数理解析研究所講究録 1220 巻 2001 年 32-38

Yoccozの不等式

東京大学大学院数理科学研究科　神 貞介 (Jin Teisuke)

概 要

1 次元および高次元の多項式力学系における Yoccoz の不等式を証明する. 従来の Yoccoz の不等式は Julia 集合の連結性を仮定していたが, 以下では, 対象点を含む成分が一点でなければ成り立つことを示す.

1 1変数多項式力学系のとき

$f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ を $\deg d>1$ の多項式とし, $K=\{z\in\mathbb{C};\{f^n(z);n\in\mathbb{N}\}$ が有界 $\}$ を filled Julia 集合とする. また, $a\in\mathbb{C}$ を f の repelling な固定点, $\lambda=f'(a)$ $(|\lambda|>1)$ を multiplier とする.

定理 1.1 (Yoccoz の不等式). $K(a)$ (a を含む K の成分) が一点でないとき,

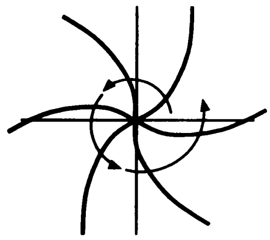
$$\frac{\mathrm{Re}\log\lambda}{|\log\lambda-2\pi ip/q|^2}\geq\frac{Nq}{2\log d}$$

が成り立つ.

以下, q,p,N について説明する. a において, Schröder 方程式:

$$f\circ\phi(t)=\phi(\lambda t),\quad (t\in\mathbb{C}),$$
$$\phi(0)=a,\quad \phi'(0)\neq 0$$

の解 $\phi\in\mathcal{O}(\mathbb{C})$ が存在することが知られている. K は f で不変だから, $\widetilde{K}=\phi^{-1}(K)$ は $t\mapsto\lambda t$ で不変である. ϕ は 0 で locally conformal だから, 任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して $\widetilde{K}=\lambda^n\widetilde{K}$ であることを考えると, $\widetilde{K}(0)$ は非有界となる. 右の図は $\widetilde{K}$ のモデルである. $q(=3)$ は $\mathbb{C}\backslash\widetilde{K}$ の成分の周期である. 各成分はサイクルを左回りに $p(=1)$ 番目に移動するとする $(0\leq p<q)$. サイクルは全部で $N(=2)$ 個である.



$f(z)$ に対し, $G(z)$ を次のように定める.

$$G(z)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{d^n}\log^+|f^n(z)|.$$

すると, G は $\mathbb{C}$ 上の連続な非負の劣調和関数で,

$$G(z)=0\Leftrightarrow z\in K,$$
$$G\circ f(z)=d\cdot G(z)$$

を満たす. さらに, $u(t)=G\circ\phi(t)$ とおくと, u は $\mathbb{C}$ 上の連続な非負の劣調和関数で,

$$u(t)=0\Leftrightarrow t\in\widetilde{K},$$
$$u(\lambda t)=d\cdot u(t)$$

を満たす. すると,

$$\rho = \operatorname{ord} u = \limsup_{r\to\infty} \frac{\log \max_{|t|=r} u(t)}{\log r} = \frac{\log d}{\log |\lambda|}$$

が成り立つ. 実際, 最大値の原理により

$$\operatorname{ord} u \le \limsup_{n\to\infty} \frac{\log \max_{|t|=|\lambda|^{n+1}} u(t)}{\log |\lambda|^n} = \limsup_{n\to\infty} \frac{\log \max_{|t|=1} d^{n+1} u(t)}{\log |\lambda|^n} = \frac{\log d}{\log |\lambda|},$$

$$\operatorname{ord} u \ge \limsup_{n\to\infty} \frac{\log \max_{|t|=|\lambda|^{n}} u(t)}{\log |\lambda|^{n+1}} = \limsup_{n\to\infty} \frac{\log \max_{|t|=1} d^{n} u(t)}{\log |\lambda|^{n+1}} = \frac{\log d}{\log |\lambda|}.$$

さて, q, p, N が適切に定義できるためには, 次の性質が必要である.

