nagoya University)

normalized Hecke eigen cusp form $f(z)$ の ∞ における Fourier 係数 a_n について、1939 年に Rankin [5] によって次が示された。

$$\sum_{n\leq x} a_n^2 = \frac{\pi^2}{6}\alpha x^k + O\left(x^{k-\frac{2}{5}}\right) \qquad (1)$$

ここで α は定数で、k は $f(z)$ の weight である。この結果は

$$L_{f\otimes f}(s) = \zeta(2s)\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 n^{-s+k+1}, \quad Re(s)>1 \qquad (2)$$

を調べることで得られる。ζ は Riemann zeta 関数。実際、ここで、$L_{f\otimes f}(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{C}_n n^{-s}$ と書くとき、このL関数の性質から

$$\sum_{n\leq x}\tilde{C}_n = \frac{\pi^2}{6}k\alpha x + O\left(x^{\frac{3}{5}}\right) \qquad (3)$$

が求められて、Rankin の結果 (1) を導く。つまり (1) の本質は (3) である。実は (3) の評価はより改良できるであろうと予想されている。Ivić により (3) の error term について $\Omega\left(x^{\frac{3}{8}}\right)$ と評価されていて、このことから、error term は $O\left(x^{\frac{3}{8}}\right)$ ぐらいであろうと予想される。しかし、Rankin [5] 以後 (1) の評価は全く改良されていない。

この評価の改良に向けて1つの試みが Ivić-Matsumoto-Tanigawa [4] によってなされた。彼らは Riesz mean と呼ばれる次の様な和について

$$D_\rho(x) = \frac{1}{\Gamma(\rho+1)}\sum_{n\leq x}\tilde{C}_n (x-n)^\rho$$

幾つかのVoronoi-formulaを調べ、$D_1(x)$のerror termの2乗平均に対する考察がRankinの評価(1)を改良する可能性を示した。

さて、Rankinの結果(1)の類似として次が得られる。

$f(z)$, $g(z)$: $SL_2(\mathbb{Z})$に関するnormalized Hecke eigen cusp form
それぞれのweightを k, l ($k \geq l$) とする。

f, g, それぞれの∞におけるn-th Fourier係数をa_n, b_nと書くことにし、χを mod d ($d \geq 1$) のprimitive Dirichlet指標とするとき
$f \neq g$ 又は χがnon-trivialであれば、

$$\sum_{n \leq x} a_n b_n \chi(n) \ll x^{\frac{k+l}{2}-\frac{2}{5}} d^{\frac{4}{5}+\varepsilon} \tag{4}$$

が成り立つ。これはRankin-Selberg L関数

$$L_{f\otimes g}(s,\chi) = L(2s,\chi^2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n b_n \chi(n)}{n^{s+\frac{k+l}{2}-1}}, \quad Re(s)>1$$

$$=: \sum_{n=1}^{\infty}\frac{c(n)\chi(n)}{n^s}$$

$$c_n = n^{1-\frac{k+l}{2}}\sum_{m^2 \mid n} a_{\frac{n}{m^2}} b_{\frac{n}{m^2}} m^{k+l-2}$$

に対して

$$\sum_{n \leq x} c_n \chi(n) \ll x^{\frac{3}{5}} d^{\frac{4}{5}+\varepsilon} \tag{5}$$

の評価に対応している。

(3)におけるerror termの考察と(5)の評価の考察は対応するので(5)におけるxのべきの考察にIvić-Matsumoto-Tanigawa [4]の手法は

意味があると思われるが、(5)の様な modulus d や保型形式の level に関する評価はあまりされておらず、まだまだ情報は少ない。そこで今回は、Ivić-Matsumoto-Tanigawa [4] の方法が modulus d に与える影響について調べたので、その結果を報告したい。