命題 1.2. **$\mathbb{C} \setminus \widetilde{K}$ の成分の個数は $\max\{1, 2\rho\}$ 以下である.**

この主張はすでに [EL] で示されているが, Yoccoz の不等式の証明の案内として, 証明しておくことにする. そのため, Tsuji の不等式を引用する.

定理 1.3 (Tsuji の不等式 [H, Theorem 8.3]). **u を $\mathbb{C}$ 上の非負の劣調和関数とする. $D = \{t \mid u(t) > 0\}$ とおき,**

$$\theta(r) = \begin{cases} \infty, & \{|t| = r\} \subset D \text{ または } u|_{\{|t|=r\}} \equiv 0 \text{ のとき}, \\ \frac{1}{r}(D \cap \{|t| = r\} \text{ の各成分の長さの最大値}), & \text{その他のとき}, \end{cases}$$

と定義する. このとき任意の $1/e \le \kappa < 1$, $r_0 \le \kappa^2 r$ に対し,

$$\log \max_{|t|=r} u(t) \ge \pi \int_{r_0/\kappa}^{\kappa r} \frac{dr}{r\theta(r)} + \log \max_{|t|=r_0} u(t) + \log \frac{(1-\kappa)^{3/2}}{6}.$$

が成り立つ.

命題 1.2 の証明. 成分の個数は 1 より多いと仮定してよい. $1 < n < \infty$ に対し, n 個の成分 $U_1, \ldots, U_n$ をとり, $n \le 2\rho$ を示せば十分.

$\mathbb{C} \setminus \widetilde{K} = \{u(t) > 0\}$ に注意する. $t \in U_j$ に対し $u_j(t) = u(t)$, その他のとき $u_j(t) = 0$ と定めると, $\{u_j\}_{j=1}^n$ は劣調和関数である. $\theta_j(r)$ を各 u_j について上の定理のように定める. u_j に Tsuji の不等式を適用すると,

$$\log \max_{|t|=r} u(t) \ge \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \log \max_{|t|=r} u_j(t) \ge \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \pi \int_1^{\kappa r} \frac{dr}{r\theta_j(r)} - \text{const.}$$

$n \ge 2$ だから, $\sum \theta_j \le 2\pi$. Schwarz の不等式により,

$$n^2 = \left(\sum \frac{\sqrt{\theta_j}}{\sqrt{\theta_j}} \right)^2 \le \left(\sum \theta_j \right) \left(\sum \frac{1}{\theta_j} \right) \le 2\pi \sum \frac{1}{\theta_j}.$$

よって,

$$\log \max_{|t|=r} u(t) \ge \frac{n}{2} \log \kappa r - \text{const.}$$

を得る. ρ の定義により, $\rho \ge n/2$ が容易に計算できる. □

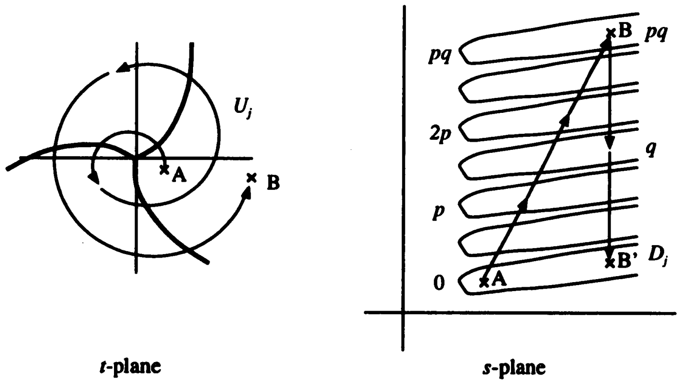


図 1: t-平面と s-平面.

定理 1.1 の証明. 証明法は, t-平面から s-平面へ対数で変換し, s-平面上で Tsuji の不等式を適用するというものである.

$\mathbb{C}\setminus\widetilde{K}$ の各サイクルから代表元をとり, それらを $U_1,\ldots,U_N$ とする.

$v(t)=\max\{u(t)-1,0\}$, $D=\{t\in\mathbb{C}\mid v(t)>0\}$ と定義し, $D_1,\ldots,D_N$ を D の成分で D_j が U_j の部分集合となるものとする. $t=e^s$, すなわち $s=\log t$ とおく. D_j' を各 D_j の連結像の一つとする. $\widetilde{K}(0)$ が非有界だから, この変換は適切に定まっている.

このとき, $\log\lambda$ の適当な枝に対して

$$D_j'\ni s\mapsto s+q\log\lambda-2\pi ip\in D_j' \tag{1}$$

が well-defined である. 図 1 で説明しよう. 右側には, D_j' の軌道とその枝が描かれている. t-平面で点 A を λ^q 倍すると点 B に移るとする. s-平面で点 A に $q\log\lambda$ の適当な枝を加えれば点 B に移る. 更に $2\pi ip$ を引けば, 点 B は点 B$'$ に移り点 A を含む元の成分に戻ることがわかる.

以上の議論から, D_j' は, $\log\lambda-2\pi ip/q$ の方向を向いている直線に沿って分布していることがわかった. すなわち,

$$\left|\operatorname{Re}s-\frac{\operatorname{Re}\log\lambda}{|\log\lambda-2\pi ip/q|}|s|\right| \text{ は } s\in\bigcup D_j' \text{ について有界.} \tag{2}$$

一方, t-平面の 0 中心の円は s-平面では虚軸に平行な長さ 2π の線分になるので, $\{\operatorname{Re}s=\text{const.}\}\cap\bigcup_j D_j'$ の長さは平均して高々$2\pi/q$ である. 以下, 詳しく説明する. len() を通常の線測度とすると, $\{\lambda^n U_j\}$ は $n=0,\ldots,q-1$, $j=1,\ldots,N$ について互いに交わらないから, 任意の $\xi\in\mathbb{R}$ に対し

$$\operatorname{len}\left(\{\operatorname{Re}s=\xi\}\cap\bigcup_{j=1}^{N}\bigcup_{n=0}^{q-1}\log(\lambda^n U_j)\right)\le 2\pi$$

が成り立つ. 更に (1) により, $\log(U_j)$ は $s\mapsto s+q\log\lambda-2\pi ip$ で不変だから, 積分することによって次を得る.

$$\begin{aligned}
2\pi\cdot q\operatorname{Re}\log\lambda &\ge \int_{\xi}^{\xi+q\operatorname{Re}\log\lambda}\operatorname{len}\left(\{\operatorname{Re}s=\xi\}\cap\bigcup_{j=1}^{N}\bigcup_{n=0}^{q-1}\log(\lambda^n U_j)\right)d\xi\\
&= q\int_{\xi}^{\xi+q\operatorname{Re}\log\lambda}\operatorname{len}\left(\{\operatorname{Re}s=\xi\}\cap\bigcup_{j=1}^{N}\log(U_j)\right)d\xi\\
&\ge q\int_{\xi}^{\xi+q\operatorname{Re}\log\lambda}\operatorname{len}\left(\{\operatorname{Re}s=\xi\}\cap\bigcup_{j=1}^{N}D_j'\right)d\xi.
\end{aligned}$$

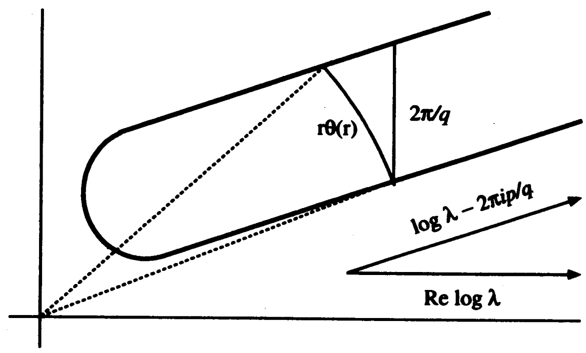


図 2: The area of $\bigcup D'_j$

従って

$$\frac{1}{q\,\mathrm{Re}\log\lambda}\int_{\xi}^{\xi+q\,\mathrm{Re}\log\lambda}\mathrm{len}\left(\{\mathrm{Re}\,s=\xi\}\cap\bigcup_{j=1}^{N}D'_j\right)d\xi\le\frac{2\pi}{q}.$$