まず、先に紹介した Rankin-Selberg L 関数 $L_{f\otimes g}(s,\chi)$ の性質を述べる。$L_{f\otimes g}(s,\chi)$ は $Re(s)>1$ で絶対収束し、s-平面全体に pole を除き正則に解析接続される。pole は $f=g$, $d=1$ の時のみ $s=1$ に simple pole が存在する。また $C_n \ll n^{\varepsilon}$ も分かっていて、次の関数等式をもつ。

$$\Phi_{f\otimes g}(s,\chi)=\left(\frac{2\pi}{d}\right)^{-s}\Gamma\left(s+\frac{k-l}{2}\right)\Gamma\left(s+\frac{k+l}{2}-1\right)L_{f\otimes g}(s,\chi)$$

に対して、大きさ1の χ のみに依る絶対定数 C_χ があって

$$\Phi_{f\otimes g}(s,\chi)=C_\chi\,\Phi_{f\otimes g}(1-s,\bar{\chi})$$

を満たす。

さて、Riesz mean

$$D_\rho(x,\chi)=\frac{1}{\Gamma(\rho+1)}\sum_{n\leqq x}C_n(x-n)^\rho \quad ,\ \rho\in\mathbb{R}$$

に対して Ivić-Matsumoto-Tanigawa [4] の議論の類似を考えよう。その前に、Hafner [1] の一般論から次のような Voronoi-formula が得られている。

$$D_\rho(x,\chi)=Q_\rho(x,\chi)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_\chi C_n\bar{\chi}(n)\left(\frac{2\pi}{d}\right)^2}{\left(n\frac{16\pi^4}{d^4}\right)^{1+\rho}}f_\rho\left(\frac{16\pi^4xn}{d^4}\right) \qquad (6)$$

$$Q_\rho(x, X) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\Gamma(s) L_{f\otimes g}(s, X)\, x^{\rho+s}}{\Gamma(s+\rho+1)}\, ds$$

$$f_\rho(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_{a,b}} \frac{\Gamma(1-s)\,\Gamma(s+\frac{k-l}{2})\,\Gamma(s+\frac{k+l}{2}-1)}{\Gamma(2+\rho-s)\,\Gamma(1-s+\frac{k-l}{2})\,\Gamma(-s+\frac{k+l}{2})}\, x^{1+\rho-s}\, ds$$

（積分路 C, $C_{a,b}$ は Hafner [1] 参照、ここでは $a=0$, $b>\frac{k+l}{2}-1$ となる）

さて、この Voronoi-formula (6) に現れる無限級数は $\rho>\frac{3}{2}$ でなければ絶対収束せず、$\rho>\frac{1}{2}$ で収束する。つまりこの formula から直接 $D_0(x, X)$ の情報を得ることはできない。ここで絶対収束するところの情報を使うと (3) や (5) が得られる（[2] 参照）。Ivić-Matsumoto-Tanigawa [4] は条件収束している場合（$\rho=1$）から得られる情報に注目した。そこで (6) のタイプの Voronoi-formula ではなく、Main term と有限和と error term で表される truncated Voronoi-formula、更に Meurman-type と呼ばれる Voronoi-formula の2つを求め、これらを用いて $\rho=1$ における error term $D_\rho(x, X) - Q_\rho(x, X)$ の2乗平均を調べた。指標付きで考えた場合に同様の議論を考えると、次の結果を得た。

Proposition 1 (truncated Voronoi-formula)

ρ は実数で $0\leqq\rho\leqq\frac{3}{2}$ とする。$0<{}^\forall\varepsilon<1$ に対して

$$\varepsilon^* = \begin{cases} \varepsilon & 0\leq\rho\leq 1 \\ \frac{1}{8}+\varepsilon & 1<\rho\leqq\frac{3}{2} \end{cases}$$