さて,

$$w_j(s)=\begin{cases}v(e^s) & t\in D'_j \text{ のとき},\\ 0 & \text{その他}\end{cases}$$

と定めると, $\{w_j\}_{j=1}^{N}$ は s-平面上の劣調和関数である. この $w_j(s)$ に対して Tsuji の不等式を適用する.

$$\sum_{j=1}^{N}\log\max_{|s|=r}w_j(s)\ge\sum_{j=1}^{N}\pi\int_1^{\kappa r}\frac{dr}{r\theta_j(r)}-\text{const.},\tag{3}$$

ここで, $\theta_j(r)$ は各 D'_j ごとに定義する. $r=|s|$ に注意せよ. 十分大きな r に対しては $\theta_j(r)<\infty$ が成り立つ.

まず右辺を計算しよう. Schwarz 不等式を使うと次を得る.

$$N^2=\left(\sum_{j=1}^{N}\frac{\sqrt{r\theta_j}}{\sqrt{r\theta_j}}\right)^2\le\left(\sum r\theta_j\right)\left(\sum\frac{1}{r\theta_j}\right),$$

$$(\kappa r-1)^2=\left(\int_1^{\kappa r}\frac{\sqrt{\sum r\theta_j}}{\sqrt{\sum r\theta_j}}dr\right)^2\le\left(\int_1^{\kappa r}\sum r\theta_j\,dr\right)\left(\int_1^{\kappa r}\frac{dr}{\sum r\theta_j}\right).$$

よって

$$\sum\pi\int_1^{\kappa r}\frac{dr}{r\theta_j(r)}\ge\pi N^2\int_1^{\kappa r}\frac{dr}{\sum r\theta_j(r)}\ge\frac{\pi N^2(\kappa r-1)^2}{\int_1^{\kappa r}\sum r\theta_j(r)dr}.$$

性質 (2) と平均して $\mathrm{len}\left(\{\mathrm{Re}\,s=\text{const.}\}\cap\bigcup D'_j\right)\le 2\pi/q$ が成り立つことにより, 図 2 を見ると, $\bigcup D_j$ の半径 r までの面積は $\bigcup D_j$ の実部 $\frac{\mathrm{Re}\log\lambda}{|\log\lambda-2\pi ip/q|}r$ までの面積でほぼおさえられることがわかる. よって次を得る.

$$\begin{aligned}\int_1^{\kappa r}\sum r\theta_j(r)dr&\le\int_0^{\frac{\mathrm{Re}\log\lambda}{|\log\lambda-2\pi ip/q|}\kappa r}\mathrm{len}\left(\{\mathrm{Re}\,s=\xi\}\cap\bigcup D'_j\right)d\xi+\text{const.}\\&\le\frac{2\pi}{q}\frac{\mathrm{Re}\log\lambda}{|\log\lambda-2\pi ip/q|}\kappa(r+\text{const.}).\end{aligned}$$

故に, 式 (3) の右辺は次のように評価できる.

$$\sum_{j=1}^{N}\pi\int_{1}^{\kappa r}\frac{dr}{r\theta_j(r)} \geq \frac{N^2q|\log\lambda - 2\pi ip/q|}{2\operatorname{Re}\log\lambda}\frac{(\kappa r-1)^2}{\kappa(r+\text{const.})} - \text{const.} \tag{4}$$

続いて, 式 (3) の左辺を評価しよう. $|e^s| = e^{\operatorname{Re}s}$ に注意すると,

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{N}\log\max_{|s|=r}w_j(s) &\leq N\log\max_{s\in\bigcup D'_j,|s|=r}v(e^s)\\ &\leq \max_{s\in\bigcup D'_j,|s|=r}N\operatorname{Re}s\cdot\frac{\log|u(e^s)|}{\log|e^s|}.\end{aligned} \tag{5}$$

以上の不等式, (3), (4), (5) を合わせると

$$\max_{s\in\bigcup D'_j;|s|=r}N\operatorname{Re}s\cdot\frac{\log u(e^s)}{\log|e^s|} \geq \frac{N^2q|\log\lambda-2\pi ip/q|}{2\operatorname{Re}\log\lambda}\frac{(\kappa r-1)^2}{\kappa(r+\text{const.})} - \text{const.}$$

を得る. 両辺を r で割り, $r\to\infty$ とすると次を得る.

$$N\frac{\operatorname{Re}\log\lambda}{|\log\lambda-2\pi ip/q|}\operatorname{ord}u \geq \frac{N^2q|\log\lambda-2\pi ip/q|}{2\operatorname{Re}\log\lambda}\kappa,$$

ここで, $\operatorname{Re}s/|s|$ が $\operatorname{Re}\log\lambda/|\log\lambda-2\pi ip/q|$ に収束することを用いた. 更に, $\operatorname{ord}u = \log d/\operatorname{Re}\log\lambda$ と, κ $(1/e\leq\kappa<1)$ が任意だったことを使うと

$$\frac{N\log d}{|\log\lambda-2\pi ip/q|} \geq \frac{N^2q|\log\lambda-2\pi ip/q|}{2\operatorname{Re}\log\lambda}.$$

が導かれる. これは Yoccoz の不等式である. □

Yoccoz の不等式と Ahlfors の Spiral 定理は深い関係があることに注意しておく. 例えば, [H, Theorem 8.21.] を参照のごと. 実際, 力学系のパラメタを無理矢理 Ahlfors の Spiral 定理に当てはめると, Yoccoz の不等式が形式的に現れる. Ahlfors の Spiral 定理の証明を丁寧に見れば, 正しく Yoccoz の不等式を導き出せると予想しているが, 著者は確認していない. なお, Ahlfors の Spiral 定理も Tsuji の不等式に基づいて証明されるが, その証明までには非常に手間がかかる.

2 多変数多項式力学系のとき

$f:\mathbb{C}^m\to\mathbb{C}^m$ を dynamical degee $d>1$ の多項式とする. $z\in\mathbb{C}^m$ に対し,

$$G(z) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{d^n}\log^+\|f^n(z)\|$$

が定まって

$$G\in PSH(\mathbb{C}^m),$$
$$G\circ f(z) = d\cdot G(z)$$

を満たすと仮定する. $E = G^{-1}(0)$ とおく. 一般には $E\supset K$ しか分からないが, $m=2$ で f が一般 Hénon 写像のときは $E=K$ であることが知られている.

$a\in\mathbb{C}^m$ を f の固定点とし, ある $\lambda\in\mathbb{C}$, $|\lambda|>1$ に対し,

$$f\circ\phi(t) = \phi(\lambda t),\quad (t\in\mathbb{C}),$$
$$\phi(0) = a,\quad \phi'(0)\neq 0$$

を満たす正則な $\phi: \mathbb{C} \to \mathbb{C}^m$ が存在すると仮定する. ϕ としては, 例えばsaddle point に対する Schröder 方程式の解がある. このときの ϕ は不安定多様体を表している. [MNTU] 参照.

さて, $\widetilde{E} = \phi^{-1}(E)$ とおくと, $\widetilde{E}$ は $t \mapsto \lambda t$ で不変で, 次の命題を満たす.

命題 2.1. **以下は同値.**

1. **$\widetilde{E}$ は bridged, すなわち 0 を含む成分が非有界 (bridged の定義).**
2. **$\widetilde{E}$ の 0 を含む成分が 1 点でない.**
3. **$\widetilde{E}$ は非有界成分を持つ.**

この命題の証明のため, 以下の準備をする.

$\varepsilon > 0$ に対し, $x, y \in \mathbb{C}$ を結ぶ ε-chain とは, 順序つき有限集合 $\{c_1, \ldots, c_l\} \subset \mathbb{C}$ で,

$$c_1 = x, \quad |c_{i+1} - c_i| < \varepsilon, \ (0 < i < l), \quad c_l = y$$

を満たすもののことをいう.