とおく。また $N\geqq d^4$ を満たす十分大きな N をとるとき、次が成り立つ。

$$
\begin{aligned}
D_\rho(x,\chi) = {} & \frac{x^\rho}{\Gamma(\rho+1)} L_{f\otimes g}(0,\chi) \\
& + \frac{C_\chi}{(2\pi)^{\rho+1}} d^{\frac{\rho+1}{2}} x^{\frac{3+6\rho}{8}} \sum_{n\leqq N} \frac{c_n \overline{\chi}(n)}{n^{\frac{5+2\rho}{8}}} \sin\left(\frac{8\pi}{d}(xn)^{\frac{1}{4}} + \frac{3-2\rho}{4}\pi\right) \\
& + O\left(x^{\frac{1+6\rho}{8}} d^{\frac{3}{2}+\rho} N^{\frac{1-2\rho}{8}} + x^{\frac{1+3\rho}{4}} d^{\rho+1} N^{\frac{1+\rho}{4}+\varepsilon} + x^{\frac{3+3\rho}{4}+\varepsilon} d^{1+\rho} N^{-\frac{1+\rho}{4}}\right) \\
& + \begin{cases}
O\left(x^{\frac{11}{8}} d^{\frac{5}{2}} N^{-\frac{1}{8}+\varepsilon^*} + x^{\frac{3}{2}-\varepsilon^*} d^{2+4\varepsilon^*}\right) & \frac{d^4}{16\pi^4 x} \geqq 1,\ \rho = \frac{3}{2} \\
O\left(x^2 d^2 + x^{\frac{1+3\rho}{4}} d^{\rho+1} N^{\frac{1-\rho}{4}+\varepsilon^*} + x^{\rho-\varepsilon^*} d^{2+4\varepsilon^*}\right) & \frac{d^4}{16\pi^4 x} \geqq 1,\ \rho \neq \frac{3}{2} \\
O\left(x^{\frac{1+6\rho}{8}} d^{\rho+\frac{3}{2}}\right) & \frac{d^4}{16\pi^4 x} < 1
\end{cases} \\
& + O\left(x^{\rho+\varepsilon}\right)
\end{aligned}
$$

ここで最後のerror termは$\rho=0$の時は現れない。また$k=l$であれば$L_{f\otimes g}(0,\chi)=0$であることに注意。

<u>Proposition 2 (Meurman typeのVoronoi-formula)</u>

$x \geqq 1$なる整数でない実数とする。$M \geqq d^4$を満たす十分大なるMと$0 \leqq {}^{\forall}\varepsilon$について次が成り立つ。

$$
\begin{aligned}
D_1(x,\chi) = {} & x L_{f\otimes g}(0,\chi) \\
& + \frac{C_\chi}{(2\pi)^2} d^{\frac{3}{2}} x^{\frac{9}{8}} \sum_{n\leqq M} \frac{c_n \overline{\chi}(n)}{n^{\frac{7}{8}}} \sin\left(\frac{8\pi}{d}(xn)^{\frac{1}{4}} + \frac{\pi}{4}\right) \\
& + O\Big(x^{\frac{3}{2}+\varepsilon} d^2 M^{-\frac{1}{2}} \|x\|^{-1} + x^{\frac{13}{8}} d^{\frac{3}{2}+\varepsilon} M^{-\frac{3}{8}+\varepsilon}
\end{aligned}
$$

$$+x^{\frac{11}{8}}d^{\frac{21}{10}+\varepsilon}M^{-\frac{17}{40}} + x^{\frac{9}{8}}d^{\frac{23}{10}+\varepsilon}M^{-\frac{11}{40}}$$
$$+x^{\frac{9}{8}}d^{\frac{31}{10}+\varepsilon}M^{-\frac{27}{40}} + x^{\frac{7}{8}}d^{\frac{5}{2}} + x^{\frac{13}{8}}d^{2}M^{-\frac{1}{2}} \Big)$$
$$+\begin{cases} 0 & \frac{d^4}{16\pi^4}<1, \ k-l=0,2 \\ O(d^6) & \frac{d^4}{16\pi^4}<1, \ k-l\neq 0,2 \\ O(xd^2M^{\varepsilon}) & \text{otherwise} \end{cases}$$

ここで $\|x\|$ は x と x に一番近い整数との間の距離を表す。

この2つのPropositionより次のTheoremが導ける。

Theorem

$D_1^*(x,\chi) = D_1(x,\chi) - xL_{f\otimes g}(0,\chi)$ とおく。
$f\neq g$ 又は χ が mod $d\neq 1$ の primitive character のとき

$$\int_0^X |D_1^*(x,\chi)|^2\,dx = \frac{2d^3}{13(2\pi)^4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|c_n\chi(n)|^2}{n^{\frac{7}{4}}}X^{\frac{13}{4}} + F(x)$$