補題 2.2. **$\{\varepsilon_j\}_{j=1}^{\infty}$ を正数の単調減少列で 0 に収束するとする. $C_j = \{c_{j1}, \ldots, c_{jl_j}\}$ を ε_j-chain の列で, c_{j1} は 0 に収束し, $\bigcup_{j=1}^{\infty} C_j$ は相対 compact とする. このとき, ω-limit set:**

$$L = \bigcup_{k=1}^{\infty} \overline{\bigcap_{j=k}^{\infty} C_j}$$

は compact で連結である.

証明. L が非連結と仮定すると, $L = L_1 \cup L_2$, $L_1 \cap L_2 = \emptyset$ なる compact 集合 L_1, L_2 が存在する. $a \in L_1$ としてよい. $r = d(L_1, L_2)$ とし,

$$I = \{x \in S \mid r/3 \leq d(x, L_1) \leq 2r/3\},$$

とおくと I は compact である. すると, C_j は I と無限個の j について交わる. なぜなら, $c_{j1} \to 0$ でありかつ, $\{C_j\}_{j=1}^{\infty}$ の部分列で L_2 に接近するものがあるからである. 従って $I \cap L \neq \emptyset$, すなわち, $L \not\subset L_1 \cup L_2 = L$. これは矛盾である. □

命題 2.1 の証明. 1 と 2 が同値なのは容易にわかり, 1 から 3 が従うのも自明. 3 から 2 を示す.

$\widetilde{E}_\infty$ を $\widetilde{E}$ のある非有界成分とする. R を十分大きい正数, ε_j を 0 に収束する正値単調減少列とする. $b \in \widetilde{E}_\infty$ をとり, $c_{j1} = \frac{1}{\lambda^j} b$ とおく. $\frac{1}{\lambda^j}\widetilde{E}_\infty$ は非有界だから, $\frac{1}{\lambda^j}\widetilde{E}_\infty$ 上に c_{j1} から $|t| > R$ まで延びる ε_j-chain をとり, $|t| = R$ をまたいだ瞬間に chain を切断することで, 一様に有界な ε_j-chain の列 $\{C_j\}$ を作ることができる. 補題 2.2 により, ω-limit set L は連結になる. また, 明らかに $0 \in L$, $L \cap \{|t| = R\} \neq \emptyset$, $L \subset \widetilde{E}$ が成り立つ. これは 2 を意味する. □

定理 2.3 (Yoccoz の不等式). **$\widetilde{E}$ が命題 2.1 の条件を満たし, $\widetilde{E} \neq \mathbb{C}$ であるとき,**

$$\frac{\mathrm{Re}\log\lambda}{|\log\lambda - 2\pi i p/q|^2} \geq \frac{Nq}{2\log d}$$

が成り立つ.

証明は 1 変数の場合と全く同じである. 一般的な設定でこの不等式が何を意味するかは不明だが, a が saddle point のときは, E を不安定多様体で切断したときの断面の構造を記述している.

参考文献

[BuH] Buff X., Hubbard J. H., Yoccoz inequality for Hénon mappings., Cornell University.

[BS1] Bedford E., Smillie J., Polynomial diffeomorphisms of $\mathbb{C}^2$: currents, equilibrium measure and hyperbolicity, Invent. math. 103 (1991), 69–99.

[BS2] Bedford E., Smillie J., Polynomial diffeomorphisms of $\mathbb{C}^2$. II: Stable manifolds and recurrence, Journal of the American Mathematical Society, 4 (1991), 657–679.

[EL] Erëmenko A. È, Levin G. M., Periodic Points of Polynomials, Ukrainian Math. J. 41 (1989), 1258–1262.

[H] Hayman W. K., Subharmonic Functions, Volume 2, Academic Press (1989).

[MNTU] Morosawa S., Nishimura Y., Taniguchi M., Ueda T., Holomorphic dynamics, Cambridge University Press (1999).

[P] Petersen C. L., On the Pommerenke-Levin-Yoccoz inequality, Ergod. Th. & Dynam. Sys. (1993), 13, 785–806.

[T] Tsuji M., Potential Theory, Maruzen (1959).