ここで $F(x) = O(X^{3+\varepsilon}d^{4+\varepsilon})$ である。

この結果は (5) を改良しないが、もし

$$F(x) = x^3d^4P(\log xd) + O(x^{\alpha}d^{\beta}) \quad , \quad \alpha\leqq 3$$

の様に多項式 $P(x)$ を用いて書き表すことができたら、多少の条件は必要だが

$$D_1(x,\chi) \ll x^{\frac{9}{8}}d^{\frac{3}{2}} + x^{1+\varepsilon}d^{2+\varepsilon} + x^{\frac{3+5\alpha}{15}}d^{\frac{4+5\beta}{15}}$$

となることがわかり、これは $D_0(x)$ を改良するだけの情報を持っている。

さて、これらの考察は modulus について注意することで非常に複雑になっている。実際に $\dfrac{d^4}{16\pi^4 x} \leqq 1$ という条件のもとでは Proposition 達は簡単に書けて、次のようになる。

Remark 1 (truncated Voronoi-formula)

$0 \leqq \rho \leqq \frac{3}{2}$, $0 < {}^\forall\varepsilon < 1$ に対して、

$$
\begin{aligned}
D_\rho(x, \chi) = {} & Q_\rho(x, \chi) \\
& + \frac{C_\chi}{(2\pi)^{1+\rho}} x^{\frac{3+6\rho}{8}} d^{\frac{1}{2}+\rho} \sum_{n \leqq N} \frac{C_n \overline{\chi}(n)}{n^{\frac{5+2\rho}{8}}} \sin\left(\frac{8\pi}{d}(xn)^{\frac{1}{4}} + \frac{3-2\rho}{4}\pi\right) \\
& + O\Big(x^{\frac{1+6\rho}{8}} d^{\frac{3}{2}+\rho} + x^{\frac{3+3\rho}{4}+\varepsilon} d^{1+\rho} N^{\frac{1+\rho}{4}} + x^\rho d^2 \\
& \qquad + x^{\rho+\varepsilon} + x^{\frac{1+3\rho}{4}} d^{1+\rho} N^{\frac{1-\rho}{4}+\varepsilon}\Big)
\end{aligned}
$$

ただし $N > \max\{d^4, 16\pi^4\}$ なる十分大な N について成立。

Remark 2 (Meurman-type の Voronoi-formula)

$0 < {}^\forall\varepsilon$、十分大なる $M > d^4$ について、次が成り立つ。

$$
\begin{aligned}
D_1(x, \chi) = {} & Q_1(x, \chi) \\
& + \frac{C_\chi}{(2\pi)^2} x^{\frac{9}{8}} d^{\frac{3}{2}} \sum_{n \leqq M} \frac{C_n \overline{\chi}(n)}{n^{\frac{7}{8}}} \sin\left(\frac{8\pi}{d}(xn)^{\frac{1}{4}} + \frac{\pi}{4}\right) \\
& + O\Big(x^{\frac{13}{8}} d^2 M^{-\frac{1}{2}} + x^{\frac{3}{2}+\varepsilon} d^2 M^{-\frac{1}{2}} \|x\|^{-1} + x^{\frac{7}{8}} d^{\frac{5}{2}} \\
& \qquad + x^{\frac{13}{8}} d^{\frac{3}{2}+\varepsilon} M^{-\frac{3}{8}+\varepsilon} + x^{\frac{9}{8}} d^{\frac{23}{10}+\varepsilon} M^{-\frac{11}{40}} \\
& \qquad + x^{\frac{9}{8}} d^{\frac{31}{10}+\varepsilon} M^{-\frac{27}{40}} + x^{\frac{11}{8}} d^{\frac{21}{10}+\varepsilon} M^{-\frac{17}{40}}\Big)
\end{aligned}
$$

ここで用いた記号は Proposition 2 と同じ。

この Remark 1.2 が Ivić-Matsumoto-Tanigawa [4] の結果と対応するものである。Proposition と Remark を見比べると modulus に関する議論の複雑さが見てとれる。この理由は (6) の Voronoi-formula にあるように、x に関する良い評価の代償として d^4 の評価の悪さがついてまわるところにある。つまり、単純に指標が付かない場合の議論を指標付きのものにあてはめるわけにはいかないのである。指標付きの場合の今回の結果においても様々な箇所で工夫は必要であるが、それは [3] を参照していただくとして、最も大きい相違点について紹介する。

それは Meurman-type の Voronoi-formula (Proposition 2) を得るために必要となる「$D_1(x,\chi)$ の上からの評価」を求める点に表れる。
Proposition 2 を得るためには

$$D_1(x,\chi) \ll x^{\frac{6}{5}} d^{\frac{8}{5}+(k-\ell)\varepsilon} \tag{7}$$

の評価を必要とするのだが、これを求めるのは簡単でない。指標が付かない場合、つまり Ivić-Matsumoto-Tanigawa [4] の場合に関しては、(7) に対応するものは $D_1(x) - Q_1(x) \ll x^{\frac{6}{5}}$ であるが、これはすぐに求めることができる。Rankin の結果 (3) を用いても、$D_2(x)$ について Hafner の Voronoi-formula (6) を考え、これに差分作用素を作用させて調べることもできる。差分作用素を用いての評価の方法に関しては [2] 参照してもらいたい。これは Landau-Walfisz によって扱われはじめた手法である。この差分作用素を用いる Landau-Walfisz の方法で (7) が得られるのは「$d^2 > x$」又は「$d^2 \leq x$ かつ $\frac{16\pi^4 x}{d^4} \geq 1$」

の時のみである。 $d^2 \leqq x \leqq \frac{d^4}{16\pi^4}$ においては これらの従来の方法では (7) を得られない。 そこで Proposition 1 より導かれる次の2乗平均を利用した。

<u>Lemma</u>

$$\int_0^X |D_1(x)|^2 dx = \frac{2}{13(2\pi)^4} d^3 X^{\frac{13}{4}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|C_n \overline{\chi}(n)|}{n^{\frac{7}{4}}}$$
$$+ O\left(d^{\frac{7}{2}+\varepsilon} X^{\frac{25}{8}+\varepsilon} + d^{4+\varepsilon} X^{3+\varepsilon}\right)$$

ここで ε は正の任意の実数.

この Lemma を

$$D_1(x) = \frac{1}{H}\int_x^{x+H} D_1(t)\,dt - \frac{1}{H}\int_x^{x+H}\int_x^{t} D_0(u)\,du\,dt$$

に適用し、更に (5) に注意すると、

$$|D_1(x)|^2 \leqq \left\{\frac{1}{H}\int_x^{x+H} |D_1(t)|dt + O\left(H x^{\frac{3}{5}} d^{\frac{4}{5}+\varepsilon}\right)\right\}^2$$
$$\ll \frac{1}{H}\int_x^{x+H} |D_1(t)|^2 dt + O\left(H^2 x^{\frac{6}{5}} d^{\frac{8}{5}+\varepsilon}\right)$$

となり、これと Lemma から $d^2 \leqq x \leqq \frac{d^4}{16\pi^4}$ において (7) を得られる

〈References〉

[1] J. L. Hafner, On the representation of the summatory functions of a class of arithmetical functions, Lec. Note in Math. 899 (1981) 148-165.

[2] Y. Ichihara, The evaluation of the sum over arithmetic progressions for the coefficients of the Rankin-Selberg series, preprint.

[3] ——, On Riesz mean for the coefficients of the twisted Rankin-Selberg L-function, preprint.

[4] A. Ivić, K. Matsumoto and Y. Tanigawa, On Riesz mean of the coefficients of the Rankin-Selberg series, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 127 (1999) 117-131.

[5] R. A. Rankin, Contributions to the theory of Ramanujan's function $\tau(n)$ and similar arithmetic functions I and II, Proc. Camb. Phil. Soc. 35 (1939) 351-356.